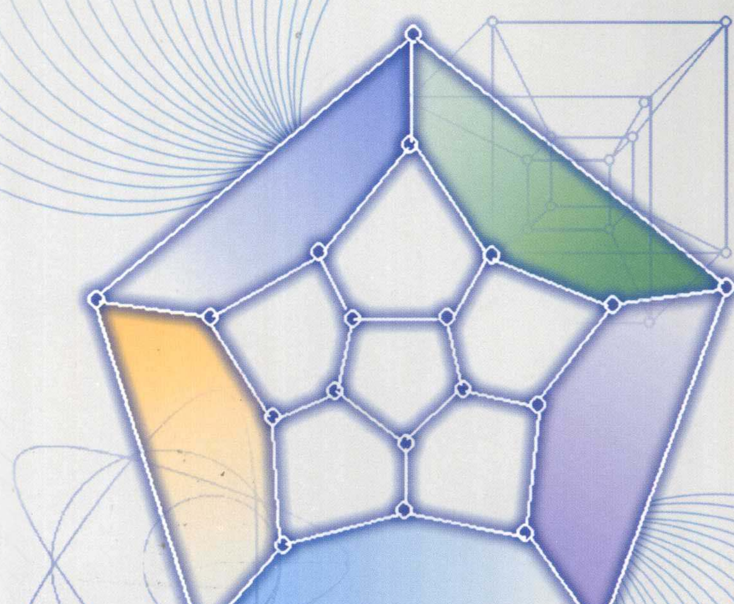
Discrete Mathematics

离散数学

（第3版）

陈建明 曾 明 刘国荣



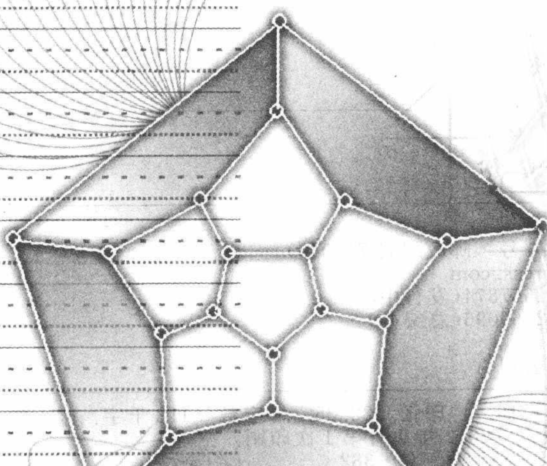
西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

Discrete Mathematics

离散数学

（第3版）

陈建明 曾明 刘国荣



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

内容简介

本书系统地介绍了各种离散的数学结构，其中包括数理逻辑、集合论、代数系统和图论的基本内容。本书以证明方法和证明过程为重点，以关系的理念贯穿全书。在编写过程中力求内容精练、重点突出、深入浅出，有助于读者自我学习。书中内容可满足计算机专业后继课程的需要。

本书可作为计算机软件专业、计算机通信专业、计算机制造专业和各类相关信息专业的本科生“离散数学”课程的教科书及教学参考书，同时也可供有关考研人员和自考人员学习和参考。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/陈建明，曾明，刘国荣编. —3版. —西安：
西安交通大学出版社，2012.1
ISBN 7-5605-4154-9

Ⅰ.离… Ⅱ.①陈…②曾…③刘… Ⅲ.离散数学
Ⅳ.①O158

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第281934号

书　　名　离散数学(第3版)
编　　者　陈建明　曾明　刘国荣
责任编辑　叶　涛

出版发行　西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路10号　邮政编码710049)
网　　址　http://www.xjtupress.com
电　　话　(029)82668357　82667874(发行中心)
(029)82668315　82669096(总编办)
传　　真　(029)82668280
印　　刷　陕西元盛印务有限公司

开　　本　727mm×960mm　1/16　**印张**　22.25　**字数**　412千字
版次印次　2012年1月第3版　2012年1月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5605-4154-9/O·382
定　　价　32.00元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题，请与本社发行中心联系、调换。
订购热线：(029)82665248　(029)82665249
投稿热线：(029)82664954
读者信箱：jdlgy@yahoo.cn

第3版前言

本书第2版(书名为《离散的数学结构》)自2004年4月出版发行至今已有8年,几年来使用本教材的兄弟院校和读者提出了许多意见和建议,同时为了配合西安交通大学2010新版本科生培养方案的实施,我们对该书进行了改版和修订。

