高等学校教材

离散数学导论

（第4版）

——学习指导与习题解析

朱怀宏　徐洁磐

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书是《离散数学导论（第4版）》（徐洁磐编著，高等教育出版社出版）一书配套的教学辅导用书。全书针对教材各章的教学重点内容对读者进行辅导，除对各章习题进行分析与解答之外，还增加了大量教材中没有的习题，并给出解答。全书包括集合论初步、关系、函数、有限集与无限集、代数系统、图论、数理逻辑、离散建模8章内容，除第八章外，其余各章均由主要内容、复习重点、基本概念及注意事项、典型例题详细分析、相关教材中的习题及解答、另增配套习题及解答等部分组成。

本书除可与《离散数学导论（第4版）》配套使用之外，还可独立作为离散数学课程的教学参考书，供高等学校计算机及相关专业的学生使用。

图书在版编目（CIP）数据

离散数学导论：第4版：学习指导与习题解析/朱怀宏，徐洁磐编著．--北京：高等教育出版社，2012.6

ISBN 978-7-04-035050-0

Ⅰ．①离… Ⅱ．①朱…②徐… Ⅲ．①离散数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ．①O158

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第088038号

策划编辑 刘 艳　责任编辑 刘 艳　封面设计 李卫青　版式设计 余 杨
责任校对 胡美萍　责任印制 刘思涵

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社 址	北京市西城区德外大街4号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印 刷	煤炭工业出版社印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开 本	787mm × 1092mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印 张	11.75	版 次	2012年6月第1版
字 数	280千字	印 次	2012年6月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	17.80元

物 料 号 35050-00

前　言

离散数学是计算机科学及相关信息学科的基础课程之一，它培养学生的抽象思维和逻辑推理能力。

由徐洁磐先生编著，高等教育出版社出版的《离散数学导论》一书自1982年出版以来，每年均有较大的发行量，受到普遍欢迎，至今已多次修订再版。在2011年出版的第4版教材中，除了对原有内容进行增、删外，还在各章和各篇之后增加了适量习题。多年来，广大读者普遍要求出版一本配套复习、巩固用的习题集（特别是第4版增加篇幅和习题后要求更加强烈），这也是编写本书的初衷。

离散数学课程的学习有其特殊性，其内容多、题目解法种类多，所学的知识点等均必须通过大量解题去巩固。鉴于上述情况，经过较长时间的酝酿，现根据《离散数学导论》第4版教材（本书中简称“教材”），配套出版本学习指导与习题解析，按教材各章节主要内容进行辅导及解题，同时又另外增加了大量教材中没有的习题，并全部给出解答。全书包含教材中近300道大题及新增的223道大题（由于大题中包含若干小题，故实际应为1 000题左右）。全书除第八章外，其余各章均由以下六部分组成：

(1) 主要内容；

(2) 复习重点；

(3) 基本概念及注意事项；

(4) 典型例题详细分析（每题均有分析和解答）；

(5) 相关教材中的习题及解答；

(6) 另增配套习题及解答。

教材中的绝大部分习题均包含在上述(4)、(5)部分中，另外还在(4)、(6)部分中补充了教材中未列入的大量习题及解答。书中习题按各部分分别编号，而将教材中的习题编号放入随后的括号中。例如，“1.(4.1)”表示书中某部分编号为第1题的习题对应教材中第四章的第1题，即第4.1题；而“51.(3P-22)”表示书中某部分编号为第51题的习题对应教材第三篇总复习题中的第22题。

本书是《离散数学导论》的配套用书，也可以作为一般学习、复习离散数学课程的习题解答用书，供高等学校计算机及相关专业的学生使用。

本书凝聚了作者及南京大学离散数学教研小组多年来的教学经验与辛勤劳动，希望本书的出版对学习离散数学的广大读者有所帮助。对于书中的不足之处，恳请广大读者批评指正。

作 者

2012 年 2 月

目　　录

第一章　集合论初步

1.1　主要内容

1. 集合的基本概念.
2. 集合运算.

1.2　复习重点

1. 了解集合论的基本思想与基本运算规则.
2. 了解各种不同的集合,如空集$\varnothing$、全集 E、幂集 $\rho(A)$等.

