Yan Yuan
燕园教育

2013 考研专家指导丛书

考研数学最新精选1000题（理工类）

清华大学 王欢
北京大学 王德军
首都师范大学 童武
主编

由多次参加命题及阅卷的专家亲自编写，内容系统、权威
严格按照最新考试大纲，突出重点

赠送MP3盘
考研名师童武教授
考研数学串讲视频+辅导讲义

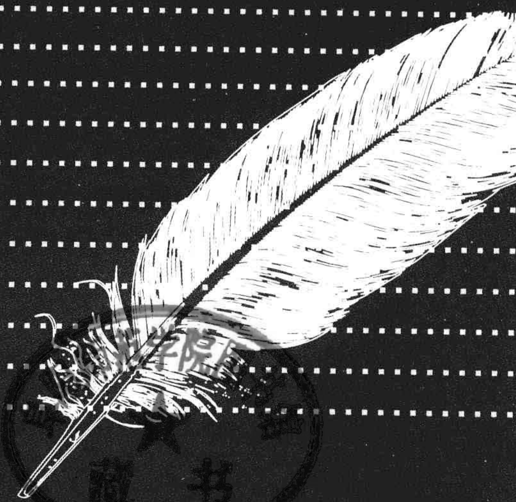
中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

Yan Yuan

燕园教育

2013 考研专家指导丛书

考研数学最新精选1000题（理工类）



清华大学 王欢

北京大学 王德军 主编

首都师范大学 童武

由多次参加**命题及阅卷的专家**亲自编写，内容系统、权威

严格按照最新考试大纲，突出重点

赠送MP3盘 考研名师童武教授

考研数学串讲视频+辅导讲义

中国石化出版社

HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM

教·育·出·版·中·心

图书在版编目(CIP)数据

考研数学最新精选1000题：理工类/王欢，王德军，童武主编．—北京：中国石化出版社，2012.2
ISBN 978-7-5114-1419-9

Ⅰ.①考… Ⅱ.①王… ②王… ③童… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-习题集 Ⅳ.①013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第016646号

中国石化出版社出版发行
地址:北京市东城区安定门外大街58号
邮编:100011 电话:(010)84271850
读者服务部电话:(010)84289974
http://www.sinopec-press.com
E-mail:press@sinopec.com
北京科信印刷有限公司印刷
全国各地新华书店经销
*
787×1092毫米16开本12.5印张315千字
2012年4月第1版 2012年4月第1次印刷
定价:28.00元(赠送MP3盘)

前　　言

中国加入WTO之后，改革开放逐步深化，经济发展速度日益加快，社会对科学技术、文化教育的需求不断向高层次迈进，我国对硕士研究生等高层次人才的需求越来越大，这方面的教育也在稳步发展，规模不断扩大、层次逐步齐全、教学质量不断提高、测试更加规范化，考生人数也在迅猛增加。

从测量学角度来说，全国硕士研究生入学统一考试应是“常模参照”考试，即选拔性考试。命题工作需坚持既有利于为国家选拔高层次的专门人才，又有利于高等学校教学的原则，强调在考查知识的基础上，重点考查考生分析问题和解决问题的能力，并且要采用科学的办法，保持考试水平的稳定性。

为了更好地帮助考生复习，顺利通过数学考试、赢取高分，我们根据国家教育部制订的最新考试大纲，基于多年参加阅卷和考研辅导班的教学实践经验，以及分析了近几年考题中的考点、难点、重点及命题套路，倾力推出这套考研专家指导丛书。本套丛书包括《考研数学历届真题权威解析(数学一)》、《考研数学历届真题权威解析(数学二)》、《考研数学历届真题权威解析(数学三)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学一)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学二)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学三)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学一)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学二)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学三)》、《考研数学最后冲刺超越135分(数学一)》、《考研数学最后冲刺超越135分(数学二)》、《考研数学最后冲刺超越135分(数学三)》、《考研数学名师名家高分复习全书(理工类)》、《考研数学名师名家高分复习全书(经济类)》、《考研数学名师名家高等数学辅导讲义》、《考研数学名师名家线性代数辅导讲义》、《考研数学名师名家概率论与数理统计辅导讲义》、《考研数学最新精选1000题(理工类)》、《考研数学最新精选1000题(经济类)》、《考研数学必做客观题1800题精析(理工

类)》、《考研数学必做客观题1800题精析(经济类)》、《考研数学必做主观题600题精析(理工类)》和《考研数学必做主观题600题精析(经济类)》。

本套书的编写特点如下:

