普通高等教育"十二五"规划教材

工程力学（II）

金艳　齐威　主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材

工 程 力 学（Ⅱ）

主编　金　艳　齐　威
参编　贺向东　林　巍　谷德桥

机 械 工 业 出 版 社

本书为《工程力学》系列教材（共三册）的第Ⅱ册，由运动学和动力学等内容组成。本书的特色是：精选内容，加强工程力学的基本概念、基本理论和基本方法，重点突出，易于理解和掌握。

本书可作为高等工科院校本科相关专业力学基础课程教材，也可供专科及高等职业技术院校的学生、自学者及广大工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

工程力学．Ⅱ/金艳，齐威主编．—北京：机械工业出版社，2012.2
普通高等教育"十二五"规划教材
ISBN 978-7-111-36639-3

Ⅰ．①工…　Ⅱ．①金…②齐…　Ⅲ．①工程力学－高等学校－教材
Ⅳ．①TB12

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第247679号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
策划编辑：姜　凤　责任编辑：姜　凤　张金奎　版式设计：霍永明
责任校对：张　媛　封面设计：路恩中　责任印制：杨　曦
保定市中画美凯印刷有限公司印刷
2012年2月第1版第1次印刷
169mm×239mm·20印张·398千字
标准书号：ISBN 978-7-111-36639-3
定价：36.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务
社服务中心：(010)88361066
销售一部：(010)68326294
销售二部：(010)88379649
读者购书热线：(010)88379203

网络服务
门户网：http://www.cmpbook.com
教材网：http://www.cmpedu.com

前　言

我们依据教育部力学基础课程教学指导分委员会最新制订的“理论力学课程教学基本要求”与“材料力学课程教学基本要求”，总结多年的教学实践经验，并汲取兄弟院校教材的精华而编写了这套《工程力学》系列教材。

本系列教材分为三册：第Ⅰ册是静力学和材料力学基础；第Ⅱ册为运动学和动力学；第Ⅲ册为工程动力学和材料力学。

本书为系列教材的第Ⅱ册，内容为工程力学课程体系中的基本内容，包括运动学和动力学两部分，讲授大约需要70学时，可以很好地满足机械及近机类专业的教学需要。本书除作为系列教材使用外，亦可作为工科类专业力学基础必修或选修课程的教材使用。

本书在满足教学基本要求的前提下，力求做到提高起点、精炼内容、减少重复、合理组织，以进一步突出基本概念、基本理论和基本方法，同时适当拓宽知识面，介绍本学科发展的新成果。

