普通高等教育"十二五"规划教材　公共基础课系列
中国科学院教材建设委员会"十二五"规划教材

大学文科数学

DAXUE WENKE SHUXUE

主　编　冯光庭　谷亭亭

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材　公共基础课系列
中国科学院教材建设委员会“十二五”规划教材

大学文科数学

冯光庭　谷亭亭　主编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书结合编者多年的教学实践和研究，充分吸收国内外教学改革成果，经反复锤炼而成的.

全书内容包括微分学（包括极限与函数、导数与微分、中值定理及导数的应用）、积分学（包括不定积分、定积分及其应用）、线性代数初步、概率统计初步（概率论初步、数理统计初步）等内容，每节配有习题，每章配有单元练习题，每章之后配有问题思考与讨论、阅读与欣赏，书末附有习题参考答案.

本书可作为高等院校文科各专业教材或教学参考书，教师可根据教学对象和开设课时的不同灵活选择教学内容.

图书在版编目（CIP）数据

大学文科数学/冯光庭，谷亭亭主编.—北京：科学出版社，2011
（普通高等教育“十二五”规划教材·公共基础课系列·中国科学院教材建设委员会“十二五”规划教材）
ISBN 978-7-03-032069-8

Ⅰ.①大… Ⅱ.①冯… ②谷… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 165433 号

责任编辑：沈力匀 戴 薇 吕燕新 / 责任校对：王万红
责任印制：吕春珉 / 封面设计：东方人华平面设计部

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

百善印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 8 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2011 年 8 月第一次印刷 印张：12 1/4
印数：1—3 000 字数：291 000

定价：21.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈百善〉）
销售部电话 010-62134988 编辑部电话 010-62135235（VP04）

前　言

大学文科数学是文科类各专业本、专科学生的一门公共必修课程或选修课程. 其课程目标是：使学生了解现代基础数学的研究对象、研究方法、思维方法和一些重要成果，初步掌握现代基础数学的重要基础知识和基本技能；体会数学的科学价值、应用价值和文化价值，领会数学的思想方法和数学精神的内涵，受到数学文化的熏陶，提高数学素养.

鉴于此，本书的编写指导思想和主要特点是：

第一，注重知识背景和知识的应用，展示知识内在联系. 在编写过程中，我们尽量用学生熟悉的、非常具体的问题引出新知识，尽力展示知识的发生、发展和应用的过程，特别是数学知识与生产、生活的联系；以自然的、人本的和学生喜欢的方式展开.

第二，注重合情推理，淡化理论证明. 作为文科类专业的学生，不仅数学知识结构不完善，而且对数学课程的学习方式和思维方式都存在一些缺陷. 所以在本书的编写过程中，我们力求在不失数学严谨性的同时，体现“自然性”、“合理性”（自然地、合理地发现问题、提出问题；自然地、合理地分析问题、解决问题；自然地、合理地深化问题、拓展问题），做到语言通俗易懂、内容循序渐进、推理简捷直观，并略去一般的证明过程.

第三，注重对一些重要基础知识、基本技能的强化. 为了使学生更好地理解和掌握重要的基础知识和基本方法、形成基本技能，书中选择了较多的体现基本要求的例题和习题，在每一小节后面都配置了体现教学基本要求的习题，在每一章后面都配置了一定量的单元练习题，使学生能够受到一定的数学思维训练.

第四，注重数学文化，传播数学精神. 本书根据文科学生学习大学数学的要求及教学实际，从数学发展的历史入手，让学生在学习、理解数学知识的同时了解数学发生、发展和应用的背景，了解数学家的工作，领会数学的思想、方法和精神，感受数学文化及其价值.

第五，注重内容的弹性，并确保基本要求. 本书不仅考虑到文科类本科和专科的学习需要，也兼顾对一些数学有兴趣的学生的学习需要. 书中对一些内容进行了拓展，并注有“*”号，这些内容可供不同学时要求的专业选用和对数学有兴趣的同学阅读.

本书编写过程中参考了众多国内外相关教材和资料，选用了其中的有关内容和例题、习题，在此谨向有关编者、作者深表感谢. 此外，湖北第二师范学院鲁晓成教授和数学和数量经济学院梅汇海老师提出了许多宝贵意见；湖北第二师范学院教务处和文化产业集团对本书的编辑出版给予了大力的支持和帮助；湖北第二师范学院 08 级数学与应用数学专业的张九玲、张纺、宋昆昆、胡小英、杨会林、杜葵同学分别通读了书的第一章至第六章，并演算了相应的习题，我们在此一并表示衷心地感谢.

