

高等学校教材

现代控制理论

陈晓平 和卫星 主编

陈晓平 和卫星 杨年法 傅海军 编

王万良 主审



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高 等 学 校 教 材

现代控制理论

Xiandai Kongzhi Lilun

陈晓平 和卫星 主编

陈晓平 和卫星 杨年法 傅海军 编

王万良 主审

内容简介

本书阐述了线性系统状态空间的基本性质,对线性系统进行了定量和定性的分析,给出了连续时间系统和离散时间系统状态运动的一般表达式;对于系统的能控性和能观性分别从物理意义和数学定义两方面作了详细的阐述,并给出了相应的判断准则;对给定的系统介绍了如何变换为能控规范形与能观规范形,并讨论了系统的结构分解以及状态实现问题;介绍了判别系统稳定性的方法、极点配置方法和观测器的设计方法。

本书在内容安排上遵循教学的内在规律、循序渐进、启发思维,采用模块化结构,既保证现代控制理论体系的完整性和系统性,又有利于教师组织教学。本书配有典型的例题与大量的习题以及 MATLAB 在现代控制理论中应用的方法,使学生通过自学和练习能很好地掌握现代控制理论的基本概念与基本分析方法。

本书既可作为自动化及其他电类专业学生的教材,也可供从事自动化及其相关专业的工程技术人员自学参考。

图书在版编目(CIP)数据

现代控制理论/陈晓平,和卫星主编. —北京:高等教育出版社,2011.11

ISBN 978-7-04-033743-3

I. ①现… II. ①陈… ②和… III. ①现代控制理论—高等学校—教材 IV. ①O231

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 210998 号

策划编辑 杜 炜 责任编辑 杜 炜 封面设计 于文燕 版式设计 余 杨
插图绘制 郝 林 责任校对 张小镝 责任印制 张福涛

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印 刷	北京天来印务有限公司	网上订购	http://www.landaco.com
开 本	787mm×1092mm 1/16		http://www.landaco.com.cn
印 张	21.5	版 次	2011 年 11 月第 1 版
字 数	530 千字	印 次	2011 年 11 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	33.60 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物料号 33743-00

前 言

20世纪50年代,基于传递函数法的经典控制理论已经完备成熟,用于处理单变量系统极为有效,至今仍在广泛应用中。为适应多变量系统的研究需求,1960年前后,卡尔曼等人将状态空间法引入线性系统理论中,标志着现代控制理论的建立。随着科技的发展,现代控制理论的概念、方法和体系已经渗透到许多学科领域,因此,对于自动化及其相关专业本科生,甚至一些非控制类的硕士生来说,学习现代控制理论的基础知识并掌握利用MATLAB分析与设计控制系统的方法是时代的要求。

现代控制理论主要研究线性系统状态的运动规律,揭示系统中固有的结构特性,建立系统的结构、参数与性能之间的定性、定量的关系,以及为改善系统性能以满足工程指标要求而采取的各类控制器设计方法。通常,研究系统运动规律的问题称为分析问题,研究改变运动规律的可能性和方法的问题则称为综合问题。

现代控制理论的分析问题还可进一步区分为“定量分析”和“定性分析”两类情况。在对线性系统的定量分析中,关心的是系统对某一输入信号的实际响应和性能。从数学的角度来看,系统分析归结为求解作为系统数学模型的微分方程组或差分方程组。从计算的角度来看,应用一般关系式来分析比较复杂的线性系统的响应时,将会涉及很多复杂的计算,常借助于计算机来完成,这可以利用流行广泛的MATLAB应用软件来进行分析计算。

在对线性系统的定性分析中,着重研究对系统性能和控制具有重要意义的基本结构特性。结构特性主要包括稳定性、能控性与能观性等。因此,定性分析在线性系统理论中占据着重要位置。

线性系统综合问题是对线性系统分析的一个反命题,如果所得到系统的响应不能令人满意,就要对系统加以改善或优化,这往往需要通过在系统中引入控制器来完成。这类问题即为系统的综合,它是建立在分析基础上的。系统综合的目的是使系统的性能达到期望的指标或实现最优化。应当注意的是,系统的综合设计是在系统模型上完成的。如果模型选取得适当,则所设计出的控制器经适当的调整就能够相应地改变实际系统的特性。

本书共有6章,在第1章中将系统地导出控制系统的状态空间描述,给出状态空间的概念、组成方法和基本性质;第2章进行线性控制系统的运动分析,分别给出连续和离散时间系统状态运动的一般表达式;第3章着重讨论线性控制系统的能控性和能观性,这两个概念在现代控制理论中是基本概念,同时给出了线性系统能控性和能观性的一些充分必要条件,讨论了系统的能控规范形和能观规范形以及系统状态空间描述的规范分解方法,引入了系统实现的概念,介绍了能控规范形实现、能观规范形实现、最小实现以及最小实现的解法,进一步揭示了状态空间描述与传递函数矩阵之间的关系;第4章对于线性系统的运动稳定性问题做了较详细的介绍,一个实际运行的系统必须是稳定的,在此分别给出输入、输出稳定性和李雅普诺夫稳定性的概念及判别方法,还介绍了李雅普诺夫直接法在系统综合方面的应用;第5章介绍了线性系统的状态反馈,包

