清华大学研究生公共课教材——数学系列

# 最优化理论与算法习题解答

陈宝林 编

清华大学出版社

清 华 大 学 研 究 生 公 共 课 教 材 —— 数 学 系 列

# 最优化理论与算法习题解答

陈宝林 编

清华大学出版社
北京

## 内 容 简 介

本书对《最优化理论与算法(第2版)》中的习题全部给出了解答.其中,计算题基本按书中给出的方法步骤完成,有利于对最优化方法的理解和掌握;证明题用到一些有关的数学知识和解题技巧,对提高数学素质及深入理解最优化理论与算法是有益的.

本书可供广大读者学习、运用和讲授运筹学时参考.



**图书在版编目(CIP)数据**

最优化理论与算法习题解答/陈宝林编.--北京:清华大学出版社,2012.5

(清华大学研究生公共课教材.数学系列)

ISBN 978-7-302-28467-3

Ⅰ.①最… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①最优化理论—研究生—题解 ②最优化算法—研究生—题解 Ⅳ.①O242.23-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第064434号

**责任编辑**:刘 颖
**封面设计**:常雪影
**责任校对**:王淑云
**责任印制**:张雪娇

**出版发行**:清华大学出版社

网 址:http://www.tup.com.cn, http://www.wqbook.com
地 址:北京清华大学学研大厦A座 邮 编:100084
社 总 机:010-62770175 邮 购:010-62786544
投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

**印 装 者**:北京国马印刷厂
**经 销**:全国新华书店
**开 本**:185mm×230mm **印 张**:14 **字 数**:305千字
**版 次**:2012年5月第1版 **印 次**:2012年5月第1次印刷
**印 数**:1~3000
**定 价**:28.00元

---

产品编号:047087-01

# 前言

FOREWORD

最优化理论与算法是用数学方法研究最优方案，因此，像一般数学分支一样，有严密的逻辑性，要想看懂不十分困难；但要深入理解，掌握精髓，融会贯通，并不容易；要提高分析问题、解决问题的能力，学以致用，就更加困难. 要想真正学好这门学科，必须重视做题. 在学习的过程中，往往遇到一种现象，一看就懂，一做就错，这正好说明做题在学习数学类课程中的重要作用. 可以说，做题是打开最优化理论之门的钥匙，是真正学懂、会用最优化理论与算法的一个重要途径.

本书出版的目的是满足教学和自学的需要，促进运筹学的学习、研究和应用. 衷心希望广大读者，在做题时严守独立思考，发挥创造性和丰富的想象力，切忌先看题解后做习题. 还要强调，这里给出的解答是一家之言，仅供参考，不作为标准答案. 倘若本书禁锢读者思路，就违背了作者初衷.

由于水平有限，错误在所难免，欢迎广大读者批评指正.

编　者

2012 年 2 月

# 目录

CONTENTS

第 1 章　引言题解 …… 1
第 2 章　线性规划的基本性质题解 …… 10
第 3 章　单纯形方法题解 …… 18
第 4 章　对偶原理及灵敏度分析题解 …… 68
第 5 章　运输问题题解 …… 91
第 7 章　最优性条件题解 …… 101
第 8 章　算法题解 …… 112
第 9 章　一维搜索题解 …… 113
第 10 章　使用导数的最优化方法题解 …… 118
第 11 章　无约束最优化的直接方法题解 …… 133
第 12 章　可行方向法题解 …… 155
第 13 章　惩罚函数法题解 …… 174
第 14 章　二次规划题解 …… 183
第 15 章　整数规划简介题解 …… 193
第 16 章　动态规划简介题解 …… 208

# 第1章

CHAPTER 1

# 引言题解

1. 用定义验证下列各集合是凸集：

(1) $S=\{(x_1,x_2)\mid x_1+2x_2\geqslant 1, x_1-x_2\geqslant 1\}$；　(2) $S=\{(x_1,x_2)\mid x_2\geqslant |x_1|\}$；

(3) $S=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2\leqslant 10\}$.

**证**　(1) 对集合 $S$ 中任意两点 $\boldsymbol{x}^{(1)}=\begin{bmatrix}x_1^{(1)}\\x_2^{(1)}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}^{(2)}=\begin{bmatrix}x_1^{(2)}\\x_2^{(2)}\end{bmatrix}$及每个数 $\lambda\in[0,1]$，有

$$\lambda\boldsymbol{x}^{(1)}+(1-\lambda)\boldsymbol{x}^{(2)}=\begin{bmatrix}\lambda x_1^{(1)}+(1-\lambda)x_1^{(2)}\\\lambda x_2^{(1)}+(1-\lambda)x_2^{(2)}\end{bmatrix}.$$

由题设，有

$$\begin{aligned}&[\lambda x_1^{(1)}+(1-\lambda)x_1^{(2)}]+2[\lambda x_2^{(1)}+(1-\lambda)x_2^{(2)}]\\=&\lambda(x_1^{(1)}+2x_2^{(1)})+(1-\lambda)(x_1^{(2)}+2x_2^{(2)})\geqslant\lambda+(1-\lambda)=1,\\&[\lambda x_1^{(1)}+(1-\lambda)x_1^{(2)}]-[\lambda x_2^{(1)}+(1-\lambda)x_2^{(2)}]\\=&\lambda(x_1^{(1)}-x_2^{(1)})+(1-\lambda)(x_1^{(2)}-x_2^{(2)})\geqslant\lambda+(1-\lambda)=1,\end{aligned}$$

因此，$\lambda\boldsymbol{x}^{(1)}+(1-\lambda)\boldsymbol{x}^{(2)}\in S$，故 $S$ 是凸集.