由于编者水平所限，错误、疏漏在所难免，敬请原谅，也欢迎专家、同行和读者批评指正，使本教材在教学实践中不断完善.

目　录

第一篇　微积分学

第二篇 线性代数初步

第三篇 概率统计初步

第一篇 微积分学

在中学数学中，我们学习过函数，并讨论了它的一些基本性质，如定义域、值域、奇偶性、单调性和周期性等；我们还学习过简单的极限及导数知识，它们是微积分的重要基础和组成部分. 所谓微积分学，它是微分学与积分学的统称，而微分学是指数学中研究导数、微分及其应用的部分；积分学是指数学中研究不定积分、定积分及其应用的部分. 它是人类思维的伟大成果之一. 正如恩格斯所评价的："在一切理论成就中，未必再有什么像 17 世纪下半叶微积分的发现那样被看作人类精神的最高胜利了. 如果在某个地方我们看到人类精神的纯粹的和唯一的功绩，那正是在这里."

17 世纪正是由中世纪向新时期过渡的时期. 资本主义开始发展，并成为与封建社会作斗争的先进力量. 精密科学从当时的生产与社会生活中获得巨大动力. 航海学引起了对天文学及光学的高度兴趣. 造船学，机器制造与建筑，堤坝及运河的修建，弹道学及一般的军事问题等，促进了力学的发展. 天文学、力学、光学以及工业技术本身，又要求当时的数学做彻底的变革.

革新的旗帜是变量，有了变量数学才能研究运动和变化，才能适应新时期科学技术对数学的新要求. 科学技术及自然科学方面提出的新问题导致了无穷小量的研究. 从而诞生了微积分这一学科.

那么，促使微积分产生的主要因素到底是什么呢？当时科学面临的主要问题又是什么呢？微积分的创立首先是为了处理下列四类问题：

(1) 已知物体运动的路程与时间的关系，求物体在任意时刻的速度和加速度. 反过来，已知物体运动的加速度与速度，求物体在任意时刻的速度与路程.

困难在于，物体实际运动中所涉及的速度和加速度每时每刻都在变化. 计算平均速度可用运动的时间去除运动的距离. 但对瞬时速度、运动的距离和时间都是 0，这就碰到了 0/0 的问题. 这是人类第一次碰到这样的问题.

(2) 求曲线的切线. 这是一个纯几何的问题，但对于科学应用具有重大意义. 例如在光学中，透镜的设计就用到曲线的切线和法线的知识. 在运动中也遇到曲线的切线问题.

运动物体在它的轨迹上任一点处的运动方向,是轨迹的切线方向.

实际上,"切线"本身的意义也是没有解决的问题.对于圆锥曲线,把切线定义为和曲线只接触一点而且位于曲线一边的直线就足够了;这个定义古希腊人已经知道.但是对于17世纪所用的比较复杂的曲线,它就不适用了.

(3) 求函数的最大值和最小值问题.在弹道学中这涉及炮弹的射程问题.在天文学中涉及行星和太阳的最近和最远距离问题.在经济学中涉及成本的最低和利润的最大问题.

(4) 求积问题.求曲线的弧长,曲线所围区域的面积,曲面所围几何体的体积,物体的重心等.这些问题在古希腊已开始研究,但他们的方法缺乏一般性.

正是这些问题和众多科学家对这些问题的探索,使得在经历了一个漫长而曲折的思想潮流——从古代的哲学思辨和数学证明引导到17世纪的极其成功的富于启发性的方法,最终在牛顿和莱布尼茨手中集其大成,迸发出新方法和新观点的发明,使数学达到一个更高的水平.

本篇将把这些成果中的部分精华(包括:第一章 极限与连续,第二章 导数与微分,第三章 中值定理及导数的应用,第四章 不定积分,第五章 定积分及其应用)呈现给大家,她们就像浩瀚数学之海边的一些"比较平滑的卵石或格外漂亮的贝壳",会使你赏心悦目.

第一章　极限与连续

在中学数学中，我们已经学习过函数及数列的极限. 为进一步学习高等数学的需要，我们还要对极限（不仅包括数列的极限，还包括函数的极限）——微积分的重要基础之一、函数——微积分研究的基本对象做一些更深入的探究. 本章主要讨论函数、极限与函数的连续性.