为了与国内大多数学校保持一致,我们将书名改回第1版书名:《离散数学》。同时将原来的教材内容顺序做了调整。第一部分调整为数理逻辑(第1、2章);第二部分调整为集合论(第3、4、5章);第三部分调整为代数系统(第6、7章);第四部分调整为图论(第8章);第五部分调整为证明方法(第9章)。在修订过程中局部还增加了一些内容,并修订了原教材中的错误和不足之处。

本书第1、2章由曾明编写,第3、4、5、6、7、9章由陈建明编写,第8章由刘国荣编写,最后由陈建明统稿。由于编者水平有限,不妥之处还望读者批评指正。

感谢西安交通大学出版社对本书出版的大力支持。

感谢兄弟院校使用本教材并多提宝贵意见。

编　者

2012年元月

第1版前言

本教材是根据原教育部委托吉林大学编写的计算机软件专业《离散数学》的教学大纲，结合我校计算机专业、自控专业、应数及计数专业、教改班等班级多年的教学实践，在自编讲义的基础上修改编写而完成的。

本教材由集合论、代数系统、图论、数理逻辑四部分组成。适用于理工科大学计算机专业，也可供其他专业使用。

在教材内容的安排上，力求做到选材既能满足计算机专业后继课程的需要，又比较精练。同时，考虑到计算机科学与技术发展对数理逻辑的要求，在教材中加强了数理逻辑部分，而且在形式推理部分采用了比较严格的符号规则，避开了P规则和T规则。我们认为这样的处理便于读者清楚地理解和掌握数理逻辑的形式推理过程。讲授本教材约需课内80～108学时，其中集合论中的基数部分、群中陪集的概念及有关内容、布尔代数中原子及布尔表达式概念，Euler图中的中国邮路问题、Hamilton图中的货郎担问题及谓词演算部分可根据学时多少及教学要求进行取舍。

本书中集合论（一、二、三章）由祝颂和编写，代数系统（四、五章）由陈建明编写，图论（六、七章）由陆诗娣编写，数理逻辑（八、九章）由曾明编写。

西北工业大学张遵濂教授审阅了全部书稿并提出了宝贵的意见。在此，我们向他致以诚挚的谢意。

由于编者水平有限，不妥之处在所难免，恳请读者提出批评意见。

编者　1991年5月

第 2 版前言

当《离散的数学结构》出版之时，我们深深地怀念由西安交通大学出版社出版的《离散数学》主编——祝颂和教授，如果没有他早年的教学实践活动和教材编写思想就不会有今天这本《离散的数学结构》，特将这本《离散的数学结构》献给我们尊敬的祝颂和老师。

1991 年由西安交通大学出版社出版的《离散数学》是根据教育部的计算机软件专业“离散数学”教学大纲编写的，时至今日已有 10 年之久。随着计算机科学技术日新月异的发展，有必要对该书进行补充和修改。此次出版着重参考了 ACM 和 IEEE－CS 所制定的适用于计算机科学的 2001 计算机教程（CC2001）中关于“离散结构”课程的要求。首先，根据 2001 计算机教程将书名改为《离散的数学结构》以还其课程的本来名称。《离散数学》时常被人们误解为数学的一个分支。“离散数学”课程和教材源自于国外，最先使用的书名为《DISCRETE MATHEMATICAL STRUCTURES》。国内最早的一本相关的书为《离散数学结构导论》，后来由于其他原因被翻译成《离散数学》。借此次出版之时，仍将书名改为《离散的数学结构》，以免引起误解。其次，书中内容完全符合 2001 计算机教程中的内容要求。考虑到“计数基础”和“离散概率”这两部分的内容在为计算机专业开设的“组合数学”和“概率统计”两门课程中均有详尽的介绍，因而未将这两部分的内容编进书中。在教学安排中我们将 2001 计算机教程中的“离散结构”分成三门课程，它们分别是“离散的数学结构”、“组合数学”和“概率统计”。

在本书中还作了如下的考虑和变更。

1. 增加了函数一章的部分内容。除了原有函数的基本概念和基本性质以外，增加了“原始递归函数”和“可计算函数”两节，目的是让

学生更好地理解和掌握函数对应规则的内涵和多样性。

2. 2001 计算机教程强调“离散数学”课程的学习重点是关于证明过程和证明方法的学习，在我们多年的教学实践活动中发现这也是学生学习的难点。在书中除了加强每一章中的定理证明内容外，还专门增加了“证明方法与证明过程”一章。将书中使用的所有证明方法进行归类整理，并举出若干证明实例辅以说明。