括状态反馈与输出反馈对系统能控性和能观性的影响、系统的极点配置、输出反馈极点配置、不完全能控系统状态反馈极点配置和镇定、状态反馈解耦等；第6章介绍了状态观测器的有关理论和设计方法。目前MATLAB软件在控制系统的计算中已得到越来越多的应用，所以在每一章后面适当地介绍了MATLAB在现代控制理论相关内容中的应用实例。

本书的编写宗旨是理论阐述力求严谨清楚，突出重点，加强物理概念，内容简练，循序渐进，深入浅出，易于自学。为了便于理解书中的内容，在各章后面配有适量的习题。考虑到教学的特点，在编写本教材时注重教学适用性，在总体结构上力求简明；章节内容安排上既注意了课程体系的连贯性，又保持了一定的独立性，可适应多种学时的教学要求和教学计划。

本教材是作者在总结多年教学实践的基础上，参考已出版的同类优秀教材编写而成的。参加本书编写的是江苏大学电气信息工程学院陈晓平教授、和卫星教授、杨年法副教授、傅海军讲师，本书由陈晓平教授、和卫星教授担任主编，负责全书的统稿。本书得到了国家教学名师奖获得者、浙江工业大学王万良教授的认真审阅，在此表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中不足与错误之处，敬请读者批评指正。

编 者

2011年4月

目 录

第 1 章 控制系统的状态空间描述	1	1.8.1 状态空间线性变换特性	35
1.1 控制系统中状态的基本概念	1	1.8.2 将状态方程化为对角线规范形 ...	38
1.1.1 系统的状态和状态变量	1	1.8.3 将状态方程化为约当规范形	45
1.1.2 状态向量	2	1.9 组合系统的状态空间描述和	
1.1.3 状态空间	2	传递函数矩阵	55
1.2 控制系统的状态空间表达式	3	1.9.1 子系统的并联连接	55
1.2.1 状态空间表达式的一般形式	3	1.9.2 子系统的串联连接	57
1.2.2 状态空间表达式的系统结构图	4	1.9.3 子系统的反馈连接	59
1.2.3 状态空间表达式的模拟结构图	5	1.10 离散时间系统的状态空间	
1.3 由系统机理建立状态空间		表达式	61
表达式	6	1.10.1 由差分方程建立状态空间	
1.4 由系统的微分方程建立状态		表达式	62
空间表达式	9	1.10.2 由脉冲传递函数建立状态空间	
1.4.1 微分方程中不含输入函数导		表达式	66
数项	9	1.10.3 由离散时间系统状态空间表达	
1.4.2 微分方程中包含输入函数导		式确定脉冲传递函数矩阵	69
数项	11	1.11 利用 MATLAB 分析状态	
1.5 由系统的传递函数建立状态		空间模型	71
空间表达式	16	1.11.1 模型之间的转化	71
1.5.1 直接分解法	17	1.11.2 状态空间模型之间的线性	
1.5.2 部分分式法	18	变换	76
1.6 由状态变量图建立状态空间		1.11.3 组合系统模型计算	77
表达式	26	1.12 习题	79
1.6.1 由系统结构图建立状态空间		第 2 章 线性控制系统的运动分析	84
表达式	26	2.1 线性控制系统运动分析的数学	
1.6.2 由传递函数绘制状态变量图	29	实质	84
1.6.3 由状态变量图列写状态空间		2.1.1 运动分析的数学实质	84
表达式	30	2.1.2 状态方程解的存在性和唯一性	
1.7 由状态空间表达式确定传递		条件	85
函数阵	31	2.1.3 零输入响应和零状态响应及全	
1.8 状态空间表达式的线性变换及		响应	85
规范形	35	2.2 线性定常系统的运动分析	86