第一节　函　　数

函数概念是数学中最重要、最基本的概念之一. 众所周知，在现实世界中，路与路交错，人与人相逢，任何客观对象不变是相对的，变化是绝对的，静止是相对的，运动是绝对的. 函数正是客观对象之间的这种既互相联系，又互相影响、互相制约关系的抽象. 可以说，无论是我们日常生活、生产中问题的解决，还是对茫茫宇宙空间的规律的研究，变量、函数无处不在. 但是，如何严格地、准确地刻画这些变化着的、联系着的量的关系，经历了漫长的发展历史，直到公元 1837 年，德国数学家 P. G. L. 狄利克雷才提出现今通用的函数定义，使函数关系更加明确，从而推动了数学的发展和应用.

1. 函数的概念及函数关系的建立

在中学我们学习过函数，初中数学中根据我们当时的知识水平，是从变量的依赖关系的角度给出函数定义的：

设在一个变化过程中有两个变量 x 与 y，如果对于 x 的每一个值，y 都有唯一的值与它对应，那么就说 x 是自变量，y 是 x 的函数. 并且将自变量 x 取值的集合叫做函数的定义域，与自变量 x 的值对应的 y 的值叫做函数值，函数值的集合叫做函数的值域.

在高中数学中学习了映射之后，又从对应的角度给出了函数定义：

如果 A、B 都是非空的数集，那么 A 到 B 的映射 $f: A \to B$ 就叫做 A 到 B 的函数，记作 $y=f(x)$，其中 $x \in A, y \in B$. 原象的集合 A 叫做函数 $y=f(x)$ 的定义域，象的集合 $C(C \subseteq B)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的值域. 函数符号 $y=f(x)$ 表示"y 是 x 的函数"，有时简记为 $f(x)$.

虽然"对应说"（现行高中数学教材中的定义）比"变量说"（现行初中数学教材中的定义）更抽象，但它更接近于函数的本质.

对于函数的一些简单性质，如定义域、值域、单调性、奇偶性、周期性和图像，我们在中学已经讨论过，并重点研究了几类特殊函数，就不再重复. 这里仅列出我们身边的一些函数关系的例子，进一步说明建立函数关系的方法.

【实例 1-1】 你知道人们为什么要穿高跟鞋吗？你知道你应该穿多高的高跟鞋才合适吗？也许有人思考过，也许相当多的人根本没有思考过这个问题.

美是一种感觉，本应没有什么客观标准. 但在自然界里，物体形状的比例却提供了在

匀称与协调上一种美感的参考.在数学上,这个比例称之为黄金分割.

在人体躯干(由脚底至肚脐的长度)与身高的比例上,肚脐是理想的黄金分割点.换言之,若此比值越接近 0.618,越给别人有一种美的感觉.很可惜,一般人的躯干与身高比都低于此数值,大约只有 0.58 至 0.60 左右.

由此,如果一个人的身高为 a(厘米)、躯干为 b(厘米),设该人所穿高跟鞋高度为 d(厘米).于是由

$$\frac{b+d}{a+d}=0.618$$

得

$$d=\frac{309a-500b}{191}.$$

因此,当你的身高为 a(厘米)、躯干为 b(厘米)时,你所穿高跟鞋的高度为 $d=\frac{309a-500b}{191}$(厘米)时,才是最合适的.

这里 d 是 a、b 的函数,它是一个二元函数,本书主要讨论一元函数.

【实例 1-2】 作为一个公民,你知道一个公民每月应缴所得税的数额吗?

《中华人民共和国个人所得税法》规定公民全月工资、薪金所得不超过 2000 元的部分不必纳税,超过 2000 元的部分为全月应纳税所得额,此款项按表 1-1 分别累进计算.试建立收入(x 元)与应缴所得税(y 元)的函数关系.