1.3　基本概念及注意事项

1. 集合:一些研究对象的全体.
2. 元素:组成集合的对象.
3. 集合与元素间的关系:$a \in A, a \notin A$.
4. 集合间的比较关系:$A=B, A \neq B, A \subset B, A \supset B, A \subseteq B, A \supseteq B$.
5. 集合的子集:集合 A 中的元素都是集合 B 中的元素,则称 A 是 B 的子集,记以 $A \subseteq B$.
6. 3 种不同的子集如下.

(1) 子集:$A \subseteq B$;

(2) 真子集:$A \subset B$;

(3) 集合相等:$A=B$.

7. 3 种特殊的集合如下.

(1) 空集:没有元素的集合$\varnothing$;

(2) 全集:包含所有被考虑范围中元素的集合 E;

(3) 幂集:以集合 A 的所有子集作为元素构成的集合 $\rho(A)$.

8. 集合的 4 种表示法如下.

(1) 枚举法,即将集合中的元素一一列出;

(2) 特性刻画法,即用元素的性质刻画集合;

(3) 图示法,即用文氏图表示集合及集合间的关系;

(4) 运算法，即用已知集合的运算构造新的集合.

9. 集合的 6 种运算如下.

(1) 交运算：$A\cap B$；

(2) 并运算：$A\cup B$；

(3) 差运算：$A-B$；

(4) 补运算：$\sim A$；

(5) 对称差运算：$A+B$；

(6) 笛卡儿积：$A\times B$.

10. 集合运算的 21 个公式如下.

交换律：

$$A\cup B=B\cup A$$
$$A\cap B=B\cap A$$

结合律：

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$$
$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$$

分配律：

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$
$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

同一律：

$$A\cup\varnothing=A$$
$$A\cap E=A$$

零一律：

$$A\cup E=E$$
$$A\cap\varnothing=\varnothing$$

互补律：

$$A\cup\sim A=E$$
$$A\cap\sim A=\varnothing$$
$$\sim E=\varnothing$$
$$\sim\varnothing=E$$

双补律：

$$\sim(\sim A)=A$$

幂等律：

$$A\cup A=A$$
$$A\cap A=A$$

吸收律：

$$A\cup(A\cap B)=A$$
$$A\cap(A\cup B)=A$$

德摩根律：

$$\sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B$$
$$\sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B$$

1.4 典型例题详细分析

1. (1.4)求下列集合的幂集.

(1) $\{a,\{a\}\}$;

(2) $\{\varnothing,a,\{a\}\}$;

(3) $\{1,2,3,4\}$.

分析：要求集合 A 的幂集 $\rho(A)$，就是要先找出集合 A 的所有子集，然后以各子集为元素而形成的新的集合即是幂集 $\rho(A)$. 如果 A 有 n 个元素. 则 $\rho(A)$ 有 2^n 个元素，其中必含元素 $\varnothing$ 和 A. 对于(1)，有 2 个元素(a 和 $\{a\}$)，故其幂集应该有 4 个元素；对于(2)，有 3 个元素($\varnothing,a,\{a\}$)，故其幂集应该有 8 个元素；对于(3)，有 4 个元素(1,2,3,4)，故其幂集应该有 16 个元素.

解：(1) 其幂集为 $\{\varnothing,\{a\},\{\{a\}\},\{a,\{a\}\}\}$;

(2) 其幂集为 $\{\varnothing,\{\varnothing\},\{a\},\{\{a\}\},\{\varnothing,a\},\{\varnothing,\{a\}\},\{a,\{a\}\},\{\varnothing,a,\{a\}\}\}$;

(3) 其幂集为 $\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}\}$.

2. 对于任意集合 A,B,C，指出下列正确的是哪一个.

(1) 若 $A\in B,B\subseteq C$，则 $A\in C$;

(2) 若 $A\in B,B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$;

(3) 若 $A\subseteq B,B\in C$，则 $A\in C$;

(4) 若 $A\subseteq B,B\in C$，则 $A\subseteq C$.

分析：(1)是正确的，因为 $B\subseteq C$，所以集合 B 中的每个元素均是集合 C 中的元素，由 $A\in B$ 可得 A 是 B 中的一个元素(集合中的元素也可以是一个集合)，因此 A 也是 C 中的一个元素，故 $A\in C$.

(2) 是错误的，可举反例说明有结论不成立的情况. 设 $A=\{a\},B=\{\{a\},b_1,b_2\},C=\{\{a\},b_1,b_2,c_1\}$，此时 $A\in B,B\subseteq C$，但 $A\not\subseteq C$，因为 $a\in A$，但 $a\notin C$(C 中只有 $\{a\}$ 元素，没有 a 元素).