2.2.1 线性定常系统的零输入响应	86	2.6.4 线性离散定常系统的状态运动 规律	132
2.2.2 矩阵指数函数 e^{At} 的性质	89	2.7 利用 MATLAB 求解系统的 状态响应	132
2.2.3 几种典型的矩阵指数函数 e^{At}	90	2.7.1 利用 MATLAB 求解线性定常 系统的响应	133
2.2.4 矩阵指数函数 e^{At} 的计算方法	93	2.7.2 利用 MATLAB 求解线性离散 时间系统的响应	137
2.2.5 线性定常系统的零状态响应	102	2.8 习题	141
2.2.6 线性定常系统的全响应及输出 响应	104	第 3 章 线性控制系统的能控性和能 观性	145
2.3 线性时变系统的运动分析	106	3.1 能控性和能观性的定义	145
2.3.1 线性时变系统的零输入响应	106	3.1.1 能控性和能观性的直观讨论	145
2.3.2 线性时变系统的零状态响应	109	3.1.2 能控性定义	146
2.3.3 线性时变系统的全响应及输出 响应	110	3.1.3 能观性定义	148
2.4 状态转移矩阵	111	3.2 线性连续时间系统的能控性 判据	149
2.4.1 线性时变系统的状态转移 矩阵	111	3.2.1 线性定常系统的能控性判据	149
2.4.2 线性时变系统的状态转移矩阵 性质	115	3.2.2 能控性指数	157
2.4.3 线性定常系统的状态转移 矩阵	120	3.2.3 线性时变系统的能控性判据	160
2.4.4 线性定常系统的状态转移矩 阵性质	121	3.3 线性连续时间系统的能观性 判据	164
2.4.5 基于状态转移矩阵表示的线 性定常系统的运动规律	123	3.3.1 线性定常系统的能观性判据	165
2.5 线性连续时间系统的时间离 散化	123	3.3.2 能观性指数	170
2.5.1 数字控制系统的基本形式	123	3.3.3 线性时变系统的能观性判据	171
2.5.2 离散化的假设条件	125	3.4 对偶系统与对偶原理	173
2.5.3 线性连续时变系统的离散化	126	3.4.1 对偶系统	174
2.5.4 线性连续定常系统的离散化	127	3.4.2 对偶原理	175
2.6 线性离散时间系统的运动 分析	129	3.5 线性离散时间系统的能控性 和能观性	176
2.6.1 迭代法求解线性离散时间系统 的状态方程	129	3.5.1 线性离散时间系统的能控性和 能达性	176
2.6.2 线性离散时间系统的状态转移 矩阵	130	3.5.2 线性离散时间系统的能控性 判据	177
2.6.3 线性离散时变系统的状态运动 规律	131	3.5.3 线性离散时间系统的能观性及 其判据	178
		3.6 线性定常系统能控规范形和 能观规范形	179

3.6.1 单输入-单输出系统的能控 规范形	179	4.1.1 外部稳定性	240
3.6.2 单输入-单输出系统的能观 规范形	183	4.1.2 内部稳定性	242
3.6.3 多输入-多输出系统的能控与 能观规范形	185	4.1.3 李雅普诺夫稳定性定义	244
3.7 线性定常系统的结构分解	186	4.2 李雅普诺夫稳定性定理	247
3.7.1 能控性和能观性在非奇异变 换下的特性	186	4.2.1 李雅普诺夫第一法和第二法	247
3.7.2 线性定常系统按能控性的结构 分解	187	4.2.2 李雅普诺夫第二法的主要 定理	247
3.7.3 线性定常系统按能观性的结构 分解	192	4.3 控制系统的李雅普诺夫稳定性 分析	253
3.7.4 线性定常系统的结构规范 分解	195	4.3.1 线性时变系统的稳定性分析	253
3.8 线性定常系统的状态实现	200	4.3.2 线性定常系统的稳定性分析	256
3.8.1 单输入-单输出系统传递函数 的实现	200	4.3.3 离散时间非线性定常系统的 李雅普诺夫稳定性定理	260
3.8.2 单输入-多输出系统传递函数 的实现	204	4.3.4 离散时间线性定常系统的 稳定性定理	260
3.8.3 多输入-单输出系统传递函数 的实现	207	4.4 构造李雅普诺夫函数的规则化 方法	261
3.8.4 多输入-多输出系统传递函数 的实现	208	4.4.1 变量梯度法	261
3.8.5 传递函数矩阵的最小实现	212	4.4.2 克拉索夫斯基方法	264
3.9 利用 MATLAB 分析系统的 能控性与能观性	227	4.5 利用 MATLAB 进行稳定性 分析	266
3.9.1 利用 MATLAB 判断系统的 能控性与能观性	227	4.6 习题	269
3.9.2 利用 MATLAB 将系统化为能 控规范形与能观规范形	228	第 5 章 状态反馈	273
3.9.3 利用 MATLAB 将系统进行 结构分解	230	5.1 状态反馈与输出反馈的概念	273
3.9.4 利用 MATLAB 将系统进行 最小实现	233	5.2 状态反馈与输出反馈对系统 能控性和能观性的影响	275
3.10 习题	235	5.2.1 状态反馈和输出反馈对系统 能控性的影响	275
第 4 章 控制系统的稳定性分析	240	5.2.2 状态反馈对系统能观性的 影响	277
4.1 系统稳定的基本概念	240	5.2.3 输出反馈对系统能观性的 影响	277
		5.2.4 多输入能控系统转变为单输入 能控系统	278
		5.3 系统的极点配置	282
		5.3.1 极点配置的概念	282
		5.3.2 极点配置的条件	282