表 1-1

级　数	全月应纳税所得额	税率/%
1	不超过 500 元的	5
2	超过 500 元至 2000 元的部分	10
3	超过 2000 元至 5000 元的部分	15
4	超过 5000 元至 20000 元的部分	20
5	超过 20000 元至 40000 元的部分	25
6	超过 40000 元至 60000 元的部分	30
7	超过 60000 元至 80000 元的部分	35
8	超过 80000 元至 100000 元的部分	40
9	超过 100000 元的部分	45

分析　当 $0<x\leqslant 2000$ 时,

$$y=0;$$

当 $2000<x\leqslant 2500$ 时,

$$y=(x-2000)\times 0.05=0.05x-100;$$

当 $2500<x\leqslant 4000$ 时,

$$y=500\times 0.05+(x-2500)\times 0.1=0.1x-225;$$

当 $4000<x\leqslant 7000$ 时,

$$y=500\times 0.05+1500\times 0.1+(x-4000)\times 0.15=0.15x-425;$$

当 $7000<x\leqslant 22000$ 时,

$$y=500\times 0.05+1500\times 0.1+3000\times 0.15+(x-7000)\times 0.2=0.2x-775;$$

当 $22000<x\leqslant 42000$ 时,

$$y=500\times 0.05+1500\times 0.1+3000\times 0.15+15000\times 0.2+(x-22000)\times 0.25=0.25x-1875;$$

当 $42000<x\leqslant 62000$ 时,

$$y=500\times 0.05+1500\times 0.1+3000\times 0.15+15000\times 0.2+20000\times 0.25+(x-42000)\times 0.3=0.3x-3975;$$

当 $62000<x\leqslant 82000$ 时,

$$y=500\times 0.05+1500\times 0.1+3000\times 0.15+15000\times 0.2+20000\times 0.25+20000\times 0.3+(x-62000)\times 0.35=0.35x-7075;$$

当 $82000<x\leqslant 102000$ 时,

$$y=500\times 0.05+1500\times 0.1+3000\times 0.15+15000\times 0.2+20000\times 0.25+20000\times 0.3+20000\times 0.35+(x-82000)\times 0.4=0.4x-11175;$$

当 $x>102000$ 时,

$$y=500\times 0.05+1500\times 0.1+3000\times 0.15+15000\times 0.2+20000\times 0.25+20000\times 0.3+20000\times 0.35+20000\times 0.4+(x-102000)\times 0.45=0.45x-16275.$$

故所求函数关系为

$$y=\begin{cases}0 & \text{当 } 0<x\leqslant 2000 \text{ 时},\\ 0.05x-100 & \text{当 } 2000<x\leqslant 2500 \text{ 时},\\ 0.1x-225 & \text{当 } 2500<x\leqslant 4000 \text{ 时},\\ 0.15x-425 & \text{当 } 4000<x\leqslant 7000 \text{ 时},\\ 0.2x-775 & \text{当 } 7000<x\leqslant 22000 \text{ 时},\\ 0.25x-1875 & \text{当 } 22000<x\leqslant 42000 \text{ 时},\\ 0.3x-3975 & \text{当 } 42000<x\leqslant 62000 \text{ 时},\\ 0.35x-7075 & \text{当 } 62000<x\leqslant 82000 \text{ 时},\\ 0.4x-11175 & \text{当 } 82000<x\leqslant 102000 \text{ 时},\\ 0.45x-16275 & \text{当 } x>102000 \text{ 时}.\end{cases}$$

2. 邻域

在以后的讨论中,经常会用到一种特殊的开区间 $(a-\delta,a+\delta)$,即点集 $\{x\mid |x-a|<\delta,x\in R\}$,称这个开区间为点 a 的 δ 邻域,记为 $U(a,\delta)$,即

$$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta),$$

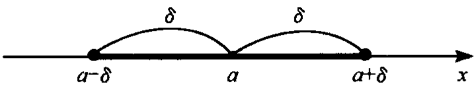

图 1-1

称点 a 为邻域的中心，δ 为邻域的半径，它在数轴上表示以 a 为中心，长度为 2δ 的对称区间，如图 1-1 所示.

有时候，我们只考虑 a 邻近的点，即考虑充分接近于 a 的点，而不考虑点 a，也就是考虑点集$\{x|a-\delta<x<a$ 且 $a<x<a+\delta\}$，我们称这个点集为点 a 的“去心邻域”，记为$\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a\text{ 且 }a<x<a+\delta\}.$$

3. 复合函数

一些客观事物，在质的方面存在着复合关系，在量的方面也存在着复合关系. 如某企业经营者每年收入 S 与该年利润 L 有关，其函数关系为 $S=0.05L$；而利润 L 又与该企业产品的产量 Q 有关，其函数关系为 $L=Q^{0.3}$. 这样就有 $S=0.05\cdot Q^{0.3}$，我们把像这种由函数套函数而得到的函数称之为复合函数.

