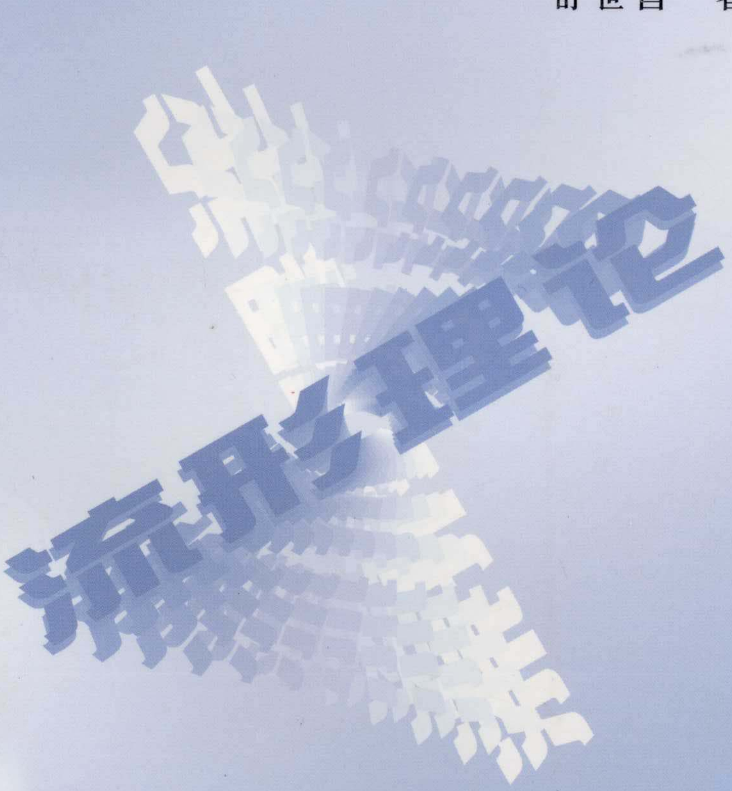
纯粹数学与应用数学研究专著

现代数学中的流形理论

Xiandaishuxue zhongde liuxinglilun

舒世昌 著



陕西科学技术出版社

纯粹数学与应用数学研究专著

现代数学中的流形理论

舒 世 昌　　著

陕 西 科 学 技 术 出 版 社

内 容 简 介

本书系统地介绍了流形论的经典理论，并对子流形的内蕴刚性进行了重点讨论. 内容包括：基础知识、微分流形、黎曼流形、子流形、子流形内蕴刚性的研究. 学完本书后，读者可独立从事流形论方面的研究工作.

本书适用于高等院校数学与应用数学专业的高年级学生和研究生阅读，也可供数学与理论物理工作者及研究人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

现代数学中的流形理论/舒世昌著，—西安：陕西科学技术出版社，2000. 8

ISBN 7-5369-3174-3

Ⅰ. 现…　Ⅱ. 舒…　Ⅲ. 流形-研究　Ⅳ. 0189. 3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 30415 号

陕西科学技术出版社出版发行

(西安北大街 131 号)

新华书店经销　　咸阳日报社印刷厂印刷

850 毫米×1168 毫米　1/32 开本　8 印张　20 万字

2000 年 9 月第 1 版　2000 年 9 月第 1 次印刷

印数：1—1000 册

定价：14. 00 元

要研究整个流形，流形论的基础便成为必要。流形研究的主要目的是研究经过坐标卡变换而保持不变的性质，这是与一般数学不同的地方。将来数学研究的对象，必然是流形。

——数学大师陈省身语

本研究课题受

陕西省教委专项科研基金资助

作 者 简 介

舒世昌，1963 年 4 月生，陕西周至人，1984 年 7 月毕业于陕西师范大学，理学硕士，副教授，陕西咸阳师专教务处副处长，中国数学会会员，陕西省高校科研管理研究会理事. 发表学术论文 50 多篇，研究成果多次获得陕西省教委科学技术进步奖. 曾主持并完成了 3 项陕西省教委专项科研基金资助项目. 1995 年被评为陕西省优秀教师，1997 年获得国家教委高等学校曾宪梓教育基金会教师奖三等奖，同年被共青团陕西省委授予"陕西省新长征突击手"荣誉称号.