1. 配合最新考试大纲，反映最新变化

本书在严格遵循最新考试精神和最新考试大纲要求的基础上，力求反映最新考试要求，紧扣全国硕士研究生入学数学考试的脉搏。

2. 注重考试技巧、高效突破难关

本书精辟阐明解题思路，全面展现题型变化，为考生全程领航和理性分析，引领考生高效通过考试难关。考生可以利用本套冲刺试卷进行考前模拟实战训练，检验自己的学习成果，及时进行查漏补缺，有针对性地进行复习备考。希望考生能在仿真的环境下进行模拟训练，这样效果最佳。

3. 教授亲自主笔，编写阵容强大

本书由一线专家和教授亲自编著。编者多年来一直从事考研数学的考前辅导工作，积累了丰富的教学辅导经验，对历年考试情况比较了解，对考生在复习和考试过程中可能遇到的问题把握得比较准确。

尽管在编写过程中经历了严格的编审程序，力求达到完美，但限于时间和水平，仍可能存在不足，纰漏之处希望广大考生和专家批评、指正。

编　者

目　　录

第一部分　高等数学

第一章　函数、极限与连续

一、填空题

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(3+x)^x-3^x}{x^2}=$________.

2. $\lim\limits_{x\to0}x\cot2x=$________.

3. 设 a 为非 0 常数，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=$________.

4. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=$________.

5. $\lim\limits_{x\to0+0}\dfrac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}}=$________.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\right)\sin\dfrac{2}{x}=$________.

7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$________.

8. $\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$________.

9. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\sin\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)-\sin\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]=$________.

10. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$________.

二、选择题

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$的值为(　　).

   (A)1　　(B)∞　　(C)不存在　　(D)0

2. 设$\{x_n\}$是无界数列，则下列结论中正确的是(　　).

   (A)若$\{y_n\}$是有界数列，则$\{x_n-y_n\}$一定是无界数列

   (B)若$\{y_n\}$是无界数列，则$\{x_ny_n\}$一定是无界数列

   (C)若$\{y_n\}$是有界数列，则$\{x_ny_n\}$一定是无界数列

   (D)若$\{y_n\}$是无界数列，则$\{x_n+y_n\}$必是无界数列

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{2x}=($　　$)$.

   (A)2e　　(B)e^{-2}　　(C)e^2　　(D)2/e

4. 当 $x\to1$ 时，函数$\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$的极限________.

(A)等于2　　(B)等于0　　(C)为∞　　(D)不存在但不为∞

5. 当$x\to0+0$时，以下四式中为无穷大量的是(　　).

(A)$2^{-x}-1$　　(B)$\dfrac{\sin x}{1+\sec x}$　　(C)e^{-x}　　(D)$e^{\frac{1}{x}}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin\dfrac{1}{x}}{\cos x}$的结果为(　　).

(A)不存在　　(B)0　　(C)1　　(D)∞

7. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\tan x)^{\cos x}=($　　$)$.

(A)0　　(B)1　　(C)∞　　(D)不存在

8. 下列各式中正确的是________.

(A)$\lim\limits_{x\to0^+}(1+\dfrac{1}{x})^x=1$　　(B)$\lim\limits_{x\to0^+}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$

(C)$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{x})^x=-e$　　(D)$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$

三、计算题

1. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$.

3. 已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，求$a$与$b$的值.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}$.

6. 已知$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$，求$a$和$b$的值.

7. 设$f'(a)$存在，且$f(a)>0$，求$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\dfrac{1}{x}\right)}{f(a)}\right]^x$.

8. $\lim\limits_{x\to0+0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+a}x\sin\dfrac{1}{x}dx$.(提示：先用积分中值定理)

答案与解析

一、填空题

1.【答案】$\dfrac{1}{3}$

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(3+x)^x-3^x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x\left[\left(1+\dfrac{x}{3}\right)^x-1\right]}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}3^x\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\ln(1+x/3)}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln\left(1+\dfrac{x}{3}\right)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x}{3}}{x}=\dfrac{1}{3}$

2.【答案】$\dfrac{1}{2}$

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}$(因为 $\cot 2x=1/\tan 2x\sim 1/2x$)

3.【答案】e^{2a}

【解析】$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2a}{x-a}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2ax}{x-a}}=e^{2a}$

4.【答案】2

【解析】原式$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+3\sqrt{n}-n+\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{\sqrt{1+\dfrac{3}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}}}=2$