5.3.3 单输入系统极点配置反馈矩阵 的计算方法	284	5.6.3 可解耦条件与解耦算法	301
5.3.4 多输入系统极点配置反馈矩阵 的计算方法	287	5.7 利用 MATLAB 进行状态 反馈	310
5.3.5 状态反馈对传递函数的影响	290	5.8 习题	310
5.4 输出反馈极点配置	292	第 6 章 状态观测器	313
5.5 不完全能控系统状态反馈极 点配置和镇定	294	6.1 状态观测器的基本概念	313
5.5.1 不完全能控系统状态反馈极点 配置	294	6.2 全维闭环状态观测器	314
5.5.2 不完全能控系统状态反馈 镇定	295	6.3 降维状态观测器	317
5.6 状态反馈解耦	296	6.4 基于观测器的状态反馈系统	323
5.6.1 解耦问题的提法和结构假设	296	6.5 Kx 函数观测器	327
5.6.2 系统结构特征量	298	6.6 利用 MATLAB 设计状态观 测器	330
		6.7 习题	332
		参考文献	334

第 1 章 控制系统的状态空间描述

控制系统的数学模型是用于描述系统动态行为的数学表达式。在经典控制理论中,通常采用一个高阶微分方程或传递函数作为描述系统动态特性的数学模型,这两种模型表达了系统的输入量和输出量之间的关系,但它们描述的只是系统的外部特性,而不能反映系统内部各物理量的变化。此外,传递函数描述又仅仅考虑系统的零初始条件,而不足以揭示出系统的全部特征。

在现代控制理论中,通常采用状态空间表达式作为系统的数学模型,用时域分析法分析和研究系统的动态特性。状态空间表达式是由状态方程和输出方程构成的,状态方程是由状态变量和输入变量构成的一阶微分方程组来描述的一阶矩阵,而输出方程是由状态变量和输入变量构成的代数矩阵。状态空间表达式描述了系统的输入、输出与内部状态之间的关系,揭示了系统内部状态的运动规律,反映了控制系统动态特性的全部信息。在数字计算机上求解一阶微分方程组比求解与之对应的高阶微分方程要容易得多,而且能同时给出系统的全部独立变量的响应,因而能同时确定系统的全部内部运动状态。此外,采用矩阵表示方法可使系统的数学表达式简洁明了,在求解过程中,还可方便地考虑初始条件产生的影响。因此,状态空间方法适用范围广,其研究对象不仅可以是单输入-单输出系统,也可以是多输入-多输出系统,系统可以是线性的或非线性的,也可以是定常的或时变的,这些都弥补了经典控制理论的局限。

1.1 控制系统中状态的基本概念

状态空间表达式是以状态、状态变量、状态向量、状态空间等基本概念为基础建立起来的,准确理解这些概念的含义是很重要的。

1.1.1 系统的状态和状态变量

1. 状态

控制系统的状态定义为:能够唯一地确定系统时间域行为的一组独立(数目最少的)变量,只要给定 t_0 时刻的这组变量和 $t \geq t_0$ 的输入,则系统在 $t \geq t_0$ 的任意时刻的行为随之完全确定。

必须指出,系统在 $t \geq t_0$ 的任意时刻的状态是由 t_0 时刻的系统状态(初始状态)和 $t \geq t_0$ 的输入唯一确定的,而与 t_0 时刻以前的状态和输入无关。

状态是状态空间描述的一个重要概念,下面介绍组成状态的状态变量。

2. 状态变量

状态变量是构成系统状态的变量,是指能完全描述系统行为的最小变量组的每一个变量,记为 $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}, t \geq t_0$, 其中 t_0 为初始时刻, n 为正整数。独立状态变量的个数即系统微分方程的阶次 n 。

对于如下系统

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_{n-1}u^{(n-1)}(t) + \cdots + b_1\dot{u}(t) + b_0u(t)$$

其中, $y^{(i)} = \frac{d^i y}{dt^i}$, y 是系统的输出, u 是系统的输入。系统的阶数为 n , 即系统的阶数为输出 y

关于时间 t 导数的最高阶次, 用来描述系统的状态变量的个数被称为系统的阶数。

众所周知, 一个用 n 阶微分方程描述的系统, 当 n 个初始条件 $x(t_0), \dot{x}(t_0), \cdots, x^{(n-1)}(t_0)$ 及 $t \geq t_0$ 的输入 $u(t)$ 给定时, 可以唯一确定方程的解 $x(t)$, 故变量 $x(t), \dot{x}(t), \cdots, x^{(n-1)}(t)$ 是一组状态变量。

对系统的状态变量有以下说明:

(1) 状态变量不是所有的变量的总和, 而是 n 个变量, 这 n 个变量可以完善地描述系统的行为, 而且其个数是最小的, 这 n 个状态变量是线性无关的。当状态变量个数小于 n 时, 不能完全确定系统状态; 当状态变量个数大于 n 时, 则必有不独立变量, 对于确定系统状态是多余的。

(2) 状态变量的选取不是唯一的。可以有多组状态变量的选取, 只要它们是能够完善描述系统行为的最少的一组变量。选择不同的状态变量只是以不同的形式描述系统, 由于不同的状态变量组之间存在着确定的关系, 对应的系统描述随之存在确定的关系, 而系统的特性则是不变的。

(3) 状态变量在系统分析中是一个辅助变量, 它可以是具有物理意义的量, 也可以是没有物理意义的量。应优先考虑在物理上可测量的量作为状态变量, 如机械系统中的转角、位移及速度, 电路系统中的电感电流、电容电压等, 这些可测量的状态变量可用于实现反馈控制以改善系统性能。

(4) 状态变量有时是不可测量的。在实际系统中, 有些状态变量是不能被传感器所测量的。例如, 对于角度随动系统, 角度、角速度和角加速度是有传感器可以进行测量的, 但如果系统有一个状态变量为角度的 4 阶导数, 那么就没有相应的传感器进行测量了。

(5) 输入量不允许选作状态变量。

(6) 输出量可以选作状态变量。

(7) 状态变量是时间域的。不能选取时间域以外的变量作为状态变量, 如频率域的变量。

状态变量可以完整地描述系统的行为, 具体体现在对于任意的初始时刻 t_0 , 当已知状态变量在 t_0 时刻的值以及 $t \geq t_0$ 的输入时, 则系统中任何变量在 $t \geq t_0$ 时的运动特性就可以被完全确定。

1.1.2 状态向量

设系统的状态变量为 $\{x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)\}$, 那么由状态变量作为分量构成的列向量称为系统的状态向量, 记为:

$$[x(t)] = [x_1(t) \quad x_2(t) \cdots x_n(t)]^T \quad t \geq t_0$$

1.1.3 状态空间

状态空间是指状态向量的取值空间。以 n 个状态变量 $\{x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)\}$ 为坐标构成的 n 维欧氏空间称为状态空间。

考虑到一个实际系统的状态变量只能取实数,因此状态空间为定义在实数域上的向量空间。设其维数为 n ,则状态空间记为 \mathbb{R}^n 。状态空间中的每一点代表了状态变量特定的一组值,即系统中某一特定的状态。而系统在任何时刻的状态都可以用状态空间中的一个点来表示。当给定 $t=t_0$ 时刻的初始状态 $x(t_0)$ 以及 $t \geq t_0$ 的输入函数,随着时间的推移,状态不断变化,则 $x(t)$ 将在状态空间中描绘出一条轨迹,这条轨迹称为状态轨迹。

1.2 控制系统的状态空间表达式

在引入了状态及状态空间概念的基础上,可以建立起系统的状态空间描述,它将系统的动态过程描述得更为细致完整。即输入引起系统内部状态的变化,而状态和输入则决定了系统输出的变化。

1.2.1 状态空间表达式的一般形式

从系统状态空间描述的角度,一个动态系统的结构可区分为“动力学部件”和“输出部件”,可采用图 1.2.1 所示的结构图来表示。图中 x_1, x_2, \dots, x_n 是表征系统行为的状态变量组, u_1, u_2, \dots, u_p 和 y_1, y_2, \dots, y_q 为系统的输入变量组和输出变量组,箭头表示信号的作用方向和部件变量组间的因果关系。

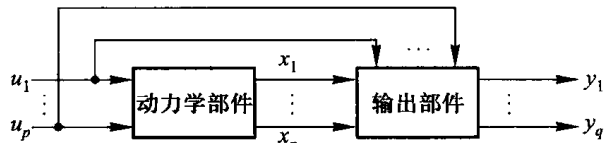


图 1.2.1 动态系统结构示意图

控制系统的状态空间描述需要由两个过程来反映。它们是由动力学部件所决定的“输入引起状态变化的过程”和由输出部件所决定的“状态与输入导致输出变化的过程”。

输入引起系统状态的变化是一个动态过程,数学上必须用微分方程或差分方程来表示,其列写每个状态变量的一阶导数与所有状态变量、输入变量关系的数学方程称为系统的状态方程。

由于 n 阶系统有 n 个独立的状态变量,故系统的状态方程由 n 个联立的一阶微分方程或差分方程组成。

输入和状态对输出的影响是一个变量间的转换过程,数学上可以用代数方程来表示,称其为输出方程。

系统的状态空间描述分别由状态方程和输出方程来表达,统称为系统的动态方程。对于连续时间的线性系统,其动态方程的具体形式为

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u & (1.2.1a) \\ y = C(t)x + D(t)u & (1.2.1b) \end{cases}$$

