高等学校试用教材

数学分析

（上册）

许洪范 主编

延边大学出版社

封面设计 周 波

ISBN 7-5634-1412-6

9 787563 414123 >

高等学校试用教材

数 学 分 析

（上 册）

主　编　许洪范
副主编　尹　苍　刘晓华　高淑艳
王冰杰　高秀娟　张志军

延边大学出版社

责任编辑:张玉峰

责任校对:许洪范

数学分析(上)

许洪范　主编

延边大学出版社出版发行

(吉林省延吉市公园路 105 号)

白城师范高等专科学校印刷厂印刷

开本:850×1168 毫米 1/32　　印张:10

字数:250 千字　　印数:1－1000 册

版次:2000 年 7 月第 1 版　　印次:2000 年 7 月第 1 次印刷

ISBN 7－5634－1412－6/O·63

定价:19.20 元

前　言

本书是为师范院校数学系、计算机系和物理系的学生所编写的教材。针对学生的专业需求和实际数学基础，在章节的编排和内容叙述上力求通俗、简明，使学生易于掌握数学分析的基本思想方法和运算技能。

全书分上、下册，共十六章。其中前十二章，已概括了数学分析的基本内容，为专科的必修部分。由于侧重于基础知识和基本训练，绝大多数同学不会有太大的学习困难。后四章是数学系本科生的必修内容，其中第十五章等也适用于物理专业。这些章节是对前十二章的加强和补充。

书中各节的习题都是对应于基本内容所选编的，学习过程中应主动完成。

承蒙关大伟教授审阅了本书的全部手稿、张纯彦副教授曾为本书的编写提供很多有益的建议，在此一并致谢。

编　者

2000 年 3 月

目　　录

（上　册）

第一章　函　　数

§1.1　函数的概念

1.1.1　实数集

在算术中，我们熟悉了自然数(即正整数)和分数，以后接触到负整数、负分数.所有这些数，再把零包括在内，统称为有理数.我们知道，对任意两个有理数作加、减、乘、除(零不作除数)运算，得到的结果还是一个有理数.

有理数的一般表示形式为 $\frac{p}{q}$，其中 p 与 q 都是整数，且 $q \neq 0$. 有理数也可以写成小数的形式，结果一定是有限位小数或无限循环小数.

无理数在中学数学中已遇见过，如 $\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\ln 5$、$\sin 10°$、π 等等.无理数即是无限不循环小数.

一切有理数及无理数统称为实数.

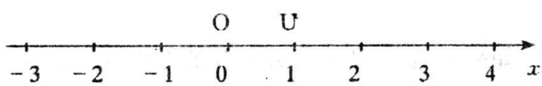

图　1-1

我们也已熟悉把实数标记在数轴上：取一直线 Ox(图 1.1)，指定某方向作为正向(通常多取向右的方向为正向)，并在 Ox 上取定一点 O 作为原点，取定一线段 $\overline{OU}$ 作为单位长度，那么任一实数都可以用数轴上的点来表示了.其实，实数和数轴上的点是一一对应的.这就是说，数轴上的每一个点表示某一个实数；反过来，每

一个实数必是数轴上某个点的坐标.

除实数外,还有复数,即形如 $a+bi$ 的数,其中 a、b 为实数,而 $i=\sqrt{-1}$ 为虚数单位.复数是实数的一种重要扩充.不过在本书中,除非特别声明,我们讲的数都是实数.

今后我们常常要谈到由若干有限个或无限个实数组成的总体,称为实数集合或简称实数集.一般用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 来表示数集.特别地,我们约定,用 Z 表示所有整数的集合,称为整数集;用 Q 表示所有有理数的集合,称为有理数集;而用 R 表示全体实数组成的集合.此外,由无限多个实数组成的集合称为无限数集,由有限多个实数组成的集合称为有限数集,只由一个实数构成的数集称为单点集,也允许数集中不含有任何数,我们称为空集,用希腊字母 Φ 表示空集.