定义 1-1 设函数 $y=f(u)$，$u\in U$，$u=\varphi(x)$，$x\in X$，且由 $x\in X$ 确定的函数值 $u=\varphi(x)$落在函数 $y=f(u)$的定义域 U 内，则 $y=f[\varphi(x)]$称为复合函数. u 称为中间变量，$u=\varphi(x)$称为里层函数，$y=f(u)$称为外层函数.

【实例 1-3】 设 $f(u)=\sqrt{2u+2}$，$u\in[-1,\infty)$，$g(x)=3-x^2$，$x\in(-\infty,+\infty)$. 则有

$$f[g(x)]=\sqrt{2g(x)+2}=\sqrt{8-2x^2}.$$

其定义域为$[-2,2]$.

在解决实际问题时，经常要将一个复杂的问题分解成若干个简单的问题来处理；在微积分的讨论中，也经常要对一个复杂的函数进行分解，就是要考虑某个函数是由哪些简单的函数复合而成，这叫做复合函数的分解. 合理的分解，在微积分中有着十分重要的意义. 分解的一般步骤是从外到内.

【例 1-1】 分解复合函数

$$F(x)=\log_3\arcsin\sqrt{1-x^2}.$$

解 $y=\log_3 u$，$u=\arcsin v$，$v=\sqrt{t}$，$t=1-x^2$.

4. 初等函数

对一般函数的研究，关键在于找到它与一些“简单函数”的关系，那么什么是“简单函数”呢？在中学数学中，我们学习过正比例函数、反比例函数、一次函数、二次函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角和反三角函数，这些都是最基本、最简单的函数. 为此，我们把常值函数 $y=C$（C 为常数），幂函数 $y=x^a$，指数函数 $y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$），对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq1$），三角函数 $y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=\tan x$、$y=\cot x$ 和反三角函数 $y=\arcsin x$、$y=\arccos x$、$y=\arctan x$、$y=\operatorname{arccot} x$ 统称为基本初等函数；我们把由基本初等函数经过有限次四则运算与有限次复合运算而得到的由一个式子表示的函数叫做初等函数，否则就是非初等函数.

如，$y=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$，$y=\arccos(x+1)-\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$，$y=e^{-x^2}-x^x$ 等，都是初等函数；而 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$ 不是初等函数.

习题 1.1

1. 试找出现实生活中 1～2 个存在函数关系的例子.
2. 设 $f(x)=x^2$，$g(x)=e^x$，求 $f[g(x)]$和 $g[f(x)]$.
3. 分解下列复合函数.

(1) $y=\sqrt{\lg(x^2+1)}$；　　(2) $y=2^{\cos(x^2-1)}$.

4. 请求出你所在城市出租车资费 y(单位:元)与里程 x(单位:公里)的函数关系?
5. 某工厂生产某种产品，年产量为 x，每台售价 250 元，当年产量为 600 台以内时，可以全部售出；当年产量超过 600 台时，经广告宣传又可再多售出 200 台，但所售出的每台平均广告费 20 元；生产再多，本年就售不出去了. 试建立本年度总收入 R 与年产量 x 的函数关系.

第二节　极　　限

极限是微积分中最基本的概念之一，用以描述变量在一定的变化过程中的终极状态，既是实现近似到精确、量变到质变的工具和手段，又是解决实际问题和数学问题的重要数学思想方法. 19 世纪以前，人们就用朴素的极限思想计算了圆的面积等. 如公元 3 世纪的中国数学家刘徽所创割圆术，从圆内接正六边形出发割圆，得到圆内接正 6×2^n 边形序列，并指出割得越细，正多边形与圆面积之差越小，"割之又割，以至于不可割，则与圆合体，而无所失矣."19 世纪之后，柯西以物体运动为背景，结合几何直观，引入了极限概念. 后来，维尔斯特拉斯给出了形式化的数学语言描述. 极限概念的创立，是微积分严格化的关键. 它奠定了微积分学的基础.

一、数列的极限

在中学数学中，我们已经学习过数列，即以正整数为自变量的函数$y=f(n)$，当 n 依次取 1,2,3,…时所得到的一列函数值

$$a_1=f(1),\quad a_2=f(2),\quad a_3=f(3),\quad \cdots,\quad a_n=f(n),\cdots$$

称为无穷数列，简称数列. 数列中的各个数称为数列的项，$a_n=f(n)$称为数列的通项，一般把数列记为$\{a_n\}$.