(3) 是错误的，可举反例说明有结论不成立的情况. 设 $A=\{a\},B=\{a,b\},C=\{\{a,b\},c_1,c_2\}$，此时有 $A\subseteq B,B\in C$，但 $A\notin C$，因 C 中没有元素 $\{a\}$.

(4) 是错误的，可举反例说明有结论不成立的情况. 设 $A=\{a_1,a_2\},B=\{a_1,a_2,b_1\},C=\{\{a_1,a_2,b_1\},c_1,c_2\}$，此时有 $A\subseteq B,B\in C$，但 $A\not\subseteq C$，因为集合 A 中的元素 a_1,a_2 在 C 中找不到. (2)、(3)、(4)中的结论实际上有时成立，有时不成立，因此只要找到一种不成立的例子，就能推

翻总是成立的结论.

解:本题正确的是(1).

3. 下列各式中不正确的是哪一个?

(1) $\varnothing\in\varnothing$;(2) $\varnothing\subseteq\varnothing$;(3) $\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$;(4) $\varnothing\in\{\varnothing\}$.

分析:因为任何集合都包含空集,故(2)、(3)是正确的;而(4)中右边的集合中有元素$\varnothing$,故也是正确的;因为空集中没有元素,故(1)中表示有$\varnothing$元素属于空集是错误的.

解:(1) 是不正确的.

4. 设 $A=\{\varnothing\}$,$B=\rho(\rho(A))$,问是否有:

(1) $\varnothing\in B$ 且$\varnothing\subseteq B$;

(2) $\{\varnothing\}\in B$ 且$\{\varnothing\}\subseteq B$;

(3) $\{\{\varnothing\}\}\in B$ 且$\{\{\varnothing\}\}\subseteq B$.

分析:此题先要会求幂集 $\rho(A)=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$,然后求此集合的幂集得出 $\rho(\rho(A))$,再分别用(1)、(2)、(3)与 B 相对照.

解:$\rho(A)=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$,

$$
\begin{aligned}
B&=\rho(\rho(A))=\rho(\{\varnothing,\{\varnothing\}\})\\
&=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}.
\end{aligned}
$$

经对照,(1)、(2)、(3)均成立.

5. 设 A,B,C 为三个任意集合,则

$$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$$

证明:等式左边:$A\cap(B-C)=A\cap(B\cap\sim C)=A\cap B\cap\sim C.$ (1)

等式右边:
$$
\begin{aligned}
(A\cap B)-(A\cap C)&=(A\cap B)\cap\sim(A\cap C)\\
&=(A\cap B)\cap(\sim A\cup\sim C)=(A\cap B\cap\sim A)\cup(A\cap B\cap\sim C)\\
&=(\varnothing\cap B)\cup(A\cap B\cap\sim C)=\varnothing\cup(A\cap B\cap\sim C)\\
&=A\cap B\cap\sim C. \qquad (2)
\end{aligned}
$$

由(1)式、(2)式得证:$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$.

说明:在证明过程中常将−、+等集合运算等同变形为并、交运算形式,如本例中 $B-C$ 用 $B\cap\sim C$代入.另外,证明等式可以从左边出发往右边证,也可以从右边出发证明出左边,还可以分别从左边和右边出发证明等于同一个式子(如本例).

6. 证明:对任意集合 A,B,C,有

$$(A-B)-C=A-(B\cup C)$$

分析:本题可利用公式 $A-B=A\cap\sim B$ 展开,再通过研究等式一边集合中的元素来逐步根据性质、公式推导出另一边的集合,这是一种典型的证明方法.

证明:对任意 $x\in(A-B)-C\Leftrightarrow x\in(A-B)$且 $x\notin C\Leftrightarrow x\in A$ 且 $x\notin B$ 且 $x\notin C$

$$\Leftrightarrow x\in A \text{ 且 } x\notin(B\cup C)\Leftrightarrow x\in A-(B\cup C).$$

故$(A-B)-C=A-(B\cup C)$.

1.5 相关教材中的习题及解答

1. (1.1)列出下列集合的所有元素.

(1) 大于 5 且小于 30 的素数组成的集合;

(2) 大于 39 且小于 78 的偶数组成的集合.

解:(1) $\{7,11,13,17,19,23,29\}$;

(2) $\{40,42,44,46,48,50,52,54,56,58,60,62,64,66,68,70,72,74,76\}$.