本书在编写过程中尽量做到符合学生的认知特点和教学规律，合理选择和安排例题及习题。书中采用的力学术语名词均执行了最新发布的国家标准的有关规定。

本册由金艳、齐威担任主编，参加本书编写的还有贺向东、林巍、谷德桥等。

限于编者水平，书中欠妥之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编　者

2012年1月

目　　录

前言

绪　论 …… 1

第一篇　运　动　学

第一章　点的运动学 …… 3

第一节　运动学的基本概念 …… 3

第二节　点的运动方程 …… 4

第三节　速度与加速度的矢径表示法 …… 7

第四节　速度与加速度的直角坐标表示法 …… 9

第五节　自然轴系 …… 11

第六节　速度与加速度的自然表示法 …… 12

习题 …… 18

第二章　刚体的基本运动 …… 21

第一节　刚体的平行移动 …… 21

第二节　刚体的定轴转动 …… 23

第三节　转动刚体内各点的速度与加速度 …… 25

第四节　轮系的传动比 …… 29

第五节　角速度及角加速度的矢量表示　以矢量积表示转动刚体内点的速度和加速度 …… 31

习题 …… 33

第三章　点的合成运动 …… 36

第一节　点的合成运动的概念 …… 36

第二节　点的速度合成定理 …… 38

第三节　牵连运动为平动时点的加速度合成定理 …… 42

第四节　牵连运动为定轴转动时点的加速度合成定理 …… 45

习题 …… 51

第四章　刚体的平面运动 …… 56

第一节　刚体平面运动的运动方程 …… 56

第二节　刚体平面运动分解为平动和转动 …… 58

第三节　平面图形上各点的速度 …… 60

第四节　平面图形上各点的加速度 …… 70

第五节　运动学综合问题分析 …… 75

习题 …… 81

第二篇 动 力 学

第五章 质点运动微分方程 …… 88
第一节 动力学引言 …… 88
第二节 动力学的基本定律 …… 89
第三节 质点的运动微分方程 …… 90
第四节 质点动力学的两类问题 …… 92
习题 …… 100
第六章 动量定理 …… 102
第一节 质点的动量定理 …… 102
第二节 质点系的动量定理 …… 104
第三节 质心运动定理 …… 109
第四节 变质量质点的运动微分方程 …… 113
习题 …… 116
第七章 动量矩定理 …… 121
第一节 质点的动量矩定理 …… 121
第二节 质点系的动量矩定理 …… 123
第三节 质点系相对于质心的动量矩定理 …… 127
第四节 刚体对轴的转动惯量的计算 …… 129
第五节 刚体的定轴转动和平面运动微分方程 …… 136
习题 …… 141
第八章 动能定理 …… 146
第一节 力的功 …… 146
第二节 质点的动能定理 …… 153
第三节 质点系的动能定理 …… 156
第四节 功率与功率方程 机械效率 …… 164
第五节 势力场 势能 机械能守恒定理 …… 167
第六节 动力学普遍定理的综合应用 …… 171
习题 …… 177
第九章 碰撞 …… 186
第一节 碰撞问题的基本特征和基本概念 …… 186
第二节 用于碰撞过程的基本定理 …… 187
第三节 物体的正碰撞 动能损失 …… 188
第四节 碰撞冲量对转动刚体的作用 撞击中心 …… 194
习题 …… 197
第十章 达朗贝尔原理 …… 200
第一节 惯性力 质点的达朗贝尔原理 …… 200

第二节　质点系的达朗贝尔原理 …… 202
第三节　刚体惯性力系的简化 …… 205
第四节　绕定轴转动刚体的轴承动约束力 …… 210
习题 …… 215
第十一章　虚位移原理 …… 222
第一节　约束及其分类 …… 222
第二节　虚位移及其计算 …… 224
第三节　虚功与理想约束 …… 226
第四节　虚位移原理 …… 226
第五节　质点系的自由度与广义坐标 …… 231
第六节　以广义坐标表示的质点系平衡条件 …… 233
习题 …… 236
第十二章　动力学普遍方程与拉格朗日方程 …… 240
第一节　动力学普遍方程 …… 240
第二节　拉格朗日方程 …… 243
习题 …… 251
第十三章　机械振动基础 …… 255
第一节　振动系统的最简单力学模型 …… 256
第二节　单自由度系统的自由振动 …… 258
第三节　计算单自由度系统固有频率的能量法 …… 265
第四节　单自由度系统的有阻尼自由振动 …… 267
第五节　单自由度系统的无阻尼强迫振动 …… 272
第六节　单自由度系统的有阻尼强迫振动 …… 277
第七节　隔振的概念 …… 281
习题 …… 283
第十四章　质点相对运动的动力学基础 …… 287
第一节　质点相对运动动力学的基本方程 …… 287
第二节　基本方程的应用举例 …… 288
习题 …… 293
附录 …… 296
附录一　国际单位制（SI）与工程单位制及其换算关系表 …… 296
附录二　习题答案 …… 297
参考文献 …… 312

绪　论

一、本课程的研究对象

本课程是研究物体机械运动一般规律的学科。

所谓机械运动，是指物体在空间的位置随时间而变化的运动形式。它是日常生活和生产实践中最常见的一种运动。如各种机构的运动、气体和液体的流动都属于机械运动。

在自然界中，除机械运动外，还存在很多其他形式的物质运动。如发热、发光、化学反应、电磁现象等。这些物质运动形式都与机械运动存在着一定的联系。在这些物质运动形式中，机械运动是最简单、最基本的一种运动形式。因此，本课程是其他与机械运动密切相关的工程技术学科的基础。

二、本课程的任务

本课程是我国高等工科院校相关专业的一门理论性较强的技术基础课。它是力学与机械学科的基础，并在许多工程技术领域中有广泛的应用。

本课程的任务是，使学生掌握质点、质点系和刚体机械运动的基本规律和研究方法。通过本课程的学习，为学好有关的后继课程如机械原理、机械零件以及其他相关专业课程打好必要的基础，并为将来学习和掌握新的科学技术创造必要的条件。通过学习，学生可初步学会应用运动学和动力学的基本理论与研究方法，分析、解决一些较简单的工程实际问题。学生也可以结合本课程的特点，提高分析问题和解决问题的能力。