数集 A 中的数称为 A 的元素.如果数 x 是 A 的元素,称 x 属于 A,记为 $x\in A$;如果 x 不是 A 的元素,就称 x 不属于 A,记为 $x\overline{\in}A$.例如,$0\in R$,$-\sqrt{2}\in R$,$i\overline{\in}R$.

设 A 与 B 都是数集,如果 A 中的每个元素也都是 B 的元素,称数集 A 含于数集 B,或称数集 B 包含数集 A,也称数集 A 是数集 B 的子集.记为

$$A\subset B \text{ 或 } B\supset A$$

如果既有 $A\subset B$,又有 $B\subset A$,就称数集 A 与 B 相等,记为 $A=B$.

如果 C 是数集 A 与数集 B 的所有元素构成的数集,则称 C 为 A 与 B 的并集,记为

$$C=A\bigcup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

如果 D 是由既属于 A 又属于 B 的所有元素构成的数集,则称 D 为 A 与 B 的交集,记为

$$D=A\bigcap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

设数集

$A=\{x\mid x\leqslant 2\}$,$B=\{x\mid x\geqslant 2\}$,$C=\{2\}$,

便有 $A \subset R, B \subset R, C \subset Z \subset R$, 及

$$A \cup B = R, A \cap B = C.$$

1.1.2 区间

在以后某些问题的讨论中，我们常常限制在实数集 R 的某个子集 A 内，而且 A 中的所有元素刚好是介于某两个实数之间的一切实数. 为了能够既明确又简便地表明这个数集 A，我们在下面引入区间这个概念和相应的记号.

区间是指介于某两个实数之间实数的全体，而那两个实数叫做区间的端点.

设 a 与 b 是两个实数，且 $a < b$. 满足不等式

$$a < x < b$$

的一切实数 x 的全体叫做开区间，用记号 (a, b) 表示.

满足不等式 $a \leqslant x \leqslant b$ 的一切实数 x 的全体叫做闭区间，用记号 $[a, b]$ 表示.

满足不等式 $a < x \leqslant b$ 或 $a \leqslant x < b$ 的一切实数 x 的全体叫做半开区间，用记号 $(a, b]$ 或 $[a, b)$ 表示.

在数轴上看，区间是介于某两点之间的一条线段上点的全体，这两点就是区间的端点. 两点间的距离也就是线段的长度称为区间的长度. 例如上述各区间的端点是 a 点和 b 点，区间的长度都是 $b - a$.

以后在不需要辨明所讨论区间是否包含端点的场合，我们就简单说“区间”，可以用一个大写字母(例如 I) 来表示.

除了上述区间(我们通常称为有限区间) 外，还有所谓无限区间. 我们规定下列符号的意义：

$(-\infty, +\infty)$ 表示实数的全体，有时表为 $-\infty < x < +\infty$；

$(a, +\infty)$ 表示大于 a 的实数的全体，有时表为 $a < x < +\infty$；

$(-\infty, a)$ 表示小于 a 的实数的全体，有时表为 $-\infty < x <$

a.

同样我们可以规定$[a, +\infty)$,$(-\infty, a]$ 等符号的意义.应该注意,上面引用的符号"$-\infty$"、"$+\infty$"并不是实数集中的具体的数.我们把它读成"负无穷大"、"正无穷大".

显然,任何区间都是实数集 R 的子集,且是无限子集.

1.1.3 绝对值、邻域

1. 绝对值

实数 x 的绝对值定义为

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

$|x|$的几何意义是在数轴上表示点 x 到原点的距离.根据绝对值的定义,应该有

$|a| = \sqrt{a^2}$ 和 $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$.

关系式$|x| \leqslant a$ $(a \geqslant 0)$ 与 $-a \leqslant x \leqslant a$ 是等价的.这就是说,如果$|x| \leqslant a$,则有 $-a \leqslant x \leqslant a$;反之,如果 $-a \leqslant x \leqslant a$,则有$|x| \leqslant a$.