2. (1.2)判断下列各式是否正确.

(1) $\{1,2\}\subseteq\{1,2,3,\{1,2,3\}\}$;

(2) $\{p,q,r\}\subseteq\{p,q,r,\{p,q,r\}\}$.

解:(1) 正确;(2) 正确.

3. (1.3)设 $E=\{1,2,3,4,5\}$,$A=\{1,4\}$,$B=\{1,2,5\}$,$C=\{2,4\}$,其中 E 为全集,试求下列集合.

(1) $A\cap\sim B$;

(2) $\sim A\cup\sim B$;

(3) $(A\cap B)\cup\sim C$;

(4) $\sim(A\cap B)$;

(5) $A\cup\sim B\cup C$.

解:(1) $A\cap\sim B=\{1,4\}\cap\{3,4\}=\{4\}$;

(2) $\sim A\cup\sim B=\{2,3,5\}\cup\{3,4\}=\{2,3,4,5\}$;

(3) $(A\cap B)\cup\sim C=(\{1,4\}\cap\{1,2,5\})\cup\{1,3,5\}$

$=\{1\}\cup\{1,3,5\}=\{1,3,5\}$;

(4) $\sim(A\cap B)=\sim(\{1,4\}\cap\{1,2,5\})$

$=\sim\{1\}=\{2,3,4,5\}$;

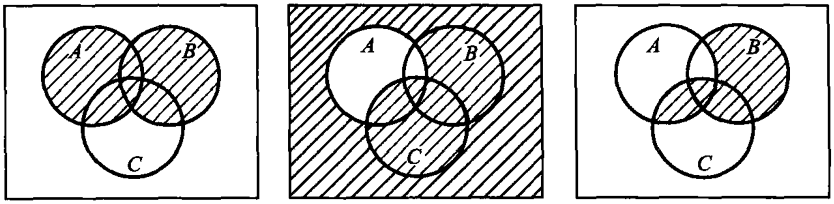
(5) $A\cup\sim B\cup C=\{1,4\}\cup\{3,4\}\cup\{2,4\}=\{1,2,3,4\}$.

4. (1.5)证明下列等式.

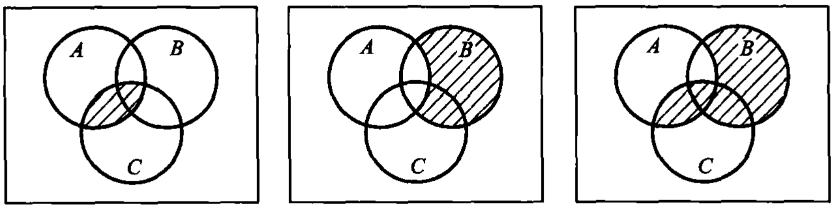
(1) $(A\cup B)\cap(\sim A\cup C)=(A\cap C)\cup(\sim A\cap B)$;

(2) $(A\cup B)\cap(A\cup C)=A\cup(B\cap C)$.

证明:(1) 利用文氏图法:



(a) $A\cup B$　　(b) $\sim A\cup C$　　(c) $(A\cup B)\cap(\sim A\cup C)$

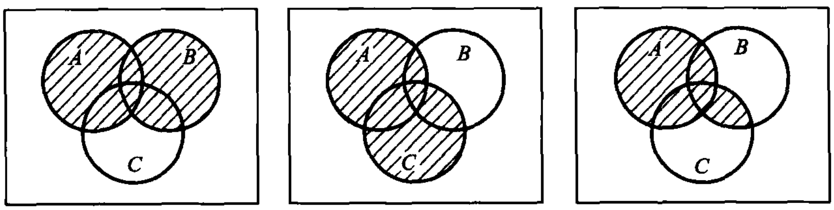


(d) $A\cap C$　　(e) $\sim A\cap B$　　(f) $(A\cap C)\cup(\sim A\cap B)$

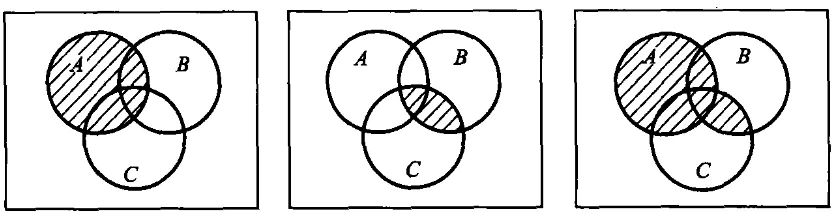
比较上面图中的(c)和(f),可发现其阴影部分完全相同,所以有

$$(A\cup B)\cap(\sim A\cup C)=(A\cap C)\cup(\sim A\cap B)$$

(2) 利用文氏图法:



(a) $A\cup B$　　(b) $A\cup C$　　(c) $(A\cup B)\cap(A\cup C)$



(d) A　　(e) $B\cap C$　　(f) $A\cup(B\cap C)$

比较上面图中的(c)和(f),可发现其阴影部分完全相同,所以有

$$(A\cup B)\cap(A\cup C)=A\cup(B\cap C)$$

5. (1.6)设有集合 A,B,

(1) 若 $A-B=B$,则 A 与 B 有什么关系?

(2) 若 $A-B=B-A$,则 A 与 B 有什么关系?

解:(1) $A=B=\varnothing$;　(2) $A=B$.

6. (2P-1)若集合 $A=\{a,b,c\}$,则下列式子中正确的是哪一个?

(1) $\{a\}\in A$;

(2) $\{a\}\subset A$;

(3) $a\subset A$;

(4) $\varnothing\in A$.

解:(2)是正确的. 它表示$\{a\}$被$\{a,b,c\}$真包含.

7. (2P-2)对任意集合 S,$S\cup\varnothing=S$,满足下面哪一个规律?

(1) 幂等律;

(2) 零一律;

(3) 同一律;

(4) 互补律.

解: (3).

8. (2P-3)设 $S_1=\varnothing$,$S_2=\{\varnothing\}$,$S_3=\rho(\{\varnothing\})$,$S_4=\rho(\varnothing)$,以下命题为假的是哪一个?

(1) $S_2\in S_4$;

(2) $S_1\subseteq S_3$;

(3) $S_4\subseteq S_2$;

(4) $S_4\in S_3$.

解:(1)是假的,因为 S_4中不存在为$\{\varnothing\}$的元素.

9. (2P-4)设 $A=\{1,2,3\}$,$B=\{1,2,3,4,5\}$,$C=\{2,3\}$,则$(A\cup B)+C=$________.

(1) $\{1,2\}$

(2) $\{2,3\}$

(3) $\{1,4,5\}$

(4) $\{1,2,3\}$

解:
$$\begin{aligned}(A\cup B)+C&=\{1,2,3,4,5\}+\{2,3\}\\&=(\{1,2,3,4,5\}-\{2,3\})\cup(\{2,3\}-\{1,2,3,4,5\})\\&=\{1,4,5\}\cup\varnothing=\{1,4,5\}.\end{aligned}$$

故答案为(3).

10. (2P-5)设全集 $E=\{1,2,3,4,5\}$,$A=\{1,2,3\}$,$B=\{2,5\}$,那么 $A\cap B=$______,$\sim B=$______,$\sim A\cup\sim B$______.

解: $A\cap B=\{2\}$, $\sim B=\{1,3,4\}$, $\sim A\cup\sim B=\{4,5\}\cup\{1,3,4\}=\{1,3,4,5\}$.

11. (2P-6)设集合 $A_1=\{a,b\}$,$A_2=\{b,a\}$,$A_3=\{a,a,b\}$,$A_4=\{a,b,c\}$,$A_5=\{x\mid(x-a)(x-b)(x-c)=0\}$,$A_6=\{x\mid x^2-(a+b)x+ab=0\}$,则集合 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6中彼此相等的是______.

解: $A_1=A_2=A_3=A_6$;$A_4=A_5$.

12. (2P-7)设集合 $A=\{a,b,c\}$,$B=\{a,b\}$,那么 $\rho(A)-\rho(B)=$________,$\rho(B)-\rho(A)=$________.

解:$\rho(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}$,

$\rho(B)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$,

$\rho(A)-\rho(B)=\{\{c\},\{b,c\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}$,

$\rho(B)-\rho(A)=\varnothing$.

13. (2P-8)设 $A=\{a,b,c\}$,$B=\{b,d,e\}$,则 $A-B=$________,$A+B=$________.

解:$A-B=\{a,b,c\}-\{b,d,e\}=\{a,c\}$;

$A+B=(A-B)\cup(B-A)=\{a,c\}\cup\{d,e\}=\{a,c,d,e\}$.