(2) 对集合 $S$ 中任意两点 $\boldsymbol{x}^{(1)}=\begin{bmatrix}x_1^{(1)}\\x_2^{(1)}\end{bmatrix}$和 $\boldsymbol{x}^{(2)}=\begin{bmatrix}x_1^{(2)}\\x_2^{(2)}\end{bmatrix}$及每个数 $\lambda\in[0,1]$，有

$$\lambda\boldsymbol{x}^{(1)}+(1-\lambda)\boldsymbol{x}^{(2)}=\begin{bmatrix}\lambda x_1^{(1)}+(1-\lambda)x_1^{(2)}\\\lambda x_2^{(1)}+(1-\lambda)x_2^{(2)}\end{bmatrix}.$$

由题设，有

$$\lambda x_2^{(1)}+(1-\lambda)x_2^{(2)}\geqslant\lambda\mid x_1^{(1)}\mid+(1-\lambda)\mid x_1^{(2)}\mid\geqslant\mid\lambda x_1^{(1)}+(1-\lambda)x_1^{(2)}\mid,$$

因此 $\lambda\boldsymbol{x}^{(1)}+(1-\lambda)\boldsymbol{x}^{(2)}\in S$，故 $S$ 是凸集.

(3) 对集合 $S$ 中任意两点 $\boldsymbol{x}^{(1)}=\begin{bmatrix}x_1^{(1)}\\x_2^{(1)}\end{bmatrix}$和 $\boldsymbol{x}^{(2)}=\begin{bmatrix}x_1^{(2)}\\x_2^{(2)}\end{bmatrix}$及每个数 $\lambda\in[0,1]$，有

$$\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)x^{(2)}=\begin{bmatrix}\lambda x_1^{(1)}+(1-\lambda)x_1^{(2)}\\ \lambda x_2^{(1)}+(1-\lambda)x_2^{(2)}\end{bmatrix}.$$

由题设,有

$$\begin{aligned}&[\lambda x_1^{(1)}+(1-\lambda)x_1^{(2)}]^2+[\lambda x_2^{(1)}+(1-\lambda)x_2^{(2)}]^2\\ =&\lambda^2x_1^{(1)2}+2\lambda(1-\lambda)x_1^{(1)}x_1^{(2)}+(1-\lambda)^2x_1^{(2)2}+\lambda^2x_2^{(1)2}+2\lambda(1-\lambda)x_2^{(1)}x_2^{(2)}\\ &+(1-\lambda)^2x_2^{(2)2}=\lambda^2[x_1^{(1)2}+x_2^{(1)2}]+(1-\lambda)^2[x_1^{(2)2}+x_2^{(2)2}]+\lambda(1-\lambda)[2x_1^{(1)}x_1^{(2)}\\ &+2x_2^{(1)}x_2^{(2)}]\leqslant 10\lambda^2+10(1-\lambda)^2+\lambda(1-\lambda)[x_1^{(1)2}+x_1^{(2)2}+x_2^{(1)2}+x_2^{(2)2}]\\ \leqslant& 10\lambda^2+10(1-\lambda)^2+20\lambda(1-\lambda)=10,\end{aligned}$$

因此 $\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)x^{(2)}\in S$,故 $S$ 是凸集.

**2.** 设 $C\subset\mathbb{R}^p$ 是一个凸集,$p$ 是正整数.证明下列集合 $S$ 是$\mathbb{R}^n$中的凸集:

$$S=\{x\mid x\in\mathbb{R}^n,x=A\rho,\ \rho\in C\},$$

其中 $A$ 是给定的 $n\times p$ 实矩阵.

**证** 对任意两点 $x^{(1)},x^{(2)}\in S$ 及每个数 $\lambda\in[0,1]$,根据集合 $S$ 的定义,存在$\rho_1,\rho_2\in C$,使 $x^{(1)}=A\rho_1,x^{(2)}=A\rho_2$,因此必有 $\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)x^{(2)}=\lambda A\rho_1+(1-\lambda)A\rho_2=A[\lambda\rho_1+(1-\lambda)\rho_2]$.由于 $C$ 是凸集,必有 $\lambda\rho_1+(1-\lambda)\rho_2\in C$,因此 $\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)x^{(2)}\in S$,故 $S$ 是凸集.