先观察如下的各数列:(其中 $n\in N_+$)

(1) $1,2,3,4,\cdots,n,\cdots$

(2) $1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n-1},\cdots$

(3) $1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},\cdots,\dfrac{1}{n},\cdots$

(4) $-1\frac{1}{2},-1\frac{1}{4},-1\frac{1}{8},-1\frac{1}{16},\cdots,-1-\frac{1}{2^n},\cdots$

(5) $1,2\frac{1}{2},1\frac{2}{3},2\frac{1}{4},\cdots,2+\frac{(-1)^n}{n},\cdots$

并分别画出上述各数列的图像(图 1-2～图 1-6).

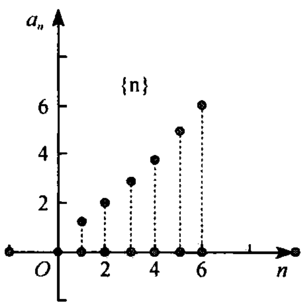

图 1-2

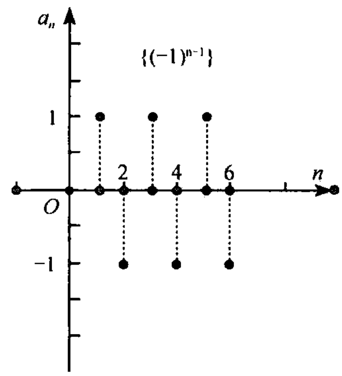

图 1-3

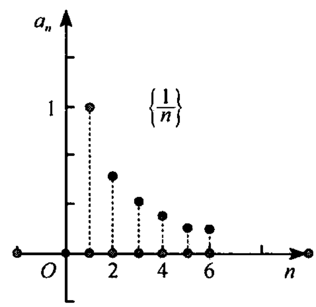

图 1-4

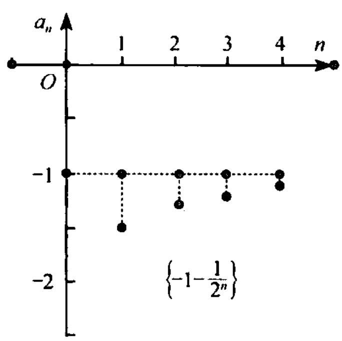

图 1-5

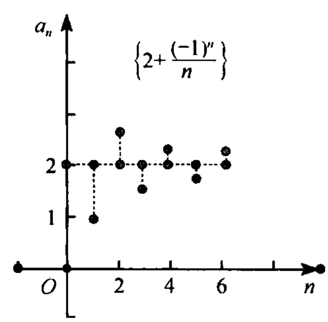

图 1-6

观察发现：

数列(1)各项的点越来越向上远离 x 轴而去；数列(2)各项的点总是在 x 轴上下摆动.

数列(3)、(4)、(5)各项的点分别越来越靠近于一条直线，即三个数列中的项 a_n 分别越来越接近于常数 0，-1，2.

数列(3)、(4)、(5)的共同特征：随着项数 n 的增大 a_n 分别越来越接近于一个常数. 我们把常数 0，-1，2 分别称为数列(3)、(4)、(5)的极限，并得到

定义 1-2　对于一个无穷数列 $\{a_n\}$，如果存在一个常数 A，当项数 n 无限增大时，数列 $\{a_n\}$ 中的项 a_n 无限趋近于常数 A，就把这个常数 A 叫做数列 $\{a_n\}$ 的极限.

定义 1-1 给出的数列极限的概念，只是凭借几何直观产生的直觉并用自然语言做出的定性描述. 对变量 a_n 的变化过程(n 无限增大)，以及 a_n 的变化趋势(无限地趋近于常数 a)，都借助于形容词“无限”加以修饰. 正如诗人所描绘的“孤帆远影碧空尽，唯见长江天际流”，从文学的角度来审视，不可不谓尽善尽美，并能激起人们诗一般的想象. 但是从数学

的角度来审视，它只是一种感性的认识，而非理性地认识，它明显地带有直观的模糊性，数学家们是不认可的. 因此，科学的数学要求我们必须从量的角度进行分析，进而寻找其严格的、精确的定义.

那么，怎样用数学符号语言准确地描述‘a_n 无限趋近于 A’，即怎样用定量的方式来准确地表示‘a_n 与 A 的接近程度’呢?