三、学习理论力学的方法

理论力学同其他学科一样，都不能离开人类认识世界的客观规律，这就是“通过实践发现真理，又通过实践而证实真理和发展真理”。因此，不断实践仍是学好本课程的重要方法。

由于本课程的内容源于以牛顿定律为基础的古典力学，因此，深刻理解、熟练运用这些公理、定律、定理是学好本课程的关键。这些公理、定律和定理来源于实践又服务于实践，有的与日常生活和生产实践密切相关，书中的大量例题、习题也正是这种依赖关系的再现。所以，在学习本课程过程中，必须完成足够数量的习题；在深刻理解基本概念、基本理论的基础上，勤于思考，举一反三；注意培养逻

辑思维能力、抽象化能力以及数学演绎与运算能力。可以相信，只要注意能力的培养，一定会在本课程的学习过程中取得优异成绩。

四、本课程的基本内容

本课程包括传统理论力学内容中运动学和动力学两方面内容。

运动学：不考虑引起物体运动的原因，仅从几何学观念出发，研究物体的机械运动特征，如轨迹、速度和加速度等；

动力学：研究物体的运动与作用于物体上的力之间的关系。

上述两部分内容既是相对独立的，又是相互关联而不可分的。

本课程的研究内容属于古典力学范畴。它只适用于速度远小于光速的宏观物体的运动。但在现代一般的工程实践中遇到的力学问题，用古典力学方法来解决已经足够精确了，而且古典力学的研究方法应用简便，所以学习应用古典力学方法解决工程实际问题，仍具有很大的实用价值。

第一篇　运　动　学

第一章　点的运动学

第一节　运动学的基本概念

运动学是研究物体机械运动几何规律的学科。

静力学中所研究的对象，都是由于受到平衡力系的作用而处于静止或匀速直线运动的状态，即**平衡状态**。当力系的平衡条件不能满足时，则物体将改变其原有的静止或匀速直线运动状态。现在，开始研究物体的运动变化规律，这是一个比平衡规律复杂得多的问题，通常分为运动学和动力学两部分来研究。运动学只是从几何学方面来研究物体的运动规律，即研究物体的空间位置随时间变化的几何性质，如点的轨迹、速度、加速度等，而不考虑力和质量等与运动有关的物理因素。

学习运动学除了为学习动力学打基础外，也具有独立的意义。从生产的要求及历史的发展可以看出，科学技术的发展对于运动学不断地提出新的要求，同时生产实践也不断地丰富了运动学的内容，于是，从 19 世纪初期运动学就从动力学中分离出来成为单独的科学系统。在许多工程问题中，如自动控制系统、传递系统和仪表系统中，运动的分析常常是主要的；在机械设计中，在强度分析之前应首先对机构的运动进行分析，使各机件的运动关系满足机械正常运转的需要。

在描述某一物体的运动时，总是选定合适的物体作为参考体。将坐标系固结于参考体上就构成参考坐标系，称为**参考系**。在日常生活和工程实际中，如果该物体的位置对于所选的坐标系来说是随时间而改变的，则对于这个坐标系来说，物体是在运动中。运动与静止是相对的，只有在给定参考坐标系的情形下才有明确的意义。同一物体，对于不同的坐标系，所描述的运动就不相同。例如下雨时，站在地面观察雨点的运动情况与坐在行驶的汽车中观察到的情形是不相同的。在运动学里，总是选取地球作为参考系，为了方便将这个坐标系称为**静坐标系**。

在运动学里经常遇到关于“瞬时 t”和“时间间隔 Δt”这两个概念，这两个概念应当区分清楚。所谓瞬时是某一时刻或某一刹那，一般用离开初始时刻的时间来表示，例如第五秒末，而运动的初始时刻称为初瞬时。“时间间隔 Δt”是指从某一瞬时开始到另一瞬时为止所经过的时间，即两个瞬时之间相隔的时间，如从瞬时 t_1 到瞬时 t_2 的时间间隔是 $\Delta t = t_2 - t_1$。