14. (2P-9)设 S,T,M 为任意集合,判定下列命题的真假.

(1) $\varnothing$是$\varnothing$的子集;

(2) 如果 $S\cup T=S\cup M$,则 $T=M$;

(3) 如果 $S-T=\varnothing$,则 $S=T$;

(4) 如果 $\sim S\cup T=E$,则 $S\subseteq T$;

(5) $S+S=S$.

解:(1) 空集是任意集合的子集,故为真命题;

(2) 假命题,如 $S=\{a,b,c\}$,$T=\{a\}$,$M=\{b\}$,有 $S\cup T=S\cup M=\{a,b,c\}$,而 $T\neq M$;

(3) 假命题,如 $S=\{a,b\}$,$T=\{a,b,c,d\}$,$S-T=\varnothing$,而 $S\neq T$;

(4) 真命题;

(5) 假命题,$S+S=(S-S)\cup(S-S)=\varnothing$,而 S 未必是$\varnothing$,故为假命题.

15. (2P-10)用枚举法表示以下集合.

(1) $A=\{x\mid x\in\mathbf{N}$ 且 $x^2\leqslant 7\}$;

(2) $A=\{x\mid x\in\mathbf{N}$ 且 $|3-x|<3\}$;

(3) $A=\{x\mid x\in\mathbf{R}$ 且 $(x+1)^2\leqslant 0\}$.

解:(1) $A=\{0,1,2\}$;

(2) $A=\{1,2,3,4,5\}$;

(3) $A=\{-1\}$.

16. (2P-11)求使得下列集合等式成立的 a,b,c 应该满足的条件:

(1) $\{a,b\}=\{a,b,c\}$;

(2) $\{a,b,a\}=\{a,b\}$;

(3) $\{\{a,\varnothing\},b,\{c\}\}=\{\{\varnothing\}\}$.

解:(1) 当 $c=a$ 或 $c=b$ 时,等式成立;

(2) 本等式恒等;

(3) 当 $a=\varnothing$,$b=\{\varnothing\}$,$c=\varnothing$时,等式成立.

17. (2P-12)设 $A=\{=,\in,\notin,\subset,\supset\}$,选择 A 中适当的符号填在各小题的横线上.

(1) $\{1,2,3,4\}$______$\mathbf{N}$;

(2) $\sqrt{2}$______$\mathbf{Q}$;

(3) $\varnothing$______$\{1,5\}$;

(4) $\{a\}$ ______ $\{\{a\},a\}$;

(5) $\{1,2,3\}$ ______ $\{1,2,3,\{1,2,3\}\}$.

解:(1) $\subset$;

(2) $\in$;

(3) $\subset$;

(4) $\in$或$\subset$都可以;

(5) $\subset$.

18. (2P-13)写出下列集合的子集.

(1) $A=\{a,\{b\},c\}$;

(2) $B=\{\varnothing\}$;

(3) $C=\varnothing$.

解:(1) A 的子集为$\varnothing,\{a\},\{\{b\}\},\{c\},\{a,\{b\}\},\{a,c\},\{\{b\},c\},\{a,\{b\},c\}$;

(2) B 的子集为$\varnothing,\{\varnothing\}$;

(3) C 的子集为$\varnothing$.

19. (2P-14)化简$((A\cup(B-C))\cap A)\cup(B-(B-A))$.

解:$((A\cup(B-C))\cap A)\cup(B-(B-A))$

$=((A\cup(B\cap\sim C))\cap A)\cup(B\cap\sim(B\cap\sim A))$

$=((A\cup B)\cap(A\cup\sim C)\cap A)\cup(B\cap(\sim B\cup A))$

$=(A\cup(A\cap B\cap\sim C))\cup(B\cap A)$

$=(A\cup(A\cap(B\cap\sim C)))\cup(A\cap B)$

$=A\cup(A\cap B)$

$=A$.

20. (2P-15)设集合 $A=\{a,b\},B=\{1,2,3\},C=\{d\}$,求 $A\times B\times C$.

解:$A\times B=\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$,

$A\times B\times C=\{(a,1,d),(a,2,d),(a,3,d),(b,1,d),(b,2,d),(b,3,d)\}$.

21. (2P-16)设集合 $A=\{1,2\}$,求 $A\times\rho(A)$.