5.【答案】-1

【解析】$\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{1-e^{1/x}}{x+e^{1/x}}=\lim\limits_{x\to 0+0}(1/e^{1/x}-1)/(1+x/e^{1/x})=-1$

6.【答案】$\dfrac{6}{5}$

【解析】$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\cdot\sin\dfrac{2}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\cdot\dfrac{2}{x}=6/5$

7.【答案】$\dfrac{3}{2}$

【解析】原式$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x}{x}+\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}x\cos\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{2}$

8.【答案】e^6

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{x}}=e^6$

9.【答案】2

【解析】原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x}\right)x=2$

10.【答案】$-\dfrac{1}{4}$

【解析】用洛必达法则求解，原式$=-\dfrac{1}{4}$

二、选择题

1.【答案】C

【解析】当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$，而 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 是不存在的，故

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$是不存在的．正确答案为 C.

2.【答案】A

【解析】举反例，$x_n=\tan\dfrac{n\pi}{2}$，$y_n=\cot\dfrac{n\pi}{2}$均是无界数列，但 $x_ny_n=1$ 是有界数列，故 B 选项错误；$x_n=n$ 是无界数列，$y_n=\dfrac{1}{n}$是有界数列，但 $x_ny_n=1$ 是有界数列，故 C 选项错误；$x_n=n$，$y_n=1-n$ 均是无界数列，但 $x_n+y_n=1$ 是有界数列，故 D 选项错误．故正确答案为 A.

3.【答案】B

【解析】$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-2}=\left[\lim\limits_{-x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-2}=e^{-2}$. 故正确答案为 B.

4.【答案】D

【解析】$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to1}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=2\lim\limits_{x\to1}e^{\frac{1}{x-1}}$. 因为$\lim\limits_{x\to1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$，

$\lim\limits_{x\to1^-}e^{\frac{1}{x-1}}=0$，故极限$\lim\limits_{x\to1}e^{\frac{1}{x-1}}$不存在且不为$\infty$，即极限$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$不存在且不为$\infty$．故正确答案为 D.

5.【答案】D

【解析】当 $x\to0+0$ 时，$\lim\limits_{x\to0+0}(2^{-x}-1)=0$，$\lim\limits_{x\to0+0}\dfrac{\sin x}{1+\sec x}=0$，$\lim\limits_{x\to0+0}e^{-x}=1$，只有 $\lim\limits_{x\to0+0}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$．故正确答案为 D.

6.【答案】B

【解析】因为$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\cos x}=0$，且$\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant1$ 是有界函数，所以$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{\cos x}=0$. 故正确答案为 B.

7.【答案】B

【解析】$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\tan x)^{\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{x}-0}e^{\ln(\tan x)^{\cos x}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{x}-0}\cos x\ln\tan x}$，且 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{x}-0}\cos x\ln\tan x=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{x}-0}\cos x\ln\tan x=$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{x}-0}\dfrac{\ln\tan x}{\frac{1}{\cos x}}\underline{\underline{洛必达法则}}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{x}-0}\dfrac{\cos x}{\sin^2x}=0$

则 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\tan x)^{\cos x}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{x}-0}\cos x\ln\tan x}=e^0=1$，故正确答案为 B.

8.【答案】A

【解析】因为$\lim\limits_{x\to0^+}(1+\dfrac{1}{x})^x=e^{\lim\limits_{x\to0^+}x\ln(1+\frac{1}{x})}$，且

$\lim\limits_{x\to0^+}x\ln(1+\dfrac{1}{x})=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}\underline{\underline{洛必达法则}}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{x+1}=0$，所以$\lim\limits_{x\to0^+}(1+\dfrac{1}{x})^x=1$，即有 A 选项正确，B 选项错误；另外，根据$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$ 可知，$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{x})^x=e^{-1}$，C、D 选项均错误．故正确答案为 A.