式中: x 为 n 维状态向量; u 为 p 维输入向量; y 为 q 维输出向量; $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ 和 $D(t)$ 分别是维数为 $n \times n$, $n \times p$, $q \times n$ 和 $q \times p$ 的时变实值矩阵。即

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^q \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}(t) &= \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} & \mathbf{B}(t) &= \begin{bmatrix} b_{11}(t) & \cdots & b_{1p}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1}(t) & \cdots & b_{np}(t) \end{bmatrix} \\
 \mathbf{C}(t) &= \begin{bmatrix} c_{11}(t) & \cdots & c_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ c_{q1}(t) & \cdots & c_{qn}(t) \end{bmatrix} & \mathbf{D}(t) &= \begin{bmatrix} d_{11}(t) & \cdots & d_{1p}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ d_{q1}(t) & \cdots & d_{qp}(t) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t)$ 和 $\mathbf{D}(t)$ 定义了在 $(-\infty, +\infty)$ 上 t 的连续函数矩阵, 被统称为该系统的状态空间描述的参数矩阵, 简称状态参数矩阵。矩阵 $\mathbf{A}(t)$ 反映了系统的许多重要特性, 如稳定性等, 因此常称矩阵 $\mathbf{A}(t)$ 为系统的特征矩阵, 简称为系统矩阵(状态阵); 矩阵 $\mathbf{B}(t)$ 称为输入矩阵; 矩阵 $\mathbf{C}(t)$ 称为输出矩阵; 矩阵 $\mathbf{D}(t)$ 称为耦合阵(前馈矩阵)。式(1.2.1)可简写为 $\{\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t), \mathbf{D}(t)\}$ 。式(1.2.1a)被称为系统的状态方程, 式(1.2.1b)被称为系统的输出方程。由于式(1.2.1)所描述的系统的状态空间是 n 维的, 因此也相应地称系统是 n 维动态系统。

对于线性系统, 只要当系统状态空间描述中的参数矩阵有某元是时间 t 的函数时, 即式(1.2.1)中矩阵 $\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t), \mathbf{D}(t)$ 的元是时间 t 的函数时, 该系统便是时变系统。而当参数矩阵的所有元均为实常数时, 该系统便是时不变系统或称定常系统。对于定常系统, 其状态空间描述可改写为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} & (1.2.2) \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} & (1.2.3) \end{cases}$$

其中 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ 均为常值阵, 系统可简记为 $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$ 。

对于单变量线性定常系统, 其状态空间描述可表示为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u & (1.2.4) \\ \mathbf{y} = \mathbf{c}\mathbf{x} + du & (1.2.5) \end{cases}$$

其中 \mathbf{b} 为 $n \times 1$ 的列向量, \mathbf{c} 为 $1 \times n$ 的行向量, d 为标量。

系统的状态空间描述的优越性在于: 能揭示处于系统内部的状态信息并加以利用; 一阶微分方程组比高阶微分方程宜于在计算机上求解; 采用向量-矩阵形式, 当各种变量数目增加时, 并不增加数学表达的复杂性; 可适用于单变量或多变量、线性或非线性、定常或时变、确定性或随机性各类系统的描述。

1.2.2 状态空间表达式的系统结构图

式(1.2.1)所描述的线性系统状态空间的结构可以用图 1.2.2 所示的系统结构框图来表示, 它形象地表示了系统信息之间的传递关系。

系统的结构图可以清楚地表示输入变量与系统内部状态的因果关系, 又反映内部状态变量对输出变量的影响, 因此状态空间表达式是对系统的一种完全描述。

从结构框图中可以看出, 矩阵 $\mathbf{D}(t)$ 描述了系统输入 u 不经过状态变量而对系统输出 y 的直接影响, 它不影响系统的动态过

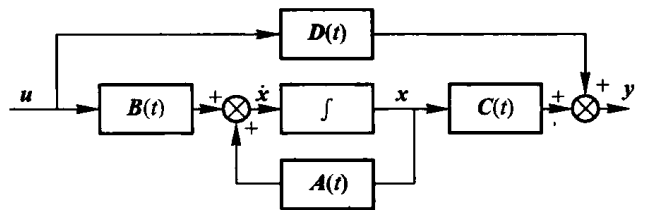


图 1.2.2 线性系统的结构框图

程,实质上是系统外部模型的一部分。当利用状态模型来分析系统动态行为时,常假设 $D(t)=0$, 这样并不失去对问题讨论的一般性,而且也符合大多数系统的实际情况。

1.2.3 状态空间表达式的模拟结构图

在状态空间分析中,采用仿照模拟计算机的模拟结构图来反映系统各状态变量之间的信息传递关系。这种模拟结构图为系统提供了一种清晰的物理图像,有助于加深对状态空间概念的理解。另外,模拟结构图也是系统实现电路的基础。