3.《离散的数学结构》介绍了大量抽象的知识内容，而贯穿这些知识内容的关键是人类活动中不同事物之间的关联关系，为此，书中重点突出了关系的理念。从集合一章中的个体与集合的关系开始直到数理逻辑中命题公式和谓词公式之间的各种逻辑关系为止。我们认为关系是结构的灵魂，从而对于各种关系的描述成为贯穿这本书的主线条。

本书集合、关系、函数、代数系统、格与布尔代数、证明方法与证明过程（第 1,2,3,4,5,9 章）由陈建明修编，图论（第 6 章）由刘国荣修编，命题逻辑和谓词逻辑（第 7,8 章）由曾明修编，最后由陈建明统稿。

在本书的修编过程中，李文为本书搜集了大量的资料，在此表示感谢。

感谢西安交通大学出版社对本书出版所给予的极大支持。

由于编者水平有限，不妥之处在所难免，恳请读者提出批评意见。

编者　2004 年 4 月

目　录

第一部分　数理逻辑

第二部分　集合论

第四部分　图论

第五部分　关于证明

第一部分

数理逻辑
Mathematical Logic

第 1 章

命题演算

数理逻辑是研究推理的一种理论。其特点在于运用数学上形式化的方法来研究形式逻辑中的推理规律，使形式逻辑的研究归结于对由一整套符号所组成的形式系统的研究。

命题演算是数理逻辑中最基本的内容。

1.1 命题与真值联结词

1.1.1 命题

命题是推理的基本要素。

在日常生活中，经常要对某个具体的或抽象的事物进行适当的描述，诸如其特征或者一定的依赖关系等。

一种描述，当通过某种方式说明能够成立时，称这种描述为**真命题**。

一种描述，当通过某种方式说明不能成立时，称这种描述为**假命题**。

在数理逻辑中，真命题与假命题统称为命题，而真与假称为**命题的值**。

例 1.1 判断下列语句是否为命题。

(1) 请把门关上。

(2) 您昨晚看电视了吗?

(3) 吸烟有害健康。

(4) 是药都可以治好病。

(5) 今天真冷啊!

(6) 台湾是中国最大的海岛。

在这些例子中，(1)，(2) 和(5) 都不是命题。(3) 和(6) 是真命题，而(4) 是假命题。从上面的例子中可以看出，只有陈述句才能分辨真假，而其他一些类型的句子，如祈使句、疑问句、感叹句等，均不能对其分辨真假。一般地说，只有陈述句才可能是命题。

当然，要判断一个陈述句的真假有时也不是容易的，它与人的思想感情、语句所处的环境、判断标准、认识程度等有着密切的联系。

例 1.2 判断下列语句的真假性。

(1) $1+1=10$。

(2) 数理逻辑是枯燥无味的。

对于(1)，当它表示的数为二进制时，此语句是真的；但如果它表示的数为十进制或其他进制时，此语句是假的。可是，一般说来，这种语句必处在一系列语句中的一个特定位置上，因此，由上下文关系，立即可以确定它所表示的数是二进制还是非二进制。同时，一个数不可能既是二进制，又是非二进制，故此语句是能分辨真假的。

至于(2)，那些喜欢学习数理逻辑的人认为该语句是假的，而那些不喜欢学习数理逻辑的人，则认为该语句是真的。因此，该语句的真假取决于说话人的主观判断，而且对于具体的某个人来说，也只能得到一种判断结果，故该语句也是能分辨真假的。像这类语句，都可以看作命题。

简单地说，凡是能分辨其真假的语句就是命题。但是，这里所说的“能分辨其真假”指的是“本身具有真假”这一事实，并不意味着“已知其真假”。

例 1.3 判断下列语句的真假性。

(1) 中国将在 2020 年接近西方发达国家的生活水平。

(2) 地球之外还存在有智慧的动物。

第一个语句的真假性将在 2020 年得到验证，而第二个语句的真假性将随着人类知识的发展得以证实。像这类语句，尽管暂时还不知道其真假性，但它们本身确实是具有真假的，故仍是命题。通常所说的“猜想”大多属于这种情况。所以说，命题就是具有真假值的陈述句。

然而，数理逻辑的特点并不在于研究具体某个命题的真假性，而是把逻辑推理变成类似数学演算的完全形式化的逻辑演算。为此，首先要将推理所涉及到的各个命题符号化。

习惯上，用 P,Q,R 等大写拉丁字母表示命题。而命题的真与假分别用“T”与“F”表示。用以表示命题的符号称为**命题标识符**；表示特定命题的标识符称为

命题常量;表示任意命题的标识符称为**命题变元**。当命题变元用特定的命题代入时,该命题变元就有确定的真假值 T 或 F。

1.1.2　真值联结词

上面所说的命题都是一些简单陈述句,这种命题称为**原子命题**(成分命题)。在日常语言中,由一些简单陈述句通过适当的联结词可组成较为复杂的语句。在命题演算中,由原子命题通过特定的"联结词"所构成的新命题称为**复合命题**。