序

整体微分几何研究是当今数学研究的重要分支之一．微分几何的始祖是高期(Gauss)．他的曲面论建立了曲面的第一基本式所奠定的几何，并把欧氏几何推广到曲面上“弯曲”的几何．黎曼(Riemann)在1854年有名的演讲把这个理论推广到n维空间，黎曼几何就此诞生．黎曼几何之大受重视源于爱因斯坦(Einstein)之广义相对论．爱因斯坦把引力现象和黎曼空间的曲率联系了起来，因之，物理现象有了数学模型，二者互相交叉影响向前发展着，微分几何的了解遂为理论物理学者所必需．微分几何的主要问题是整体性的，即研究空间或流形的整个的性质，尤其是局部性质与整体性质的关系．

1870年克莱因(Klein)发表了他的爱尔兰根纲领，把几何学定为一个变换群下的不变性质，视变换群的选择，产生不同的几何学．嘉当(Cartan)的广义空间把联络作为主要的几何观念，他使外微分形式与活动标架一起使用，并将活动标架从欧氏运动群推广到一般的李群，因而成为近代微分几何的基础．

要研究整个流形，流形论的基础便成为必要．舒世昌同志著的这本《现代数学中的流形理论》较系统简明地介绍了流形论的经典理论，如微分流形，黎曼流形、子流形等，并对子流形的内蕴刚性问题进行了比较深入的研究，涉及若干热点问题．所得结果改进或推广了前人若干著名的经典结论，并重新建立了一些子流形的内蕴刚性定理，这些成果大部分被国际权威期刊美国《数学评论》和德国《数学文摘》所转摘，充分体现了舒世昌同志勤奋好学，善于钻研的可贵精神，是一位很有希望的青年学者．

本书适用于高等院校数学与应用数学专业的高年级学生和研究生阅读，也可供数学与理论物理工作者及研究人员参考

王新民

1999年11月于陕西师大

前 言

流形的概念是欧氏空间的推广．粗略地说，流形在每一点的近傍和欧氏空间的一个开集是同胚的，因此在每一点的近傍可以引进局部坐标系．流形正是一块块“欧氏空间”粘起来的结果．要研究整个流形，流形论的基础便成为必要．流形内的坐标是局部的，流形研究的主要目的是经过坐标卡变换而保持不变的性质．这是与一般数学不同的地方．近半个世纪以来，流形论的研究从局部发展到整体，产生了许多深刻的并在其他数学分支和理论物理学中有主要作用的结果，将来数学研究的对象，必然还是流形．

本书系统地阐述了流形论的有关知识，内容共分五章．第一章介绍了多元微积分、向量空间及拓扑空间的一些基础知识；第二章讨论了微分流形、切空间、余切空间及其映射等内容．第三章讨论了黎曼流形的概念与性质．第四章讨论了子流形和极小子流形的概念与性质．第五章讨论了子流形的内蕴刚性，其内容是作者近几年的研究成果，涉及到子流形内蕴刚性研究的诸多方面，可供同行专家探讨和初学者参考．另外本书每章都配有问题与思考，其中有些问题有一定难度，读者根据学习情况选择探讨．

本书在写作过程中，得到了王新民教授、王宝勤教授、葛照强教授和张宗劳博士的热情支持和帮助，也得到了陕西省教委科技处和咸阳师专领导以及陕西科学技术出版社的大力支持，作者在此一并向他们表示衷心感谢．