解:$\rho(A)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$,

$A\times\rho(A)=\{(1,\varnothing),(1,\{1\}),(1,\{2\}),(1,\{1,2\}),(2,\varnothing),(2,\{1\}),(2,\{2\}),$
$(2,\{1,2\})\}$.

22. (2P-17)(1) 设集合 $A=\{\{2,1\},\{1,2,1\}\}$,求幂集 $\rho(A)$;

(2) 求幂集 $\rho(\rho(A))$,其中 A 同(1).

解:(1) $\rho(A)=\{\varnothing,\{\{2,1\}\},\{\{1,2,1\}\},\{\{2,1\},\{1,2,1\}\}\}$;

(2) $\rho(\rho(A))=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\{2,1\}\}\},\{\{\{1,2,1\}\}\},\{\{\{2,1\},\{1,2,1\}\}\},\{\varnothing,\{\{2,1\}\}\},\{\varnothing,\{\{1,2,1\}\}\},\{\varnothing,\{\{2,1\},\{1,2,1\}\}\},\{\{\{2,1\}\},\{\{1,2,1\}\}\},\{\{\{2,1\}\},\{\{2,1\},\{1,2,1\}\}\},\{\{\{1,2,1\}\},\{\{2,1\},\{1,2,1\}\}\},\{\varnothing,\{\{2,1\}\},\{\{1,2,1\}\}\},\{\varnothing,\{\{1,2,$

1}},{{2,1},{1,2,1}}},{∅,{{2,1}},{{2,1},{1,2,1}}},{{{2,1}},{{1,2,1}},{{2,1},{1,2,1}}},{∅,{{2,1}},{{1,2,1}},{{2,1},{1,2,1}}}}.

23. (2P-18)设集合 $A=\{\{1,2\},\{1,2\},\varnothing\}$,试求:

(1) $A-\{1,2\}$;

(2) $A-\varnothing$;

(3) $A-\{\varnothing\}$;

(4) $\{\{1,2\}\}-A$

解:(1) A;

(2) A;

(3) $\{\{1,2\}\}$;

(4) $\varnothing$.

24. (2P-19)试证:$A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C)$.

证明:$A-(B-C)=A\cap\sim(B-C)=A\cap\sim(B\cap\sim C)$

$=A\cap(\sim B\cup\sim(\sim C))=A\cap(\sim B\cup C)$

$=(A\cap\sim B)\cup(A\cap C)=(A-B)\cup(A\cap C)$.

25. (2P-20)设 A,B 为任意集合,试证:$A-B=B-A\Leftrightarrow A=B$.

证明:"$\Rightarrow$":因为 $A-B$ 表示为属于 A 但不属于 B 的元素组成的集合,而 $B-A$ 表示属于 B 但不属于 A 的元素组成的集合,又因为如果 $A-B=B-A$,则只能是当结果为空集时才相等,所以 $A=B$.

"$\Leftarrow$":因为 $A=B$,所以 $A-B=A-A=\varnothing$,$B-A=B-B=\varnothing$.

所以 $A-B=B-A$. 故 $A-B=B-A\Leftrightarrow A=B$.

26. (2P-21)设集合 $A=\{1,2\}$,$B=\{a,b,c\}$,$C=\{c,d\}$,试求 $A\times(B\cap C)$.

解:$B\cap C=\{c\}$,

$A\times(B\cap C)=\{1,2\}\times\{c\}=\{(1,c),(2,c)\}$.

1.6 另增配套习题及解答

1. 下列可称为集合的是(　　).

(1) 某本书中第 a 页上汉字的全体

(2) 很大数的全体

(3) 高个子全体

(4) 接近于 0 的数的全体

解:(1) (元素的定义要具体).

2. 下列四式中,错误的是(　　).

(1) $\varnothing\subseteq\varnothing$

(2) $\varnothing \neq 0$

(3) $\varnothing \subseteq \{0\}$

(4) $\varnothing \in \varnothing$

解:(4)(空集中不应包含元素).

3. 列举集合的元素:

$A=\{x \mid x^2<50, x$ 为正奇数$\}=$________;

$B=\{x \mid x=p/q, p+q=5, p,q \in \mathbf{N}\}=$________.

解:$A=\{1,3,5,7\}$;$B=\left\{\frac{1}{4},\frac{4}{1},\frac{2}{3},\frac{3}{2},0\right\}$.

4. 集合 A 和 B 的对称差记为 $A+B$,$A+B=$________;$A+\varnothing=$________.