在模拟结构图中常用的积分器、放大器、反相器、加法器等基本元件,它们的表示方式分别如图 1.2.3 所示。

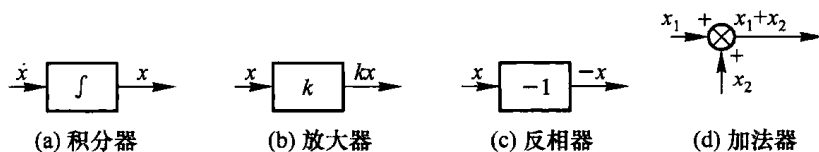


图 1.2.3 模拟结构图中的基本元件表示

绘制模拟结构图的步骤是:

- (1) 首先在适当的位置上画出积分器,积分器的数目为状态变量的个数,也等于系统的阶数;
- (2) 每个积分器的输出表示对应的某个状态变量;
- (3) 根据所给的状态方程和输出方程,画出相应的加法器和比例器;
- (4) 最后用表示信息传递关系的箭头线将这些元件连接起来。

下面举例表明状态空间表达式的模拟结构图的绘制。

例 1.2.1 已知某一阶系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + bu \\ y = x \end{cases}$$

其系统的模拟结构图如图 1.2.4 所示。

例 1.2.2 已知某三阶单输入-单输出系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -6x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 4u \\ y = x_1 + 2x_2 + x_3 \end{cases}$$

其系统的模拟结构图如图 1.2.5 所示。

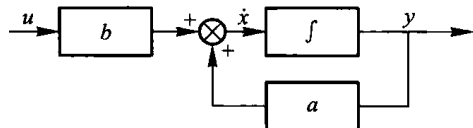


图 1.2.4 一阶系统的模拟结构图

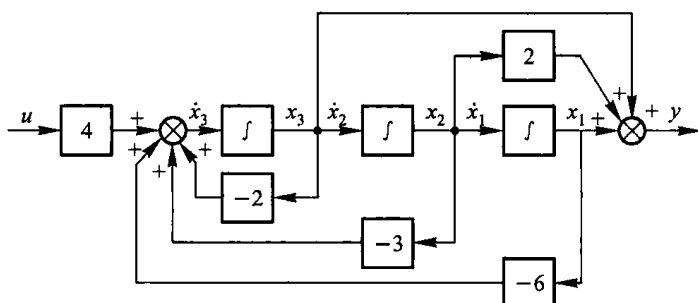


图 1.2.5 三阶单变量系统的模拟结构图

例 1.2.3 已知某双输入-双输出的二阶系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 \\ y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 \\ y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 \end{cases}$$

其系统的模拟结构图如图 1.2.6 所示。

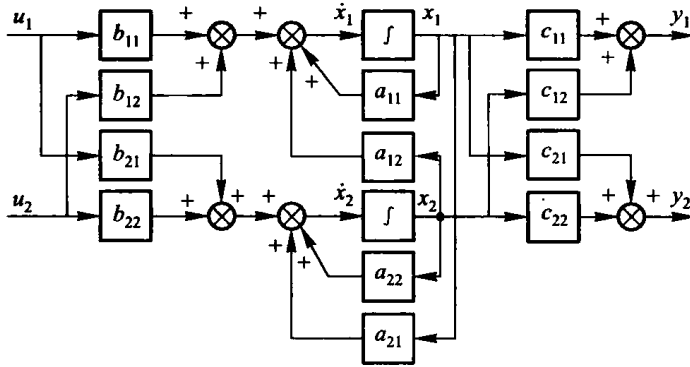


图 1.2.6 二阶双输入-双输出系统的模拟结构图

1.3 由系统机理建立状态空间表达式

一般的控制系统,按其属性可分为电气、机械、机电、气动液压、热力等系统,如果已知内部结构和参数,则根据系统所特有的机理,如基尔霍夫定律、牛顿定律、能量守恒定律等,就可建立系统的状态空间表达式,其一般步骤如下:

- (1) 确定系统的输入变量、输出变量和状态变量;
- (2) 根据变量应遵循的有关物理、化学定律,列出描述系统动态特性或运动规律的微分方程,并根据系统的输出要求来确定输出量与状态变量及输入量之间的输出关系式;
- (3) 消去中间变量,得出状态变量的一阶导数与各状态变量、输入变量的关系及输出变量与各状态变量、输入变量的关系式;
- (4) 将一组独立状态变量描述的一阶微分方程组整理成矩阵微分方程形式,即状态方程标准形式;并将输出方程整理成矩阵代数形式,即输出方程标准形式。