限于作者水平，书中不妥之处在所难免，欢迎同行专家与读者批评指正．

舒世昌

1999 年 10 月于古都咸阳

目 录

第 1 章　基础知识

1.1　映射 …… 1

1.2　向量空间 …… 4

1.3　欧氏空间和赋范空间 …… 9

1.4　拓扑空间 …… 14

1.5　多元函数的微分 …… 20

1.6　映射及其微分 …… 24

问题与思考 …… 29

第 2 章　微分流形

2.1　微分流形的基本概念 …… 31

2.2　切空间与切映射 …… 45

2.3　余切空间与余切映射 …… 61

2.4　子流形 …… 64

2.5　切丛　流形上的向量场 …… 70

2.6　余切丛和余切向量场 …… 75

2.7　张量与张量场 …… 79

2.8　微分形式与外微分 …… 86

2.9　定向流形　积分与 Stokes 定理 …… 90

问题与思考 …… 97

第 3 章　黎曼流形

3.1　线性联络与测地线 …… 99

3.2　黎曼度量 …… 103

3.3　黎曼联络 …… 108

3.4　黎曼曲率 …… 111

3.5　黎曼流形的结构方程…… 116
3.6　黎曼流形的截面曲率…… 119
3.7　黎曼流形的 Ricci 曲率和数量曲率 …… 122
问题与思考 …… 124
第4章　子流形
4.1　子流形的基本公式…… 127
4.2　极小子流形…… 134
问题与思考 …… 138
第5章　子流形内蕴刚性的研究
5.1　四元数射影空间极小子流形的内蕴刚性…… 141
5.2　类空子流形的内蕴刚性…… 167
5.3　局部对称共形平坦空间子流形的内蕴刚性…… 177
5.4　复射影空间子流形与叶层的内蕴刚性…… 203
5.5　拟常曲率空间　球空间　Sasaki 空间子流形的内蕴刚性…… 217
问题与思考 …… 244

第 1 章　基础知识

1.1　映　射

1. 映射的概念

定义 1.1.1　设 X 和 Y 是两个集合，若在 X 和 Y 之间有一个对应关系或法则存在，使得对 X 中任意一个元素 x，Y 中有唯一的一个元素 y 与之对应，则我们就说给出了一个 X 到 Y 的映射，而上述 y 称为 x 在该映射下的像. 若用 f 表示此映射，则上述 x 和 y 之间的对应关系表示为 $y = f(x)$，此时 X 称为映射 f 的定义域，Y 称为 f 的值域. f 是集合 X 到 Y 的映射，记为：$f : X \to Y$.

若对任何 $y \in Y$ 有 $x \in X$ 使 $y = f(x)$，则称 f 为满射；若对 X 中任何 $x_1 \neq x_2$，有 $f(x_1) \neq f(x_2)$，则称 f 是单射；若存在 $y_0 \in Y$ 使得对一切 $x \in X$ 有 $f(x) = y_0$，则称 f 为常值映射；若 $X = Y$，且对任何 $x \in X$ 有 $f(x) = x$，则 f 称为恒等映射；若 $Y = R$，则映射 f 也称为集合 X 上的实函数. 如果一个映射既是单射，又是满射，则称为 1—1 映射.

2. 映射的图像

定义 1.1.2　设 A 和 B 是两个集合，对任何 $a \in A$ 及 $b \in B$，由一切序对 (a,b) 组成的集合称为 A 与 B 的直积，记为 $A \times B$. 即
$A \times B = \{(a,b) | a \in A, b \in B\}$
规定：当且仅当 $a_1 = a_2, b_1 = b_2$ 时 $(a_1,b_1) = (a_2,b_2)$

完全类似,对 n 个集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,它们的直积 $\prod_{k=1}^{n}A_k$ 定义为 $\prod_{k=1}^{n}A_k=\{(a_1,a_2\cdots,a_n)\,|\,a_k\in A_k,k=1,2,\cdots,n\}$.

定义 1.1.3 设 f 是集合 X 到 Y 的一个映射,令 $G=\{(x,f(x))\,|\,x\in X\}$ 则 G 是直积集合 $X\times Y$ 的子集,它称为映射 f 的图像.