在运动学中，可抽象为点和刚体两个模型。当物体的几何尺寸和形状在运动过程中不起主要作用时，物体可抽象为点，否则便视为刚体。一个物体应当抽象为点还是刚体，不取决于物体几何形状和尺寸的大小，而是取决于研究问题的性质。如在空中飞行的飞机，当我们研究它的飞行轨迹时，可以不考虑飞机的几何尺寸和形状，而视为一个点。又如刨床的刨头、气缸中的活塞等物体，它们中的各个点的运动情况相同，只需要研究其中某一个点的运动就行了，这样，物体的运动也可以简化为点的运动。而精密仪表上的小齿轮，体积虽小，但当研究它的转动时，就必须当做刚体。并且，同一物体，在不同的问题中，有时视为刚体，有时视为点，一切都由所研究问题的性质来决定。

由于刚体是由无数个点组成的，因此点的运动学既有其独立的应用，又是刚体运动学的基础，为此将首先研究点的运动学，然后研究刚体的运动规律。

点的运动学是研究点在空间中的位置随时间变化的规律。它包括点的**运动轨迹**、**运动方程**、**速度**和**加速度**。

第二节　点的运动方程

点在空间运动所经过的路线，称为**点的轨迹**。点的运动如其轨迹为直线，称为**直线运动**；如为曲线，则称为**曲线运动**。

若动点 M 作直线运动，可取此直线为 x 轴，如图 1-1 所示。在直线上任选一点 O 为坐标原点，并选某一方向为正向，则动点 M 的位置可由它的坐标 x 确定。

当动点运动时，它的坐标 x 随时间变化，在一般情况下，坐标 x 是时间 t 的单值连续函数，即

$$x = f(t) \tag{1-1}$$

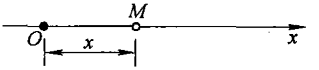

图 1-1

式 (1-1) 称为动点沿直线运动相对于点 O 的运动方程。

一般地，动点作曲线运动时，它的几何位置随时间变化的规律，同样可用数学表达式表示，称为点作曲线运动的运动方程。

动点对于不同的参考系，可写出不同形式的运动方程。现介绍几种常见的形式。

(1) 自然法　设动点的轨迹曲线是已知的。可参照点作直线运动时的表示方法，为此以点的轨迹曲线本身作为参考系来决定点的位置，如图 1-2 所示。在轨迹曲线上选定一点 O' 作为原点，并规定在原点 O' 某一边的弧长为正，在另一边的弧长为负。点在曲线上的位置由弧长 $s = \widehat{O'M}$ 来确定。s 为代数量，称为动点 M 的弧坐标或自然坐标，当动点 M 沿轨迹曲线运动时，则弧坐标 s 将随时间而变，并可表示为时间 t 的单值连续函数如下：

$$s = f(t) \tag{1-2}$$

式（1-2）称为动点沿已知轨迹的运动方程。显然当函数f（t）已知时，则动点任一瞬时在轨迹曲线上的位置即可以完全确定。

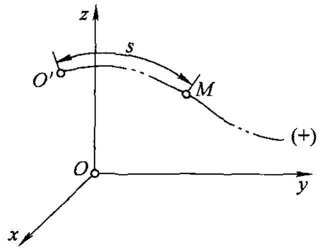

图　1-2

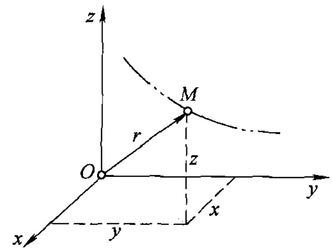

图　1-3

（2）直角坐标法　当动点 M 在空间运动时，它在任一瞬时的位置可用直角坐标系的三个坐标 x、y、z 来确定，如图 1-3 所示。三个位置坐标都是时间 t 的单值连续函数，通常表示为

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(t) \\ y &= f_2(t) \\ z &= f_3(t) \end{aligned}\right\} \tag{1-3}$$

式（1-3）就是动点 M 的直角坐标运动方程。设函数 $x = f_1(t)$，$y = f_2(t)$，$z = f_3(t)$ 都已知的，则动点 M 在任一瞬时的位置即可完全确定。当点在空间的轨迹事先不知道时，采用直角坐标法描述点的运动情况通常是比较方便的。

由上述方程消去时间 t，即可得到 x、y、z 之间的关系式 F（x，y，z）$=0$，这就是动点的轨迹方程。

当动点 M 始终在同一平面内运动时，如取这个平面为坐标平面 xOy，则运动方程（1-3）就简化为

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(t) \\ y &= f_2(t) \end{aligned}\right\} \tag{1-4}$$