下面通过一些实例来说明如何由系统的机理来建立其状态空间表达式。

例 1.3.1 考察图 1.3.1 所示的 RLC 电路,输入变量取电压源两端的电压 $u_S(t)$,输出变量取电容 C 两端的电压 $y(t)$,试列写系统的状态方程和输出方程。

解:由基尔霍夫电压定律,可得该电路的 KVL 方程为

$$u_L + u_R + u_C = u_S$$

即该电路的微分方程为

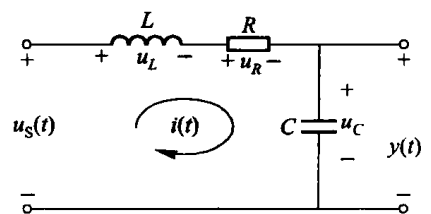


图 1.3.1 RLC 电路

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = u_s$$

取电容电压 $u_C(t)$ 和电感电流 i 为状态变量, 可得

$$\begin{cases} \frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C}i \\ \frac{di}{dt} = \frac{1}{L}(u_s - u_C - Ri) \end{cases}$$

令 $x_1 = u_C, x_2 = i$, 即

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{C}x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{1}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2 + \frac{1}{L}u_s \end{cases}$$

将上式的状态方程写成矩阵形式, 有

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u_s$$

由于电容电压 u_C 为输出变量, 则输出方程为

$$y = u_C$$

即

$$y = x_1$$

输出方程写成矩阵形式有

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

例 1.3.2 图 1.3.2 是直流电机动态模型。直流电机是一个简单的动态系统, 如果要控制电机的转速, 可以将电机的电枢电压 u 作为系统的输入, 电机转速 ω 作为系统的输出, 试列写系统的状态方程和输出方程。

解: 根据电机调速原理可知

$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + E(t) \quad (1.3.1)$$

式中: $i(t)$ 为电枢中电流, $E(t)$ 为电枢中建立起的反电动势。且有

$$E(t) = C_e \omega(t) \quad (1.3.2)$$

式中: C_e 为反电动势常数。

电机产生的转矩为

$$M = C_M i(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt} + B\omega(t) \quad (1.3.3)$$

式中: J 为电机及负载的转动惯量; C_M 为转动常数; B 为旋转部分的粘性摩擦系数。

根据式(1.3.1)和式(1.3.3)可知, 系统中最多有两个线性无关的变量, 因此可以选择电机转速 ω 和电枢电流 i 作为系统的状态变量。将式(1.3.2)代入式(1.3.1)得

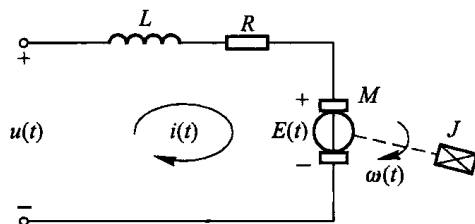


图 1.3.2 直流电机动态模型

$$\frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L}i(t) - \frac{C_e}{L}\omega(t) + \frac{1}{L}u(t) \quad (1.3.4)$$

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{C_M}{J}i(t) - \frac{B}{J}\omega(t) \quad (1.3.5)$$

把 $x_1 = i(t)$ 、 $x_2 = \omega(t)$ 代入式 (1.3.4) 和式 (1.3.5) 中, 写出矩阵形式, 得到系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{C_e}{L} \\ \frac{C_M}{J} & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (1.3.6)$$

系统的输出方程为

$$y = \omega(t)$$

即

$$y = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (1.3.7)$$

例 1.3.3 已知质量-弹簧-阻尼器 ($m-k-f$) 系统如图 1.3.3 所示, 试建立其状态空间表达式。

解: 由牛顿第二定律可写出系统的微分方程为

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + f \frac{dy}{dt} + ky = u$$

即

$$\ddot{y} + \frac{f}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{1}{m}u$$

设质量 m 的位移 y 为第一个状态变量, 质量 m 的速度 \dot{y} 为第二个状态变量, 即 $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, 则有

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{y} = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{f}{m}x_2 + \frac{1}{m}u \end{aligned}$$

将上述的微分方程写成矩阵形式, 可得到系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{f}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

由上述的例子可以看出, 采用状态空间法描述系统动力学行为的方法和经典控制理论中的传递函数不同, 它把输入与输出之间的信息传递分成两段来描述。第一段是输入引起系统内部状态的变化; 第二段是系统内部变化引起系统输出的变化。前者由状态方程描述, 后者由输出方程描述。由于这种方法可以描述系统内部, 可以反映出系统的一切动力学特性, 所以称之为全面描述; 而输入-输出描述不去表征系统的内部结构特性, 因此一般来说它是一类不完全的描述。

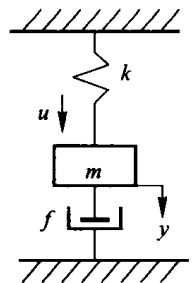


图 1.3.3 质量-弹簧-阻尼器系统