**3.** 证明下列集合 $S$ 是凸集:

$$S=\{x\mid x=Ay,y\geqslant 0\},$$

其中 $A$ 是 $n\times m$ 矩阵,$x\in\mathbb{R}^n,y\in\mathbb{R}^m$.

**证** 对任意的 $x^{(1)},x^{(2)}\in S$ 及每个数 $\lambda\in[0,1]$,存在 $y_1,y_2\geqslant 0$,使 $x^{(1)}=Ay_1,x^{(2)}=Ay_2$,因此有 $\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)x^{(2)}=A[\lambda y_1+(1-\lambda)y_2]$,而 $\lambda y_1+(1-\lambda)y_2\geqslant 0$,故 $\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)x^{(2)}\in S$,即 $S$ 是凸集.

**4.** 设 $S$ 是$\mathbb{R}^n$中一个非空凸集.证明对每一个整数 $k\geqslant 2$,若 $x^{(1)},x^{(2)},\cdots,x^{(k)}\in S$,则

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x^{(i)}\in S,$$

其中 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k=1(\lambda_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,k)$.

**证** 用数学归纳法.当 $k=2$ 时,由凸集的定义知上式显然成立.设 $k=m$ 时结论成立,当 $k=m+1$ 时,有

$$\sum_{i=1}^{m+1}\lambda_i x^{(i)}=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x^{(i)}+\lambda_{m+1}x^{(m+1)}=\Big(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\Big)\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i}x^{(i)}+\lambda_{m+1}x^{(m+1)},$$

其中 $\sum_{i=1}^{m+1}\lambda_i=1$.根据归纳法假设,

$$\hat{x}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i}x^{(i)}\in S.$$

由于 $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i+\lambda_{m+1}=1$，因此 $(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i)\hat{x}+\lambda_{m+1}x^{(m+1)}\in S$，即 $\sum_{i=1}^{m+1}\lambda_i x^{(i)}\in S$. 于是当 $k=m+1$ 时结论也成立. 从而得证.

**5.** 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $l\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^n$，证明下列两个系统恰有一个有解：

系统 1 $\boldsymbol{Ax}\leqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}>0$，对某些 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$.

系统 2 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}=\boldsymbol{c},\boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{0}$，对某些 $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m$ 和 $\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^l$.

**证** 由于 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 等价于

$$\begin{cases}\boldsymbol{Bx}\leqslant\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{Bx}\geqslant\boldsymbol{0}.\end{cases}$$

因此系统 1 有解，即

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\\ -\boldsymbol{B}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}>0\text{ 有解.}$$

根据 Farkas 定理，得

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\quad -\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{v}\end{bmatrix}=\boldsymbol{c},\quad \begin{bmatrix}\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{v}\end{bmatrix}\geqslant\boldsymbol{0}$$

无解. 记 $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}=\boldsymbol{z}$，即得

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}=\boldsymbol{c},\quad \boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{0}$$

无解. 反之亦然.

**6.** 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^n$，则下列两个系统恰有一个有解：

系统 1 $\boldsymbol{Ax}\leqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}>0$，对某些 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$.

系统 2 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{c},\boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{0}$，对某些 $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m$.

**证** 若系统 1 有解，即

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ -\boldsymbol{I}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}>0$$

有解，则根据 Farkas 定理，有

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\ -\boldsymbol{I})\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{u}\end{bmatrix}=\boldsymbol{c},\quad \begin{bmatrix}\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{u}\end{bmatrix}\geqslant\boldsymbol{0}$$

无解，即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{u}=\boldsymbol{c},\boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{u}\geqslant\boldsymbol{0}$ 无解，亦即

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{c},\quad \boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{0}$$

无解.

反之，若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{0}$ 有解，即

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{u}=\boldsymbol{c},\quad \boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{u}\geqslant\boldsymbol{0}$$

有解，亦即

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\ -\boldsymbol{I})\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{u}\end{bmatrix}=\boldsymbol{c},\quad \begin{bmatrix}\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{u}\end{bmatrix}\geqslant \boldsymbol{0}$$

有解. 根据 Farkas 定理,有

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ -\boldsymbol{I}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\leqslant \boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}>0$$

无解,即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leqslant \boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{x}\geqslant \boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}>0$$

无解.

**7.** 证明 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}>0$ 有解. 其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}.$$

**证** 根据 Farkas 定理,只需证明

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{c},\quad \boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{0}$$

无解. 事实上,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{c}$, 即

$$\begin{bmatrix}1 & -1\\ -2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}.$$

对此线性方程组的增广矩阵做初等行变换:

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ -2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & -1 & 5\\ 0 & 2 & -2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -5\\ 0 & 0 & 8\end{bmatrix}.$$

此线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{c}$ 的系数矩阵与增广矩阵的秩不等,因此无解,即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{c},\boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{0}$ 无解. 根据 Farkas 定理,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}>0$ 有解.