消去 t 之后，即可得轨迹方程

$$f(x,y) = 0 \tag{1-5}$$

（3）矢径法　设动点 M 沿任一空间曲线运动，选空间任意一点 O 作为原点，则动点的位置可由如下的矢径（图 1-4）来表示：

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$$

当动点运动时，矢径 $\boldsymbol{r}$ 的大小及方向均随时间而改变，因而可表示为时间 t 的单值连续函数

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$$

这就是动点 M 的矢径运动方程，不难理解这也是用参数表示的轨迹方程。当动点运动时，矢径端点所描绘的曲线就是点的运动轨迹。

(4) 柱坐标法　由高等数学知识可知，动点在空间的位置可由点的柱坐标唯一确定。如图 1-5 所示，参数为动点的柱坐标。当点在空间运动时，其柱坐标随点的位置不同而变化，即为时间的单值连续函数：

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= f_1(t) \\ r &= f_2(t) \\ z &= f_3(t) \end{aligned}\right\} \tag{1-6}$$

式 (1-6) 即为用柱坐标表示的点的运动方程。

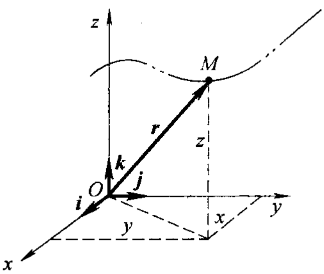

图　1-4

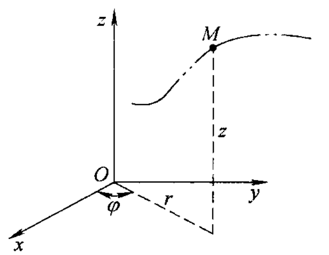

图　1-5

当点作平面曲线运动时，其位置用坐标 φ 和 r 便可唯一确定。因此，可用极坐标系代替柱坐标系来描述动点的运动。如图 1-6 所示。此时，动点的运动方程简化为

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= f_1(t) \\ r &= f_2(t) \end{aligned}\right\}$$

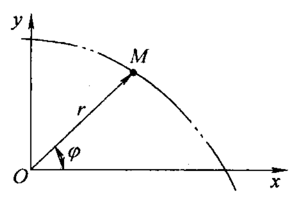

图　1-6

从上式中消去参数 t，即可得到用极坐标表示的动点的轨迹方程。

除此之外，有时为了方便起见，也可采用空间球坐标系来描述动点的运动情况。

例 1-1　直杆 AB 两端分别沿两互相垂直的固定直线 Ox 与 Oy 运动，如图 1-7 所示。试确定杆上任一点 M 的运动方程和轨迹方程，已知 $MA = a$，$MB = b$，$\varphi = \omega t$。

解：选取直角坐标系 Oxy，则动点 M 的坐标 x，y 为

$$\begin{cases} x = a\sin\varphi = a\sin\omega t \\ y = b\cos\varphi = b\cos\omega t \end{cases}$$

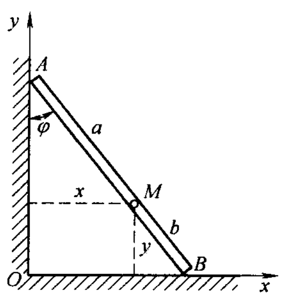

图　1-7

这就是 M 点的运动方程。从运动方程中消去时间 t，则得 M 点的轨迹方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

这是以 a 及 b 为半轴的椭圆方程。

例 1-2　如图 1-8 所示，刨床的曲柄滑道摇杆机构由曲柄 OA，摇杆 O_1B 及滑块 A、B 组成。当曲柄绕 O 轴转动时，摇杆可绕 O_1 轴摆动，摇杆及滑块 B 与扶架相连，当摇杆摆动时可带动扶架作往复运动。已知 $O_1B = l$，$OA = r$，$O_1O = a$，且 $r < a$。当曲柄以匀角速度转动时（即 $\varphi = \omega t$），求扶架的运动方程。