同样,关系式$|x| < a$ 与 $-a < x < a$ 也是等价的.

关于绝对值,有下面几个常用的命题:

1°.和的绝对值不大于绝对值的和,即

$$|x+y| \leqslant |x| + |y| \tag{1}$$

它称为三角不等式;

2°.差的绝对值不小于绝对值的差,即

$$|x-y| \geqslant |x| - |y|; \tag{2}$$

3°.乘积的绝对值等于绝对值的乘积,即

$$|xy| = |x||y|; \tag{3}$$

4°.商的绝对值等于绝对值的商,即当 $y \neq 0$ 时

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}. \tag{4}$$

在此，我们仅对1°进行证明. 事实上，把不等式

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x| \text{和} -|y| \leqslant y \leqslant |y|$$

相加，得

$$-(|x|+|y|) \leqslant x+y \leqslant |x|+|y|,$$

于是

$$|x+y| \leqslant |x|+|y|.$$

2. 算术平均值——几何平均值不等式

设 $a_1, a_2, \cdots a_n$ 均为非负数，则它们的几何平均值不超过算术平均值，即

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}. \tag{5}$$

3. 邻域

设 a 与 δ 为两个实数，且 $\delta>0$，满足不等式

$$|x-a|<\delta \tag{6}$$

的一切实数 x 的全体称为点 a 的 δ 邻域，点 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径.(6) 式与不等式

$$-\delta<x-a<\delta$$

等价，进而与

$$a-\delta<x<a+\delta \tag{7}$$

等价。

由于满足不等式(7)的实数 x 构成开区间 $(a-\delta, a+\delta)$，所以点 a 的 δ 邻域也就是以点 a 为中心、长度为 2δ 的开区间.

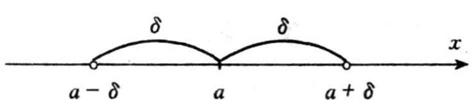

图 1-2

如果用集合的形式来表示邻域，我们记 a 点的 δ 邻域为

$$U(a, \delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$$

或简记为 $U(a)$.

此外，把集合$\{x|0<|x-a|<\delta\}$称为a点的去心δ邻域，记为

$$U^{\circ}(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}$$

或简记为$U^{\circ}(a)$.

1.1.4 常量与变量

在很多自然科学的研究过程中，我们常遇到各种不同的量.例如长度、面积、体积、重量、温度、压力、时间、速度等等.在观察和研究某一问题的全过程中，有些量始终保持着同一数值，这种量称为常量；但有许多量却有变化，也就是说，可以取不同的数值，这种量我们称为变量.

我们必须注意到上述常量与变量的概念是限定在某一特定的研究过程中的. 同一种量，在某种情况下是常量，而在另一情况下，就可能是变量. 例如，一个物体的重量在地球上的同一位置时是常量，在不同的位置就是变量. 我们通常用$a,b,c,\cdots$表示常量；用$x,y,z,t,u,\cdots$表示变量. 由于数学侧重研究的是量的数值表现，而抽去量的其它属性，上述字母表示的实际只是量的数值. 所以变量有时又叫变数，常量也称常数. 常数在数轴上用一个确定的点来表示. 变量表现在数轴上时是一个可以取不同位置的所谓动点.

1.1.5 函数的概念

在一个数学研究过程中，往往不只有一个变量，各个变量之间也不是彼此孤立的，它们互相联系、互相制约.为了研究变量之间相互制约的规律，我们引入函数的定义.

定义 **设x,y是同一研究过程中的两个变量，如果对于变量x在它的变化范围D内所取的每一个值，依据一定的规律，变量y都有唯一确定的值与之对应，我们就称变量y是变量x的函数**. 这时，变量x称为**自变量**，变量y又称**因变量**. 自变量x的