**8.** 证明下列不等式组无解:

$$\begin{cases}x_1+3x_2<0,\\ 3x_1-x_2<0,\\ 17x_1+11x_2>0.\end{cases}$$

**证** 将不等式组写作

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}<\boldsymbol{0},\quad 其中\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 3 & -1\\ -17 & -11\end{bmatrix}.$$

根据 Gordan 定理,只需证明 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$ 有解. 对系数矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 做初等行变换:

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & -17\\ 3 & -1 & -11\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 3 & -17\\ 0 & -10 & 40\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & -5\\ 0 & 1 & -4\end{bmatrix}.$$

$A^{T}y=0$ 的同解线性方程组为

$$\begin{cases} y_1 = 5y_3, \\ y_2 = 4y_3, y_3 \text{ 任意}. \end{cases}$$

显然 $A^{T}y=0, y\geqslant 0, y\neq 0$ 有解. 根据 Gordan 定理,原来的不等式组无解.

**9.** 判别下列函数是否为凸函数:

(1) $f(x_1,x_2)=x_1^2-2x_1x_2+x_2^2+x_1+x_2$;

(2) $f(x_1,x_2)=x_1^2-4x_1x_2+x_2^2+x_1+x_2$;

(3) $f(x_1,x_2)=(x_1-x_2)^2+4x_1x_2+e^{x_1+x_2}$;

(4) $f(x_1,x_2)=x_1e^{-(x_1+x_2)}$;

(5) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+2x_1^2+x_2^2+2x_3^2-6x_1x_3$.

**解** (1) $\nabla^2 f(x)=\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$为半正定矩阵,故 $f(x_1,x_2)$是凸函数.

(2) $\nabla^2 f(x)=\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$为不定矩阵,故 $f(x_1,x_2)$不是凸函数.

(3) $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}=2(x_1-x_2)+4x_2+e^{x_1+x_2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}=-2(x_1-x_2)+4x_1+e^{x_1+x_2}$,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}=2+e^{x_1+x_2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}=2+e^{x_1+x_2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}=2+e^{x_1+x_2}$,

因此 Hesse 矩阵

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 2+e^{x_1+x_2} & 2+e^{x_1+x_2} \\ 2+e^{x_1+x_2} & 2+e^{x_1+x_2} \end{bmatrix} = (2+e^{x_1+x_2})\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

为半正定矩阵,因此 $f(x)$是凸函数.

(4) $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}=e^{-(x_1+x_2)}-x_1e^{-(x_1+x_2)}=(1-x_1)e^{-(x_1+x_2)}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}=-x_1e^{-(x_1+x_2)}$,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = (x_1-2)e^{-(x_1+x_2)}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1} = (x_1-1)e^{-(x_1+x_2)}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = x_1e^{-(x_1+x_2)}$,

于是 Hesse 矩阵

$$\nabla^2 f(x) = e^{-(x_1+x_2)}\begin{bmatrix} x_1-2 & x_1-1 \\ x_1-1 & x_1 \end{bmatrix}$$

为不定矩阵,故 $f(x)$不是凸函数.

(5) $f(x)$的 Hesse 矩阵为

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & 0 \\ -6 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

做合同变换:

$$\begin{bmatrix}4 & 1 & -6\\ 1 & 2 & 0\\ -6 & 0 & 4\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{3}{2}\\ 0 & \frac{3}{2} & -5\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 7 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{44}{7}\end{bmatrix}.$$

由此可得$\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$为不定矩阵，因此 $f(\boldsymbol{x})$不是凸函数.

**10.** 设 $f(x_1,x_2)=10-2(x_2-x_1^2)^2$,

$$S=\{(x_1,x_2)\mid -11\leqslant x_1\leqslant 1,-1\leqslant x_2\leqslant 1\},$$

$f(x_1,x_2)$是否为 $S$ 上的凸函数?

**解** $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}=8x_1(x_2-x_1^2)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}=-4(x_2-x_1^2)$,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}=8(x_2-3x_1^2)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}=8x_1$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}=-4$,

函数 $f(x_1,x_2)$的 Hesse 矩阵为

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}8(x_2-3x_1^2) & 8x_1\\ 8x_1 & -4\end{bmatrix}.$$

易知$\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$在集合 $S$ 上不是半正定矩阵，如在点(0,1)处的 Hesse 矩阵是$\begin{bmatrix}8 & 0\\ 0 & -4\end{bmatrix}$，是不定矩阵. 因此 $f(x_1,x_2)$不是 $S$ 上的凸函数.

**11.** 证明 $f(\boldsymbol{x})=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ 为严格凸函数的充要条件是 Hesse 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定.