解：取坐标系 O_1xy 如图 1-8 所示，令 M 点表示扶架的运动，由 $\triangle O_1BC$ 可知 M 点的坐标为

$$x = BC = O_1B\sin\alpha = l\sin\alpha$$

为了求出 x 与时间的关系，应找出 α 与转角 φ 的关系，由 $\triangle O_1AD$ 及 $\triangle OAD$ 得知：

$$r\sin\varphi = O_1A\sin\alpha$$

即

$$\sin\alpha = \frac{r\sin\varphi}{O_1A} = \frac{r\sin\varphi}{\sqrt{a^2 + r^2 + 2ar\cos\varphi}}$$

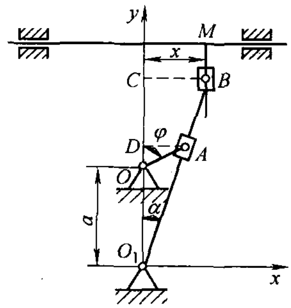

图　1-8

将 $\sin\alpha$ 的值代入前式，即得扶架的运动方程

$$x = l\sin\alpha = \frac{rl\sin\varphi}{\sqrt{a^2 + r^2 + 2ar\cos\varphi}} = \frac{rl\sin\omega t}{\sqrt{a^2 + r^2 + 2ar\cos\omega t}}$$

第三节　速度与加速度的矢径表示法

一、点的速度

设动点作曲线运动，从瞬时 t 到瞬时 $t + \Delta t$，动点由位置 M 移动到 M'，其矢径分别为 $\boldsymbol{r}(t)$ 和 $\boldsymbol{r}(\Delta t + t)$，如图 1-9 所示。在 Δt 时间间隔内，矢径的改变量为

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\Delta t + t) - \boldsymbol{r}(t) = \overrightarrow{MM'}$$

则 $\Delta \boldsymbol{r}$ 称为动点 M 在 Δt 时间间隔内的位移。比值 $\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ 描述点在时间间隔 Δt 内运动的平均快慢程度，称为动点在时间间隔 Δt 内的**平均速度矢量**，以 $\boldsymbol{v}^*$ 表示之，即

$$\boldsymbol{v}^* = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$$

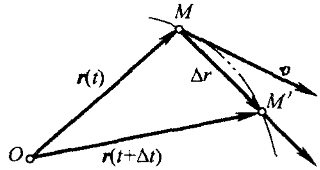

图　1-9

因为时间是标量，故知 $\boldsymbol{v}^*$ 的方向与 $\Delta \boldsymbol{r}$ 的方向相同。当 Δt 越小时，则 $\overline{MM'}$ 与 $\overset{\frown}{MM'}$ 的差别越小，而

平均速度越趋近于动点的真实速度。因此当 Δt 趋近于零时，即得动点的瞬时速度，以$\boldsymbol{v}$ 表示，即

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{v}^* = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{r}} \tag{1-7}$$

所以，**动点的速度等于动点的矢径对于时间的一阶导数**。注意：函数对时间的导数用在函数上方加“·”表示。

速度$\boldsymbol{v}$ 描述点在瞬时 t 运动的快慢与方向。点的速度是矢量，它的方向就是 $\Delta \boldsymbol{r}$ 或$\overrightarrow{MM'}$在极限情况下的方向，也就是轨迹曲线上 M 点的切线方向。一般地说，点的运动方向指的是速度的方向。

速度的单位是 m/s。

二、点的加速度

在一般情况下，动点的速度的大小和方向都可能随时间变化。为了表明点的速度的变化情况，用**加速度**来表示每一瞬时点的速度对于时间的变化率。加速度既包括速度大小的变化，也包括速度方向的变化。

设动点 M 在瞬时 t 的速度是$\boldsymbol{v}$，在瞬时 $t+\Delta t$ 的速度是$\boldsymbol{v}'$，如图 1-10 所示，则速度的变化是 $\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v}$，故动点的平均加速度为

$$\boldsymbol{a}^* = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$$

当 Δt 趋近于零时，即得动点在瞬时 t 的加速度为

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-8}$$

所以，**动点的加速度等于动点的速度对于时间的一阶导数，或等于动点的矢径对于时间的二阶导数**。

如由任一定点 O 作相当于各瞬时 t_1、t_2、t_3、…的速度矢量$\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$、$\boldsymbol{v}_3$、…，连接速度矢量端点的曲线称为速度矢端曲线。由瞬时加速度的概念，可知瞬时加速度的方向是沿着动点的速度矢端曲线的切线方向，如图 1-11 所示。