例如"西安和南京都是中国的古都"是由下面两个原子命题经联结词"并且"复合而成的复合命题。

P:西安是中国的古都。

Q:南京是中国的古都。

在日常语言中常用的联结词有"不"、"并且"、"或者"、"如果 …… 则 ……"、"当且仅当"等等。在命题演算中也有类似的一些联结词。但是从严格的意义上讲,它们的含义与日常语言的联结词并不完全一致,故称之为**真值联结词**或**命题联结词**。在实际意义上不发生混淆的情况下仍称之为联结词。一个自然语言中的联结词能够成为真值联结词的关键是:经此联结词所构成的复合命题的真假值完全依赖于组成该复合命题的成分命题的真假性,而不取决于成分命题的含义。

下面介绍常用的五个真值联结词。

(1) 否定联结词

否定联结词将成分命题 P 组成新的命题"非 P",记为 $\neg P$。

符号 $\neg$ 称为**否定联结词**,简称**否定词**。$\neg P$ 称为 P 的**否定式**。

$\neg P$ 为真,当且仅当 P 为假。它们的真假值关系由表 1.1 确定。

表 1.1　否定词之真值表

P	$\neg P$
T	F
F	T

例如,P 为"今天天气好",则 $\neg P$ 是"今天天气不好"。

(2) 合取联结词

合取联结词将成分命题 P,Q 组成新的命题"P 并且 Q",记为 $P \wedge Q$。

符号 $\wedge$ 称为**合取联结词**,简称**合取词**。$P \wedge Q$ 称为 P 与 Q 的合取式,P,Q 称为该合取式的**合取项**。

$P \wedge Q$ 为真,当且仅当 P 与 Q 同时为真。它们的真假值关系由表 1.2 确定。

表 1.2　合取联结词之真值表

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

合取所表示的逻辑关系是两个命题同时成立。因此，日常语言中的“并且”，“不仅……而且……”，“既……又……”，“尽管……仍然……”等，都可以符号化为 $\wedge$。

例如，“尽管天气不好，但运动会仍然照常进行。”，可写成 $P \wedge Q$，其中 P 为“天气不好”，Q 为“运动会进行”。

(3) 析取联结词

析取联结词将成分命题 P，Q 组成新的命题“P 或者 Q”，记为 $P \vee Q$。

符号 $\vee$ 称为**析取联结词**，简称**析取词**。$P \vee Q$ 称为 P 与 Q 的析取式，P，Q 称为该析取式的**析取项**。

$P \vee Q$ 为真，当且仅当 P，Q 至少有一个为真。它们的真假值关系由表 1.3 确定。

表 1.3　析取联结词之真值表

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

在日常生活中，“或者”常常是带有二义性的。它们有时表示的是“可兼或”，即允许 P，Q 同时为真；而有时表示的是“不可兼或”，即不允许 P，Q 同时为真。在数理逻辑中所说的析取，采用的是前一种意义下的“或者”。

例如，“小王或者是学习不用功，或者是学习方法有问题。”，可以符号化为 $P \vee Q$，其中 P 为“小王学习不用功”，Q 为“小王学习方法有问题”。而“小王或者在图书馆，或者在教室”就不能简单地符号化为 $P \vee Q$。因为小王不可能同时既在图书馆，又在教室，因此这是一种“不可兼或”。

关于“不可兼或”，将在后面采用其他形式来表示。所以，日常语言中的“或者”，“不是……就是……”，“可能……可能……”等，是否能符号化为 $\vee$ 应根据具体的命题加以分析。

(4) 蕴涵联结词

蕴涵联结词将成分命题 P，Q 组成新的命题“P 蕴涵 Q”，记为 $P \rightarrow Q$。

符号 $\rightarrow$ 称为**蕴涵联结词**，简称**蕴涵词**。$p \rightarrow Q$ 称为 P,Q 的**蕴涵式**，P 称为蕴涵式的**前件**，Q 称为蕴涵式的**后件**。