**证** 先证必要性. 设 $f(\boldsymbol{x})=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ 是严格凸函数. 根据定理 1.4.14，对任意非零向量 $\boldsymbol{x}$ 及$\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{0}$，必有

$$f(\boldsymbol{x})>f(\boldsymbol{0})+\nabla f(\boldsymbol{0})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}. \tag{1}$$

将 $f(\boldsymbol{x})$在$\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{0}$ 处展开，有

$$f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{0})+\nabla f(\boldsymbol{0})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(\boldsymbol{0})\boldsymbol{x}+o(\|\boldsymbol{x}\|^2). \tag{2}$$

由(1)式和(2)式知

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(\boldsymbol{0})\boldsymbol{x}+o(\|\boldsymbol{x}\|^2)>0.$$

由于 $f(\boldsymbol{x})$是二次凸函数，$\nabla^2 f(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{A}$，$o(\|\boldsymbol{x}\|^2)=0$，因此 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$，即 $\boldsymbol{A}$ 正定.

再证充分性. 设 $\boldsymbol{A}$ 正定，对任意两个不同点 $\boldsymbol{x}$ 和$\bar{\boldsymbol{x}}$，根据中值定理，有

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{x})&=f(\bar{\boldsymbol{x}})+\nabla f(\bar{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(\hat{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})\\ &=f(\bar{\boldsymbol{x}})+\nabla f(\bar{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})\end{aligned}$$

$$> f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^{\mathrm{T}}(x - \bar{x}).$$

根据定理 1.4.14，$f(x)=\dfrac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Ax+b^{\mathrm{T}}x$ 是严格凸函数.

**12.** 设 $f$ 是定义在$\mathbb{R}^n$上的凸函数，$x^{(1)},x^{(2)},\cdots,x^{(k)}$是$\mathbb{R}^n$中的点，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 是非负数，且满足 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k=1$，证明：

$$f(\lambda_1 x^{(1)}+\lambda_2 x^{(2)}+\cdots+\lambda_k x^{(k)}) \leqslant \lambda_1 f(x^{(1)})+\lambda_2 f(x^{(2)})+\cdots+\lambda_k f(x^{(k)}).$$

**证** 用数学归纳法. 当 $k=2$ 时，根据凸函数的定义，必有

$$f(\lambda_1 x^{(1)}+\lambda_2 x^{(2)}) \leqslant \lambda_1 f(x^{(1)})+\lambda_2 f(x^{(2)}).$$

设 $k=m$ 时不等式成立. 当 $k=m+1$ 时，有

$$\begin{aligned}&f(\lambda_1 x^{(1)}+\lambda_2 x^{(2)}+\cdots+\lambda_m x^{(m)}+\lambda_{m+1}x^{(m+1)})\\ &= f\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left(\frac{\lambda_1}{\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i}x^{(1)}+\frac{\lambda_2}{\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i}x^{(2)}+\cdots+\frac{\lambda_m}{\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i}x^{(m)}\right)+\lambda_{m+1}x^{(m+1)}\right).\end{aligned}$$

记

$$\hat{x}=\frac{\lambda_1}{\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i}x^{(1)}+\frac{\lambda_2}{\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i}x^{(2)}+\cdots+\frac{\lambda_m}{\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i}x^{(m)}.$$

由于 $f(x)$ 是凸函数，$\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i+\lambda_{m+1}=1,\lambda_i\geqslant 0$，根据凸函数定义，有

$$f\left(\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\right)\hat{x}+\lambda_{m+1}x^{(m+1)}\right)\leqslant\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\right)f(\hat{x})+\lambda_{m+1}f(x^{(m+1)}).$$

根据归纳法假设，有

$$f(\hat{x})\leqslant\frac{\lambda_1}{\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i}f(x^{(1)})+\frac{\lambda_2}{\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i}f(x^{(2)})+\cdots+\frac{\lambda_m}{\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i}f(x^{(m)}).$$

代入上式，则有

$$f(\lambda_1 x^{(1)}+\lambda_2 x^{(2)}+\cdots+\lambda_{m+1}x^{(m+1)})\leqslant\lambda_1 f(x^{(1)})+\lambda_2 f(x^{(2)})+\cdots+\lambda_{m+1}f(x^{(m+1)}),$$

即 $k=m+1$ 时，不等式也成立. 从而得证.

**13.** 设 $f$ 是$\mathbb{R}^n$上的凸函数，证明：如果 $f$ 在某点 $x\in\mathbb{R}^n$处具有全局极大值，则对一切点 $x\in\mathbb{R}^n$，$f(x)$为常数.

**证** 用反证法. 设 $f(x)$在点$\bar{x}$处具有全局极大值，且在点 $x^{(1)}$处有 $f(x^{(1)})<f(\bar{x})$. 在过点 $x^{(1)}$和$\bar{x}$的直线上任取一点 $x^{(2)}$，使得

$$\bar{x}=\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)x^{(2)},\quad \lambda\in(0,1).$$

分两种情形讨论：

(1) 若 $f(x^{(2)})\leqslant f(x^{(1)})$，由于 $f(x)$是凸函数，必有

$$f(\bar{x})=f(\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)x^{(2)})$$

$$\leqslant \lambda f(\boldsymbol{x}^{(1)}) + (1-\lambda) f(\boldsymbol{x}^{(2)})$$
$$\leqslant \lambda f(\boldsymbol{x}^{(1)}) + (1-\lambda) f(\boldsymbol{x}^{(1)}) = f(\boldsymbol{x}^{(1)}),\text{矛盾}.$$