——可用 $|a_n-A|$ 来表示 a_n 与 A 的接近程度. 把数列各项表示在数轴上时，量 $|a_n-A|$ 就表示这两个点之间的距离.

那么"a_n 无限趋近于常数 A"又意味着什么呢?

——$|a_n-A|$ 无限地变小，要多小就有多小.

那么，如何定量地刻画 $|a_n-A|$ 无限地变小呢?

我们可给出一个衡量标准(参照物)——任意小的正数 ε，只要 $|a_n-A|$ 比 ε 还小就可以了.

$|a_n-A|<\varepsilon$ 的成立是否一定要从第 1 项开始呢? ‘n 无限增大时’指的又是什么?

——不是的，只要能在数列中找到一项 a_N，使得这一项后面的所有项 $a_{N+1},a_{N+2},\cdots$ 均满足 $|a_n-A|<\varepsilon$ 即可. ‘都能找到自然数 N，使得当 $n>N$ 时’就是‘当项数 n 无限增大时’的量化表示.

那么‘$|a_n-A|$ 要多小就有多小’又是如何来刻画的呢?

仍有赖于 ε-N 的语言：ε 具有任意性；无论预先指定的正数 ε 多么小，总能找到 N. 这里重要的是 N 的存在性，一般说 N 是依赖于 ε 的，ε 越小 N 就越大，那个时刻(指 $|a_n-A|<\varepsilon$ 的时刻)来到的就迟一点.

就变化的全过程而言，ε 具有绝对任意性. 但就其某一瞬间而言，ε 则是固定的，即具有相对固定性. ε 的绝对任意性是通过它自身无限多个相对固定性表现出来的.

由此可归纳出数列极限的精确定义，并称之为数列极限的"ε-N"定义：

定义 1-3　对于数列 $\{a_n\}$，如果存在一个常数 a，对任意给定的正数 ε(不论它多么小)，总存在正数 N，使得当 $n>N$ 时，恒有 $|a_n-a|<\varepsilon$. 称 a 是数列 $\{a_n\}$ 极限，或者称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a，记为

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a \quad \text{或} \quad a_n\to a \quad (n\to\infty).$$

如果这样的常数 a 不存在，就说数列 $\{a_n\}$ 没有极限，或者说数列 $\{a_n\}$ 是发散的，习惯上也说 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 不存在.

由以上的分析可知：

(1) 正数 ε 是刻画 a_n 与 a 接近程度的一个量，它具有二重性. 就变化的全过程而言，ε 具有绝对任意性. 但就其某一瞬间而言，ε 则是固定的，即具有相对固定性(ε 的绝对任意性是通过它自身无限多个相对固定性表现出来的).

(2) 自然数 N 的存在性决定 a_n 是否以 a 为极限. 一般地讲，ε 越小 N 越大，而且 N 不是唯一的；当 $n>N$，就是‘当项数 n 无限增大时’的量化表示.

(3) 当 $n>N$ 时，$|a_n-a|<\varepsilon$ 恒成立. 即表示从第 N 项以后的所有项都落在区间 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 之内，从而 $\{a_n\}$ 中只有有限项落在 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 之外.

定义 1-3 的精美之处就在于：把整个极限过程用不等式来刻画，进而把证明（判定）极限的问题转化为一系列不等式的推导，为微积分的严格化奠定了基础.

用数列极限的定义可以证明下列极限：

若 $p>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=0$；若 $|q|<1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$.

在以后的讨论中，我们一般直接把它们当做公式来使用.

二、函数的极限

1. 有关概念

1）自变量 x 无限趋近于有限数 x_0 的情形

类似于数列极限定义的分析，我们可以得到函数极限的定义，并称之为函数极限的"ε-δ"定义.

定义 1-4　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，A 是一个常数. 如果对于任意小的正数 ε，总存在相应的正数 δ，使得满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的一切 x 能使

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

恒成立，则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时以 A 为极限，或称函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0)$.

根据定义我们可以得到以下几点：

(1) 任意正数 ε 是刻画 $f(x)$ 与 A 接近程度的一个量，它具有二重性（就变化的全过程而言，ε 具有绝对任意性. 但就其某一瞬间而言，ε 则是固定的，即具有相对固定性）.

(2) 正数 δ 的存在性决定 $f(x)$ 是否以 A 为极限，它是由 ε 确定的. 一般地讲，ε 越小 δ 也越小，而且 δ 不是唯一的；当 $0<|x-x_0|<\delta$，就是'当 x 无限趋近于 x_0 时'的量化表示.