加速度的单位是 m/s^2。

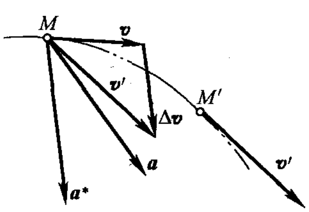

图 1-10

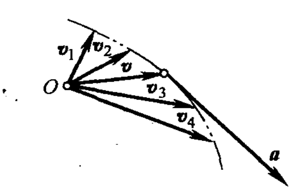

图 1-11

第四节　速度与加速度的直角坐标表示法

一、点的速度的直角坐标表示法

动点的直角坐标的运动方程为

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(t) \\ y &= f_2(t) \\ z &= f_3(t) \end{aligned}\right\}$$

由图 1-3 知，矢径 $\boldsymbol{r}$ 可写成

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

式中，$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 是沿直角坐标轴正向的单位矢量。第三节已经证明，动点的速度等于动点的矢径对于时间的一阶导数，因此动点的速度可写为

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

但速度矢量也可表示为

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}$$

式中，v_x、v_y、v_z 为速度$\boldsymbol{v}$ 在坐标轴 x、y、z 上的投影，由此我们得到，用直角坐标表示的速度为

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ v_y &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ v_z &= \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \end{aligned}\right\} \tag{1-9}$$

这就表明：**动点的速度在各坐标轴上的投影，分别等于动点的各对应坐标对于时间的一阶导数。**

速度的大小及方向余弦为

$$\left.\begin{aligned} &v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2} \\ &\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{i}) = \frac{v_x}{v},\quad \cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{j}) = \frac{v_y}{v},\quad \cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{k}) = \frac{v_z}{v} \end{aligned}\right\} \tag{1-10}$$

二、点的加速度的直角坐标表示法

加速度是速度对于时间的导数，所以加速度 $\boldsymbol{a}$ 在坐标轴上的投影 a_x、a_y、a_z

应分别等于速度$\boldsymbol{v}$在坐标轴上的投影 v_x、v_y、v_z 对于时间的导数，即

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \\ a_y &= \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} \\ a_z &= \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} \end{aligned}\right\} \tag{1-11}$$

这就表明：**动点的加速度在各坐标轴上的投影，分别等于动点的各对应坐标对于时间的二阶导数。**

加速度的大小及方向余弦为

$$\left.\begin{aligned} a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\right)^2} \\ \cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{i}) &= \frac{a_x}{a}, \quad \cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{j}) = \frac{a_y}{a}, \quad \cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{k}) = \frac{a_z}{a} \end{aligned}\right\} \tag{1-12}$$

例 1-3 曲柄连杆机构在工程中有非常广泛的应用，这种机构能将转动转换为平动，如压气机、往复式水泵、锻压机等；或将平动转换为转动，如蒸汽机，内燃机等。图 1-12 所示曲柄连杆机构中，曲柄 OA 以匀角速度 ω 绕 O 轴转动，由于连杆 AB 的带动，滑块 B 沿着直线导槽作往复直线运动。已知 $OA=r$，$AB=l$，且 $l>r$，求滑块 B 的运动方程、速度及加速度。

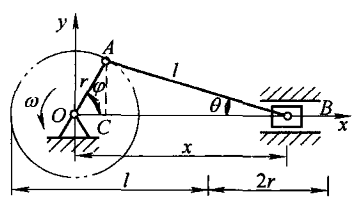

图 1-12

解：滑块 B 的运动是往复直线运动，轨迹沿 OB 直线，可用直角坐标法建立运动方程。取轴 O 为原点，选坐标系 Oxy，则滑块 B 在任一瞬间的位置为

$$x = OC + CB = r\cos\varphi + l\cos\theta$$

式中，$\varphi=\omega t$。由直角三角形 OAC 及 ACB 得到

$$r\sin\varphi = l\sin\theta \quad 或 \quad \sin\theta = \frac{r\sin\varphi}{l}$$

于是

$$\cos\theta = \sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\right)^2\sin^2\varphi}$$

因此滑块 B 的运动方程为

$$x = r\cos\omega t + l\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\right)^2\sin^2\omega t}$$

以 $\varphi=0$ 和 $\varphi=\pi$ 代入上式，可知滑块的行程或冲程为 $2r$。