解:$(A-B)\cup(B-A)$;A.

5. 对集合 A,B,若 $A\subseteq B$,则有 $(A\cap B)=A$,$(A\cup B)=B$. 试证明之.

证明:(1) 因为 $(A\cap B)\subseteq A$,又因为 $A\subseteq B$,任取 $x\in A\Rightarrow x\in B\Rightarrow x\in A\cap B$,所以 $A\subseteq(A\cap B)$,所以 $(A\cap B)=A$.

(2) 因为 $(A\cup B)\supseteq B$,又因为任取 $x\in(A\cup B)\Rightarrow x\in A$ 或 $x\in B$,因为 $A\subseteq B$,所以若 $x\in A\Rightarrow x\in B$,所以 $(A\cup B)\subseteq B$,所以 $(A\cup B)=B$.

6. 下列等式中错误的是( ).

(1) $A\cup A=A$

(2) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

(3) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup C$

(4) $A\cup\varnothing=A$

解:(3)(应该是 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$).

7. N_1 为偶数集合,N_2 为奇数集合,N_3 为质数集合,则有 $N_1\cap N_2=$________;$N_1\cap N_3=$________.

解:$\varnothing$;$\{2\}$.

8. 化简 $(A-B-C)\cup((A-B)\cap C)\cup(A\cap B-C)\cup(A\cap B\cap C)$.

解:
$$\begin{aligned}
\text{原式}&=(A\cap\sim B\cap\sim C)\cup(A\cap\sim B\cap C)\cup(A\cap B\cap\sim C)\cup(A\cap B\cap C)\\
&=((A\cap\sim B)\cap(\sim C\cup C))\cup((A\cap B)\cap(\sim C\cup C))\\
&=(A\cap\sim B)\cup(A\cap B)=A\cap(\sim B\cup B)=A.
\end{aligned}$$

9. 下列式子中错误的是( ).

(1) $A+(B+C)=(A+B)+C$

(2) $A+B=B+A$

(3) $A+A=\varnothing$

(4) $A\cap(B+C)\neq(A\cap B)+(A\cap C)$

解:(4).

10. 设 E 为全集, A,B 为非空集且 $B\subset A$,则(　　)为空集.

(1) $A\cap B$

(2) $\sim A\cap\sim B$

(3) $\sim A\cap B$

(4) $A\cap\sim B$

解:(3).

11. 求证 $A-(A-B)=A\cap B$.

证明:左边 $=A-(A\cap\sim B)=A\cap(\sim(A\cap\sim B))=A\cap(\sim A\cup B)$

$=(A\cap\sim A)\cup(A\cap B)=A\cap B$.

12. $A=\{1,2,3,\{1,2\},\{3\}\}$, $B=\{2,\{2,3\},\{1\}\}$,则 $A-B=$________; $B-A=$________.

解: $A-B=\{1,3,\{1,2\},\{3\}\}$,

$B-A=\{\{2,3\},\{1\}\}$.

13. $A=\{2,3\}$, $B=\{1,4,7\}$, $C=\{3,5\}$, $A\cup(B+C)=$________; $(A\cup B)+(A\cup C)=$________.

解: $A\cup(B+C)=\{2,3\}\cup\{1,3,4,5,7\}$

$=\{1,2,3,4,5,7\}$,

$(A\cup B)+(A\cup C)=\{1,2,3,4,7\}+\{2,3,5\}$

$=\{1,4,7\}\cup\{5\}=\{1,4,5,7\}$.

14. 已知 $A\subseteq B$ 且 $A\in B$,下列结论正确的是(　　).

(1) 是不可能的

(2) 是可能的

(3) A 必须是空集

(4) B 必须是全集

解:(2).

15. 集合 $\{0\}$ 的所有子集是(　　).

(1) $\varnothing$

(2) $\varnothing,\{0\}$

(3) $\{\varnothing\}$

(4) $\{\varnothing,\{0\}\}$

解:(2).

16. 用枚举法表示以下集合的元素($\mathbf{Z}$ 为整数集).

$A=\{x\mid 3<x<4, x\in\mathbf{Z}\}=$________;

$B=\{x\mid x^2=1, x\in\mathbf{Z}\}=$________.

解: $A=\varnothing$; $B=\{-1,1\}$.

17. 请用 $\in,\subset,\subseteq$ 填下列空格.

$\{a\}$________$\{\{a\},3,4,1\}$;