(2) 若 $f(\boldsymbol{x}^{(2)}) > f(\boldsymbol{x}^{(1)})$，由于 $f(\boldsymbol{x})$ 是凸函数，必有

$$\begin{aligned} f(\bar{\boldsymbol{x}}) &= f(\lambda \boldsymbol{x}^{(1)} + (1-\lambda)\boldsymbol{x}^{(2)}) \\ &\leqslant \lambda f(\boldsymbol{x}^{(1)}) + (1-\lambda) f(\boldsymbol{x}^{(2)}) \\ &< \lambda f(\boldsymbol{x}^{(2)}) + (1-\lambda) f(\boldsymbol{x}^{(2)}) = f(\boldsymbol{x}^{(2)}),\text{矛盾}. \end{aligned}$$

综上，$f(\boldsymbol{x})$ 必为常数.

**14.** 设 $f$ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数，如果对每一点 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 及正数 $t$ 均有 $f(t\boldsymbol{x}) = tf(\boldsymbol{x})$，则称 $f$ 为**正齐次函数**. 证明 $\mathbb{R}^n$ 上的正齐次函数 $f$ 为凸函数的充要条件是，对任何 $\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)} \in \mathbb{R}^n$，有

$$f(\boldsymbol{x}^{(1)} + \boldsymbol{x}^{(2)}) \leqslant f(\boldsymbol{x}^{(1)}) + f(\boldsymbol{x}^{(2)}).$$

**证** 先证必要性. 设正齐次函数 $f(\boldsymbol{x})$ 是凸函数，则对任意两点 $\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)} \in \mathbb{R}^n$，必有

$$f\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{(1)} + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{(2)}\right) \leqslant \frac{1}{2} f(\boldsymbol{x}^{(1)}) + \frac{1}{2} f(\boldsymbol{x}^{(2)}).$$

由于 $f(\boldsymbol{x})$ 是正齐次函数，有

$$f\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{(1)} + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{(2)}\right) = \frac{1}{2} f(\boldsymbol{x}^{(1)} + \boldsymbol{x}^{(2)}).$$

代入前式得

$$\frac{1}{2} f(\boldsymbol{x}^{(1)} + \boldsymbol{x}^{(2)}) \leqslant \frac{1}{2} f(\boldsymbol{x}^{(1)}) + \frac{1}{2} f(\boldsymbol{x}^{(2)}),$$

即

$$f(\boldsymbol{x}^{(1)} + \boldsymbol{x}^{(2)}) \leqslant f(\boldsymbol{x}^{(1)}) + f(\boldsymbol{x}^{(2)}).$$

再证充分性. 设正齐次函数 $f(\boldsymbol{x})$ 对任意的 $\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)} \in \mathbb{R}^n$ 满足

$$f(\boldsymbol{x}^{(1)} + \boldsymbol{x}^{(2)}) \leqslant f(\boldsymbol{x}^{(1)}) + f(\boldsymbol{x}^{(2)}),$$

则对任意的 $\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)} \in \mathbb{R}^n$ 及每个数 $\lambda \in (0,1)$，必有

$$f(\lambda \boldsymbol{x}^{(1)} + (1-\lambda)\boldsymbol{x}^{(2)}) \leqslant f(\lambda \boldsymbol{x}^{(1)}) + f((1-\lambda)\boldsymbol{x}^{(2)}) = \lambda f(\boldsymbol{x}^{(1)}) + (1-\lambda) f(\boldsymbol{x}^{(2)}).$$

因此 $f(\boldsymbol{x})$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的凸函数.

**15.** 设 $S$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中非空凸集，$f$ 是定义在 $S$ 上的实函数. 若对任意的 $\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)} \in S$ 及每一个数 $\lambda \in (0,1)$，均有

$$f(\lambda \boldsymbol{x}^{(1)} + (1-\lambda)\boldsymbol{x}^{(2)}) \leqslant \max\{f(\boldsymbol{x}^{(1)}), f(\boldsymbol{x}^{(2)})\},$$

则称 $f$ 为**拟凸函数**.

试证明：若 $f(\boldsymbol{x})$ 是凸集 $S$ 上的拟凸函数，$\bar{\boldsymbol{x}}$ 是 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $S$ 上的严格局部极小点，则 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 也是 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $S$ 上的严格全局极小点.