G 有下面两条性质:(1) 对任何 $x\in X$,必有 $y\in Y$ 使 $(x,y)\in G$;(2) 若对某个 $x\in X$,(x,y_1) 和 (x,y_2) 皆属于 G,则 $y_1=y_2$. 反之,若 $X\times Y$ 的子集 G 具备上述两条性质,则对每一个 $(x,y)\in G$,定义 $y=f(x)$,则 f 就是 X 到 Y 的一个映射.

3. 复合映射

定义 1.1.4 设 f 是集合 X 到 Y 的映射,g 是集合 Y 到 Z 的映射,此时对每一个 $x\in X$,若定义 $u(x)=g(f(x))$ 则 u 就成为 X 到 Z 的映射,它称为映射 f 和 g 的复合,记为 $u=f\cdot g$.

若除了上述 f 和 g 以外,另有集合 Z 到 W 的映射 h,则 $h\cdot(g\cdot f)$ 和 $(h\cdot g)\cdot f$ 都是 X 到 W 的映射,而且 $h\cdot(g\cdot f)=(h\cdot g)\cdot f$.

4. 逆映射

设 f 是集合 X 到 Y 的映射,对每一个 $A\in\mathscr{B}(X)$ 及 $B\in\mathscr{B}(Y)$,令

$$f(A)=\{f(x)\,|\,x\in A\}\tag{1.1.1}$$

$$f^{-1}(B)=\{x\,|\,f(x)\in B\}\tag{1.1.2}$$

则 $f(A)$ 称为 A 在映射 f 下的像,$f^{-1}(B)$ 称为 B 在映射 f 下的原像.

此外按(1.1.1),f 可看作 $\mathscr{B}(X)$ 到 $\mathscr{B}(Y)$ 的映射. 按(1.1.2)f^{-1} 可看作 $\mathscr{B}(Y)$ 到 $\mathscr{B}(X)$ 的映射.

定义 1.1.5 若上述 X 到 Y 的映射 f 还是 $1-1$ 映射,则对

每一个 $y \in Y$，有且只有一个 $x \in X$ 使 $f(x) = y$，此时若定义 $f^{-1}(y) = x\,(y = f(x))$，则 f^{-1} 是 Y 到 X 的一个 $1-1$ 映射，它称为 f 的逆映射.

定理 1.1.1　设 f 是集合 X 到 Y 的映射，$\{A_\lambda\}$，$\lambda \in \Lambda$ 和 $\{B_\lambda\}$，$\lambda \in \Lambda$ 分别是 X 和 Y 上的集族，则

(1) $f(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$，　$f(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) \subset \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$

(2) $f^{-1}(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda) = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$，$f^{-1}(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda) = \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$

证明　这里只证(2)，(1)的证明留给读者.

设 $x \in f^{-1}(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda)$，由定义得知 $f(x) \in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$，于是有某 $\lambda_0 \in \Lambda$ 使得 $f(x) \in B_{\lambda_0}$，故 $x \in f^{-1}(B_{\lambda_0}) \subset \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$. 从而 $f^{-1}(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda) \subset \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$，相反的包含关系是明显的，所以(2)之第一式得证.

又设 $x \in \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$，则对每一个 $\lambda \in \Lambda$ 有 $x \in f^{-1}(B_\lambda)$，即 $f(x) \in B_\lambda$，从而 $f(x) \in \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$，$x \in f^{-1}(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda)$ 这样就有 $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda) \subset f^{-1}(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda)$，由于相反的包含关系是显然成立的，所以(2)之第二式得证. 证毕.

注　上述定理可简述为：映射保并不保交，逆映射保并又保交.

5. 投影

定义 1.1.6　设 $X \times Y$ 是集合 X 和 Y 的直积，对每一个 $(x, y) \in X \times Y$ 定义 $P_X(x, y) = x$，$P_Y(x, y) = y$，则 P_X 是 $X \times Y$ 到 X 的一个映射，称为 $X \times Y$ 到 X 的投影. 同样 P_Y 称为 $X \times Y$ 到 Y 的投影.