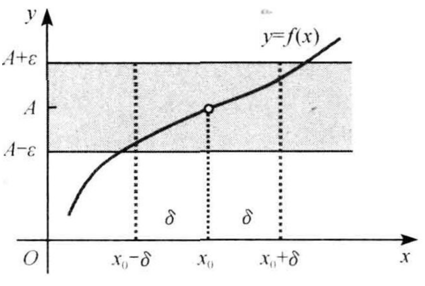

图 1-7

(3) $x\to x_0$ 的方式是任意的；极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 的存在与否，值为多少都与 $f(x)$ 在 x_0 处有无定义以及有定义时的函数值 $f(x_0)$ 无关.

(4) 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$ 恒成立. 表示只要自变量 x 落在区间 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 内，则相应的函数值 $f(x)$ 都落在区间 $(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$ 之内（图 1-7）.

相应地，我们还可以给出函数的左、右极限的概念：

(1) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左侧附近有定义，A 是一个常数. 如果对于任意小的正数 ε，总存在相应的正数 δ，使得满足 $-\delta<x-x_0<0$ 的一切 x 能使

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

恒成立，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0^-).$$

(2) 设函数 $f(x)$在点 x_0 的右侧附近有定义，A 是一个常数. 如果对于任意小的正数 ε，总存在相应的正数 δ，使得满足 $0<x-x_0<\delta$ 的一切 x 能使

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

恒成立，则称 A 为函数 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的右极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0^+).$$

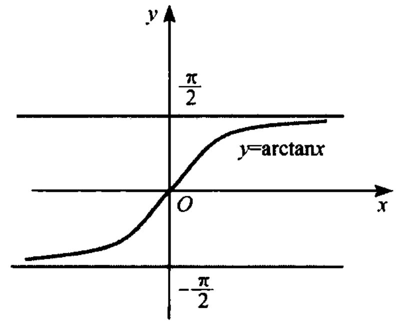

图 1-8

2) 自变量 x 的绝对值无限增大的情形

首先来分析一个熟悉的函数 $y=\arctan x$，观察图 1-8.

不难发现，当 $x\to-\infty$时，$\arctan x\to-\frac{\pi}{2}$；当 $x\to+\infty$时，$\arctan x\to\frac{\pi}{2}$. 即 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$. 由此可以给出如下定义：

定义 1-5　设 $f(x)$在形如$[a,+\infty)$的区间内有定义，A 是一个常数. 若当 x 无限趋于正无穷大($+\infty$)时，$f(x)$无限趋近于 A，则称 A 是 $f(x)$当 $x\to+\infty$时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to+\infty)$.

定义 1-6　设 $f(x)$在形如$(-\infty,b]$的区间内有定义，A 是一个常数. 若当 x 无限趋于负正无穷大($-\infty$)时，$f(x)$无限趋近于 A，则称 A 是 $f(x)$当 $x\to-\infty$时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to-\infty)$.

定义 1-7　设 $f(x)$在$(-\infty,b]\cup[a,+\infty)$内有定义，$A$ 是一个常数. 若同时有

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \text{ 和 } \lim_{x\to-\infty}f(x)=A$$

成立，则称 A 是 $f(x)$当 $x\to\infty$时的极限，记为$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to\infty)$.

上面的定义 1-4、定义 1-5 都是描述性定义，可以仿照数列极限的 ε-N 定义和函数极限的 ε-δ 定义从定量的角度给出它们的精确定义，这里略去.

【实例 1-4】　对于函数 $y=\frac{1}{x}$，有$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$(图 1-9).

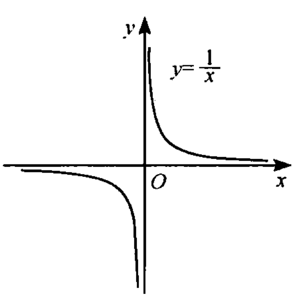

图 1-9

对于函数 $y=e^{-x^2}$，有$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x^2}=0$；

对于函数 $y=e^x$，有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$.

2. 函数极限的性质

定理 1-1　如果 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$的极限值是正(负)数，则在 x_0 的某一去心邻域内，函数值 $f(x)$也是正(负)数. 即若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0(<0)$，则存在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$，使对一切 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 恒有 $f(x)>0(<0)$.

作为对数学证明和对数学语言的欣赏，我们给出下列证明：