**证** 用反证法. 设 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是严格局部极小点，即存在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 的 $\delta$ 邻域 $N_\delta(\bar{\boldsymbol{x}})$，对于每个 $\boldsymbol{x} \in S \cap N_\delta(\bar{\boldsymbol{x}})$ 且 $\boldsymbol{x} \neq \bar{\boldsymbol{x}}$，有 $f(\boldsymbol{x}) > f(\bar{\boldsymbol{x}})$，但 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 不是严格全局极小点，即存在点 $\hat{\boldsymbol{x}} \in S, \hat{\boldsymbol{x}} \neq \bar{\boldsymbol{x}}$，使得

$$f(\hat{x}) \leqslant f(\bar{x}).$$

由于 $f(x)$ 是凸集 $S$ 上的拟凸函数，对每个 $\lambda \in (0,1)$ 有

$$f(\lambda \hat{x} + (1-\lambda) \bar{x}) \leqslant f(\bar{x}).$$

对充分小的 $\lambda$，$\lambda \hat{x}+(1-\lambda)\bar{x} \in S \cap N_\delta(\bar{x})$，这与 $\bar{x}$ 是严格局部极小点相矛盾. 因此，$\bar{x}$ 也是严格全局极小点.

**16.** 设 $S$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个非空开凸集，$f$ 是定义在 $S$ 上的可微实函数. 如果对任意两点 $x^{(1)}$，$x^{(2)} \in S$，有 $(x^{(1)}-x^{(2)})^{\mathrm{T}} \nabla f(x^{(2)}) \geqslant 0$ 蕴含 $f(x^{(1)}) \geqslant f(x^{(2)})$，则称 $f(x)$ 是**伪凸函数**.

试证明：若 $f(x)$ 是开凸集 $S$ 上的伪凸函数，且对某个 $\bar{x} \in S$ 有 $\nabla f(\bar{x}) = \mathbf{0}$，则 $\bar{x}$ 是 $f(x)$ 在 $S$ 上的全局极小点.

**证** 设存在 $\bar{x} \in S$ 使得 $\nabla f(\bar{x}) = \mathbf{0}$. 由于 $f(x)$ 是开凸集 $S$ 上的伪凸函数，按伪凸函数的定义，对任意的 $x \in S$，$(x-\bar{x})^{\mathrm{T}} \nabla f(\bar{x}) = 0$ 蕴含 $f(x) \geqslant f(\bar{x})$，因此 $\bar{x}$ 是 $f(x)$ 在 $S$ 上的全局极小点.

# 第2章

CHAPTER 2

# 线性规划的基本性质题解

**1. 用图解法解下列线性规划问题：**

(1) $\min \quad 5x_1-6x_2$

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad & x_1+2x_2\leqslant 10, \\ & 2x_1-x_2\leqslant 5, \\ & x_1-4x_2\leqslant 4, \\ & x_1,x_2\geqslant 0. \end{aligned}$$

(2) $\min \quad -x_1+x_2$

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad & 3x_1-7x_2\geqslant 8, \\ & x_1-x_2\leqslant 5, \\ & x_1,x_2\geqslant 0. \end{aligned}$$

(3) $\min \quad 13x_1+5x_2$

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad & 7x_1+3x_2\geqslant 19, \\ & 10x_1+2x_2\leqslant 11, \\ & x_1,x_2\geqslant 0. \end{aligned}$$

(4) $\max \quad -20x_1+10x_2$

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad & x_1+x_2\geqslant 10, \\ & -10x_1+x_2\leqslant 10, \\ & -5x_1+5x_2\leqslant 25, \\ & x_1+4x_2\geqslant 20, \\ & x_1,x_2\geqslant 0. \end{aligned}$$

(5) $\min \quad -3x_1-2x_2$

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad & 3x_1+2x_2\leqslant 6, \\ & x_1-2x_2\leqslant 1, \\ & x_1+x_2\geqslant 1, \\ & -x_1+2x_2\leqslant 1, \\ & x_1,x_2\geqslant 0. \end{aligned}$$

(6) $\max \quad 5x_1+4x_2$

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad & -2x_1+x_2\geqslant -4, \\ & x_1+2x_2\leqslant 6, \\ & 5x_1+3x_2\leqslant 15, \\ & x_1,x_2\geqslant 0. \end{aligned}$$

(7) $\max \quad 3x_1+x_2$

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad & x_1-x_2\geqslant 0, \\ & x_1+x_2\leqslant 5, \\ & 6x_1+2x_2\leqslant 21, \\ & x_1,x_2\geqslant 0. \end{aligned}$$

**解** 以上各题的可行域均为多边形界定的平面区域，对极小化问题沿负梯度方向移动目标函数的等值线，对极大化问题沿梯度方向移动目标函数的等值线，即可达到最优解，当最优解存在时. 下面只给出答案.

(1) 最优解 $(x_1,x_2)=(0,5)$，最优值 $f_{\min}=-30$.

(2) 最优解 $(x_1,x_2)=\left(\frac{27}{4},\frac{7}{4}\right)$，最优值 $f_{\min}=-5$.

实际上，本题最优解并不惟一，连结 $(5,0)$ 与 $\left(\frac{27}{4},\frac{7}{4}\right)$ 的线段上的点均为最优解.

(3) 可行域是空集，不存在极小点.