定理 1.1.2　设 $A \subset X$，$B \subset Y$　则

(1) $P_X^{-1}(A) = A \times Y$，$P_Y^{-1}(B) = X \times B$

(2) $P_X^{-1}(A) \cap P_Y^{-1}(B) = A \times B$

证明　(1)　若 $(x, y) \in P_X^{-1}(A)$，则 $x = P_X(x, y) \in A$，故 $(x, y) \in A \times Y$. 反之，若 $(x, y) \in A \times Y$，则 $x \in A$，故 $P_X(x, y) \in$

A，因此$(x,y) \in P_X^{-1}(A)$，这就证明了(1)之第一式，同理可证第二式.

(2) 由(1) $P_X^{-1}(A) \cap P_Y^{-1}(B) = (A \times Y) \cap (X \times B) = (A \cap X) \times (Y \cap B) = A \times B$. 证毕.

对 n 个集合 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的直积 $X = \prod_{k=1}^{n} X_k$，可用同样方式来定义 X 到 X_k 的投影 P_k

$$P_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_k,$$

其中$(x_1, x_2, \cdots x_n) \in \prod_{k=1}^{n} X_k, k = 1, 2, \cdots n$.

1.2 向量空间

1. 向量空间

定义 1.2.1 数域 F 上的一个向量空间是一个集合 V，其中定义了两种运算：

加法： $V \times V \to V \qquad (x,y) \to x + y, \forall x, y \in V$

数乘： $F \times V \to V \qquad (a,x) \to ax, \forall a \in F, x \in V$

且满足以下公理：

(1) $\forall x, y \in V \qquad x + y = y + x$

(2) $\forall x, y, z \in V \qquad (x + y) + z = x + (y + z)$

(3) 存在 $0 \in V$，使 $\forall x \in V$，有 $0 + x = x$

(4) $\forall x \in V$，存在 $-x \in V$，使 $x + (-x) = 0$

(5) $\forall x, y \in V, a \in F \qquad a(x + y) = ax + ay$

(6) $\forall a, b \in F, x \in V \qquad (a + b)x = ax + bx$

(7) $\forall a, b \in F, x \in V \qquad (ab)x = a(bx)$

(8) $\forall x \in V, 1x = x \qquad 0x = 0$

注 (1) 数域 F 通常为实数域 R 或复数域 C.

(2) V 中的元素称为向量，$\forall x \in V$，其逆元素为$(-1)x = -x$，

V 中减法可定义为 $x - y = x + (-y) = x + (-1)y$.

(3) 满足(1)—(4) 的集合 V 称为加法交换群.

例 1 $V = R^n = \{(x^1,\cdots,x^n) | x^i \in R\}$ 定义加法与数乘如下:

设 $\forall x = (x^1,\cdots x^n), y = (y^1,\cdots y^n) \in V \quad \forall a \in R, x + y = (x^1 + y^1,\cdots,x^n + y^n), ax = (ax^1,\cdots,ax^n)$ 则 V 是 R 上的向量空间. R^n 称为 n 维数空间.

例 2 设 $V = M_{nn}(R)$ 是实数域 R 上的全体 $n \times n$ 矩阵的集合, $\forall A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in V$, 定义加法、数乘如下:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}), aA = (aa_{ij}),$$

则 V 是 R 上的向量空间.

定义 1.2.2 设 V 是一向量空间, V 的子集 $T \subset V$ 称为 V 的向量子空间, 如果对于 $x, y \in T$ 和 $a \in R$, 有 $x + y \in T$, $ax \in T$.

2. 线性映射

定义 1.2.3 设 $f: U \to V$ 是向量空间 U, V 之间的映射, 若

$$f(ax + by) = af(x) + bf(y) \tag{1.2.1}$$

对 $\forall x, y \in U, a, b \in R$ 成立, 则称 f 是线性映射或同态映射, $1-1$ 对应的线性映射又称为同构映射.

注 (1) 当 $V = U$ 时, f 称为线性变换.

(2) 当 $V = R$ 时, f 称为 U 上的线性函数.

$Kerf = \{x \in U | f(x) = 0\}$ 称为线性映射 f 的核

$Imf = \{f(x) | x \in U\}$ 称为 f 的象, 容易证明 $Kerf$ 和 Imf 分别是 U, V 的向量子空间.