$P \rightarrow Q$ 为假，当且仅当 P 为真且 Q 为假。它们的真假值关系由表 1.4 确定。

表 1.4　蕴涵联结词之真值表

P	Q	$P \rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

$P \rightarrow Q$ 所表示的逻辑关系是：P 是 Q 的充分条件，或者说 Q 是 P 的必要条件，即"有之必然"。在日常语言中，"只要 P 就 Q"，"如果 P 必然 Q" 等，可以写成 $P \rightarrow Q$ 的形式。

值得注意的是，在数理逻辑中，P 蕴涵 Q 是一种复合命题的形式。在某种意义上，这种处理方式与日常的习惯是有一定差异的。

首先，在日常语言中所说的"如果 P 则 Q"，总是关心在 P 成立的前提下的情况，而对于 P 不成立时，则往往认为该命题已失去意义。例如，小张对小李说："如果我去图书馆，就帮你借一本《数理逻辑》。" 事实上，小张并没有去图书馆，所以小张的这句话也就没有什么意义了。但我们并不因此而认为小张失信。尽管习惯上认为小张这句话等于没说，但按照数理逻辑的观点，小张仍然是说的"真" 话。

其次，在日常语言中说"如果 P 则 Q"，那么 P 与 Q 之间总是有着某种内在的联系。例如：

如果 $2+2=4$，则地球将停止自转。

如果贪污是合法行为，那么战争则是控制人口的有力工具。

上面两个例子看起来似乎很荒唐，然而它们都可以写成 $P \rightarrow Q$ 的形式。而且由蕴涵的定义可知前者是假命题，后者是真命题。

从上面对蕴涵词的分析，不难发现，蕴涵词的"蕴涵" 与日常所说的"蕴涵" 的意义并不完全一致。日常用语中的蕴涵前件和蕴涵后件一定是意义上有关联的两个词句，随意将两个语句用蕴涵式联系起来是无意义的。因此，人们决不会把风马牛不相关的语句用"如果 …… 则 ……" 联系起来。但是数理逻辑中一个复合命题的真假完全由其成分命题的真假所确定，而与成分命题的内容毫不相干。正因为如此，所以有时将数理逻辑中的蕴涵称为形式蕴涵或实质蕴涵。

(5) 等价联结词

等价联结词将命题 P,Q 组成新的命题"P 等价 Q"，记为 $P \leftrightarrow Q$。

符号 $\leftrightarrow$ 称为**等价联结词**，简称**等价词**。$P \leftrightarrow Q$ 称为 P 与 Q 的**等价式**，其中 P

称为等价式的**左端**，Q 称为等价式的**右端**。

$P \leftrightarrow Q$ 为真，当且仅当 P 与 Q 的真假值相同。它们的真假值关系由表 1.5 确定。

表 1.5　等价联结词之真值表

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

$P \leftrightarrow Q$ 所表示的逻辑关系是：P 与 Q 互为充分必要条件，即有之必然，无之必不然。所以，日常语言中的“当且仅当”，“除非不 …… 否则 ……”等可以写成 $P \leftrightarrow Q$ 的形式。例如，“一个三角形等边当且仅当等角”，“除非小张不打算从事计算机科学的研究，否则他就必须学好数理逻辑。”均可以用 $P \leftrightarrow Q$ 的形式来表示。

与蕴涵类似，数理逻辑中所说的等价也只是一种形式等价，而不注重成分命题在内容上的联系。

以上介绍了五个比较常用的真值联结词及用它们组成的复合命题的形式。我们关心的是这些复合命题与成分命题之间抽象的逻辑关系，即只要其成分命题的真假值一旦确定，无论其内容如何，相应的复合命题的真假值都是唯一确定的。因此，一些内容毫不相干的成分命题可以通过这些联结词组成“荒唐”的复合命题。但事实上，如果将数理逻辑应用于一个具体学科，那么诸成分命题之间总是会有联系的。正如小学算术中不可能将“$1+1=2$”实际应用于“一枝铅笔加上一座大山是两个 ××”这类荒唐的加法。

另外，可以利用联结词来区分原子命题与复合命题的概念。如果一命题中含有真值联结词，则称其为**复合命题**，否则称为**原子命题**。原子命题是命题演算中的基本单位。

最后，通过几个例子说明如何运用上述五个真值联结词将日常语言中的命题转化成数理逻辑中的形式命题。通常称这个过程为**命题符号化**。命题符号化是运用数理逻辑解决实际问题的基本出发点。

例 1.4　将下述命题符号化：

(1) 小张既聪明，又勤奋，所以他的学习成绩一直很好。

(2) 小王总是在图书馆看书，除非他病了或图书馆不开门。

(3) 小李没在图书馆看书，他要么找老师答疑去了，要么因身体不舒服先回宿舍去了。