(4) 最优解 $(x_1,x_2)=\left(\frac{5}{2},\frac{15}{2}\right)$，最优值 $f_{\max}=25$.

(5) 最优解 $(x_1,x_2)=\left(\frac{7}{4},\frac{3}{8}\right)$，最优值 $f_{\min}=-6$.

实际上，本题最优解并不惟一，连结点 $\left(\frac{7}{4},\frac{3}{8}\right)$ 和点 $\left(\frac{5}{4},\frac{9}{8}\right)$ 的线段上的点都是最优解.

(6) 最优解 $(x_1,x_2)=\left(\frac{12}{7},\frac{15}{7}\right)$，最优值 $f_{\max}=\frac{120}{7}$.

(7) 最优解 $(x_1,x_2)=\left(\frac{11}{4},\frac{9}{4}\right)$，最优值 $f_{\max}=\frac{21}{2}$.

实际上，本题最优解并不惟一，连结点 $\left(\frac{11}{4},\frac{9}{4}\right)$ 与点 $\left(\frac{7}{2},0\right)$ 的线段上的点均为最优解.

**2.** 下列问题都存在最优解，试通过求基本可行解来确定各问题的最优解.

(1)
$$\begin{aligned}\max\quad & 2x_1+5x_2\\ \text{s.t.}\quad & x_1+2x_2+x_3=16,\\ & 2x_1+x_2+x_4=12,\\ & x_j\geqslant 0,\quad j=1,2,3,4.\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\min\quad & -2x_1+x_2+x_3+10x_4\\ \text{s.t.}\quad & -x_1+x_2+x_3+x_4=20,\\ & 2x_1-x_2+2x_4=10,\\ & x_j\geqslant 0,\quad j=1,2,3,4.\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}\min\quad & x_1-x_2\\ \text{s.t.}\quad & x_1+x_2+x_3\leqslant 5,\\ & -x_1+x_2+2x_3\leqslant 6,\\ & x_1,x_2,x_3\geqslant 0.\end{aligned}$$

**解** (1) 约束系数矩阵和约束右端向量分别为

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{p}_1\quad \boldsymbol{p}_2\quad \boldsymbol{p}_3\quad \boldsymbol{p}_4]=\begin{bmatrix}1&2&1&0\\2&1&0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}16\\12\end{bmatrix}.$$

目标系数向量 $\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3,c_4)=(2,5,0,0)$.

令 $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2]=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{c}_B=(c_1,c_2)=(2,5)$，

$$x_B=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=B^{-1}b=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16\\12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{8}{3}\\ \frac{20}{3}\end{bmatrix}.$$

相应的基本可行解及目标函数值分别为 $x^{(1)}=\left(\frac{8}{3},\frac{20}{3},0,0\right)^{\mathrm T}$，$f=c_Bx_B=\frac{116}{3}$.

令 $B=[p_1\ p_3]=\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 0\end{bmatrix}$，则 $B^{-1}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$，$c_B=(c_1,c_3)=(2,0)$，

$$x_B=\begin{bmatrix}x_1\\x_3\end{bmatrix}=B^{-1}b=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16\\12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\10\end{bmatrix}.$$

相应的基本可行解及目标函数值分别为 $x^{(2)}=(6,0,10,0)^{\mathrm T}$，$f=c_Bx_B=12$.

令 $B=[p_1\ p_4]=\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{bmatrix}$，则 $B^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\-2 & 1\end{bmatrix}$，$c_B=(c_1,c_4)=(2,0)$，

$$x_B=\begin{bmatrix}x_1\\x_4\end{bmatrix}=B^{-1}b=\begin{bmatrix}1 & 0\\-2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16\\12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16\\-20\end{bmatrix};$$

令 $B=[p_2\ p_3]=\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$，则 $B^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -2\end{bmatrix}$，$c_B=(c_2,c_3)=(5,0)$，

$$x_B=\begin{bmatrix}x_2\\x_3\end{bmatrix}=B^{-1}b=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16\\12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12\\-8\end{bmatrix};$$

令 $B=[p_2\ p_4]=\begin{bmatrix}2 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}$，则 $B^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}$，$c_B=(c_2,c_4)=(5,0)$，

$$x_B=\begin{bmatrix}x_2\\x_4\end{bmatrix}=B^{-1}b=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16\\12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\4\end{bmatrix}.$$

基本可行解及相应的目标函数值分别为 $x^{(3)}=(0,8,0,4)^{\mathrm T}$，$f=c_Bx_B=40$.

令 $B=[p_3\ p_4]=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$，则 $B^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$，

$$x_B=\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}=B^{-1}b=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16\\12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16\\12\end{bmatrix},\quad c_B=(c_3,c_4)=(0,0).$$

相应的基本可行解及目标函数值分别为 $x^{(4)}=(0,0,16,12)^{\mathrm T}$，$f=c_Bx_B=0$.

综上，得最优解 $\bar{x}=(0,8,0,4)^{\mathrm T}$，最优值 $f_{\max}=40$.