定理 1.2.1 线性映射 $f: U \to V$ 是单射当且仅当 $Kerf = 0$, 是满射当且仅当 $Imf = V$; 是 $1-1$ 映射当且仅当 $Kerf = 0, Imf = V$.

证明 只证 f 是单射当且仅当 $Kerf = 0$, 其余证明留给读者.

必要性: 设 f 是单射, 即对 $\forall x_1$、$x_2 \in U$, 若 $f(x_1) = f(x_2)$, 则 $x_1 = x_2$. 因若 $x \in Kerf$, 则 $f(x) = 0 = f(0)$ 故 $x = 0$, 即 $Kerf = 0$

充分性：设 $Kerf = 0$，对 $\forall x_1、x_2 \in U$

若 $f(x_1) = f(x_2)$ 则 $f(x_1 - x_2) = 0$

所以 $x_1 - x_2 \in Kerf \quad x_1 = x_2$. 证毕.

令 $L(U, V) = \{f \mid f: U \to V$ 是线性映射$\}$ 在其中定义加法和数乘如下：

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \forall x \in U$$

$$(af)(x) = af(x) \qquad \forall x \in U, a \in R$$

则易验证 $L(U, V)$ 是实数域 R 上的向量空间，特别地 $V = R$ 时，$L(U, V)$ 是向量空间.

例3 设 $f: R^2 \to R^2$ 定义 f 为 $\forall (x_1, x_2) \in R^2$

$$f(x_1, x_2) = (x_1\cos\theta + x_2\sin\theta, -x_1\sin\theta + x_2\cos\theta)$$

θ 是旋转角，则 f 是线性映射，即 $f \in L(R^2, R^2)$.

3. 双线性映射

定义 1.2.4 设 U_1, U_2, V 是向量空间，映射 $f: U_1 \times U_2 \to V$ 称为双线性映射，若

$$f(ax + bx', y) = af(x, y) + bf(x', y) \tag{1.2.2}$$

$$f(x, ay + by') = af(x, y) + bf(x, y') \tag{1.2.3}$$

其中 $\forall x, x' \in U_1, y, y' \in U_2, a, b \in R$

注 (1) 全体双线性映射 $f: U_1 \times U_2 \to V$ 构成的集合 $L(U_1, U_2; V) = \{f \mid f: U_1 \times U_2 \to V$ 是线性映射$\}$ 也是 R 上的向量空间.

(2) 类似可定义 r 重线性映射 $f: U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_r \to V$.

例4 设 $C[a, b]$ 是 $[a, b]$ 上连续函数所成的向量空间，对任意 $f, g \in C[a, b]$ 定义 $F: C[a, b] \times C[a, b] \to R$ 为

$$F(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

则 F 是双线性映射即 $F \in L(C[a, b], C[a, b]; R)$.

4. 基和维数

定义 1.2.5 向量空间 V 的一组基是 V 的一个线性无关的向

量组 $e_1,\cdots,e_n$，且 V 的任一个元素 x 均可由它们线性表出，即

$x = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n \qquad a_i \in R \qquad i = 1,\cdots,n$

数组 $a_1,\cdots,a_n$ 称为向量 x 关于基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 的分量（坐标），V 的一组基中所含向量的个数称为向量空间 V 的维数.

定理 1.2.2　有限维向量空间 V 的每一组基中的元素的个数是相同的.

证明　先证：设 $\{e_1,\cdots,e_n\}$，$\{f_1,\cdots,f_m\}$ 是两组线性无关的向量，若 $\{f_1,\cdots,f_m\}$ 可被 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 线性表示. 则 $m \leqslant n$.

不妨设 $m > n$，因为 $f_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i \qquad j = 1,\cdots,m$

而其中系数矩阵中不为零的代数余子式最高阶数是 n，故 $f_1,\cdots,f_m$ 线性相关，矛盾. 所以 $m \leqslant n$.

由上述结论，假设 $\{e_1,\cdots,e_n\}$，$\{f_1,\cdots,f_m\}$ 是 V 的两组基. 一方面 $m \leqslant n$，另一方面 $n \leqslant m$ 故 $m = n$. 证毕.

定理 1.2.3　任何 n 维向量空间 V 同构于 n 维实数空间 R^n.

证明　设 V 是 n 维向量空间，$\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是 V 的一组基，$\forall x \in V$，　$x = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n \quad a_i(i = 1,\cdots,n) \in R^n$ 可以验证这种表示法是唯一的. 令 $\varphi: x \to (a_1,\cdots,a_n)$ 易证 $\varphi: V \to R^n$ 是同构.

事实上，设 $\forall x, y \in V$，$\varphi: x \to (a_1,\cdots,a_n)$，$\varphi: y \to (b_1,\cdots,b_n)$　$x = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n \quad y = b_1e_1 + \cdots + b_ne_n \quad a_i, b_i(i = 1,\cdots,n) \in R$.

$ax + by = (aa_1 + bb_1)e_1 + \cdots + (aa_n + bb_n)e_n, \qquad a, b \in R$

则

$$\varphi: ax + by \to (aa_1 + bb_1,\cdots,aa_n + bb_n) \text{ 即}$$
$$\varphi(ax + by) = a\varphi(x) + b\varphi(y)$$

所以 φ 是线性映射，φ 是 1—1 映射是显然的，故 φ 是同构映射. 证毕.

5. 对偶空间

定义 1.2.6　设 V 是 n 维向量空间，令 $V^* = L(V, R) = \{f:$

$V \to R | f$ 是线性函数$\}$即V^*是V上的全体实值线性函数构成的集合，在V^*中定义加法和数乘如下：

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \quad \forall f,g \in L(V,R), x \in V;$$

$$(af)(x)=af(x) \quad \forall x \in V, a \in R$$

则$V^*=L(V,R)$是向量空间，称为V的对偶空间.

定理 1.2.4 $\dim V^* = \dim V = n$

证明 设$e_1,\cdots,e_n$是V的一组基，定义映射$\varphi: V^* \to R^n, \varphi(f) = (f(e_1),\cdots,f(e_n)) \quad \forall f \in V^*$，下证$V^*$同构于$R^n$.

(1) φ是线性映射

$\varphi(\alpha f+\beta g)=((\alpha f+\beta g)(e_1),\cdots,(\alpha f+\beta g)(e_n)) = (\alpha f(e_1)+\beta g(e_1),\cdots,\alpha f(e_n)+\beta g(e_n)) = \alpha\varphi(f)+\beta\varphi(g)$

(2) φ是 1—1 映射

设$\varphi(f)=\varphi(g)$即

$(f(e_1),\cdots,f(e_n))=(g(e_1),\cdots,g(e_n))$

所以$f(e_i)=g(e_i)$即

$$(f-g)(e_i)=0 \qquad i=1,\cdots,n$$

因为$e_1,\cdots,e_n$是V的基，所以$f=g$即φ是单射.

任意$(a_1,\cdots,a_n) \in R^n$，定义映射$f: V \to R$

$$f(e_i)=a_i, \qquad f(x)=\sum_{i=1}^n a_i x_i$$

其中$x=\sum_{i=1}^n x_i e_i \in V$ 易证$f \in V^*$从而

$\varphi(f)=(f(e_1),\cdots,f(e_n))=(a_1,\cdots,a_n)$故

$V^* \cong R^n, \dim V^* = \dim R = n = \dim V$. 证毕.

设$e_1,\cdots,e_n$是V的一组基，$\forall x \in V$有$x=\sum_{j=1}^n x_j e_j$在V上定义一组函数$e_i^*: V \to R$为

$$e_i^*(e_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}, e_i^*(x)=\sum_{j=1}^n x_j e_i^*(e_j)=x_i$$

易证$e_i^* \in V^*$，并且$e_1^*,\cdots,e_n^*$线性无关，$\forall f \in V^*$有$f=$