三、计算题

1.【解析】$\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x(x+1)(x+2)}{(x-3)(x+2)}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x(x+1)}{x-3}$

$$=\frac{-2\times(-2+1)}{-2-3}=-\frac{2}{5}$$

2.【解析】$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0$$

3.【解析】由$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$得，$b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax\right)=-1+\lim\limits_{x\to\infty}(1-a)x$，

则$b=-1$且$1-a=0$，即$a=1$，$b=-1$

4.【解析】$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3(2x+1)-x^2(2x^2-1)}{(2x^2-1)(2x+1)}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2}{(2x^2-1)(2x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\left(2-\frac{1}{x}\right)\left(2+\frac{1}{x}\right)}=\frac{1}{4}$$

5.【解析】设$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}=A$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}=A$

又$A=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}=2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n n!}{(n+1)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}2\left[\dfrac{2^n n!}{n^n}\cdot\dfrac{n^n}{(n+1)^n}\right]$

$=2A\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\dfrac{2}{\mathrm{e}}A$，则可知$A=0$

6.【解析】由$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$得，

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}-a\right)$，则$a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}$，即

$a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=1$ 此时，

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}\right)=-\dfrac{1}{2}$

7.【解析】$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f(a)}\right]^x=\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{x\ln\frac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f(a)}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\frac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f(a)}}$，又$f'(a)$存在且$f(a)>0$，则$\lim\limits_{x\to\infty}x\ln$

$\dfrac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f(a)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\dfrac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f(a)}}{\dfrac{1}{x}}\ \underline{\text{洛必达法则}}\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}=\dfrac{f'(a)}{f(a)}$，故有

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f(a)}\right]^{x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\frac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f(a)}}=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$$

8.【解析】$\lim\limits_{x\to0+0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to0+0}e^{\ln\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to0+0}\frac{\ln\cos\sqrt{x}}{x}}$，又

$$\lim_{x\to0+0}\frac{\ln\cos\sqrt{x}}{x}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to0+0}\frac{-\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}}=-\frac{1}{2},$$

则 $\lim\limits_{x\to0+0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0+0}\frac{\ln\cos\sqrt{x}}{x}}=e^{-\frac{1}{2}}$

9.【解析】由积分中值定理得，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{n}^{n+a}x\sin\frac{1}{x}dx=\lim\limits_{n\to\infty}a\theta\sin\frac{1}{\theta}$（其中 $n<\theta<n+a$），

则 $\lim\limits_{n\to\infty}a\theta\sin\frac{1}{\theta}=a\lim\limits_{\theta\to\infty}\theta\sin\frac{1}{\theta}=a\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=a$

第二章　导数与微分

一、填空题

1. 设$f(x)$在x_0处可导，则

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-3h)-f(x_0)}{h}=$ ________.

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=$ ________.

(3) $\lim\limits_{h\to\infty}h\left[f\left(x_0+\dfrac{1}{h}\right)-f\left(x_0-\dfrac{1}{2h}\right)\right]=$ ________.

(4) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{f(x_0)-f(x_0+h)}=$ ________.

(5) 当$n\to+\infty$时，x_n与y_n为等价无穷小，则$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{f(x_0+x_n)-f(x_0-y_n)}{x_n}=$ ________.

2. 若$f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2tx}$，则$f(t)$的极小值为________.

3. 设函数$y=f(x)$由方程$e^{2x+y}-\cos(xy)=e-1$所确定，则曲线$y=f(x)$在点$(0,1)$处的法线方程为________.

4. 函数$z=x^2+y^2$在条件$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1(a>0,b>0)$下的极小值为________.

5. 设$f(x)$在$x=0$可导，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{2^{f(x)}-1}=1$，则$f'(0)=$ ________.

6. 当$x=$ ________时，函数$y=x\cdot 2^x$取得极小值.

7. 设函数$y=(x-1)x^{\frac{2}{3}}$，则函数极值点为________.

8. 设$y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x^2}}$，则$y''|_{x=0}=$ ________.

二、选择题

1. 若$3a^2-5b<0$，则方程$x^5+2ax^3+3bx+4c=0$(　　).

(A)无实根　　(B)有唯一实根

(C)有三个不同的实根　　(D)有五个不同的实根

2. 曲线$y=e^{1/x^2}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$的渐近线有(　　).

(A)1 条　　(B)2 条　　(C)3 条　　(D)4 条

3. 设$f(x)$在$x=x_0$处附近四阶连续可导，且$f'(x_0)=f''(x_0)=f'''(x_0)=0$，$f^{(4)}(x_0)<0$，则$y=f(x)$在$x=x_0$处(　　).

(A)有极大值　　(B)有极小值　　(C)有拐点　　(D)无极值和拐点

4. 当 $x>0$ 时，曲线 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$________.

(A)有且仅有水平渐近线

(B)有且仅有铅直渐近线

(C)既有水平渐近线，也有铅直渐近线

(D)既无水平渐近线，也无铅直渐近线

5. 设函数 $f(x)$、$g(x)$ 在 a 点的某邻域内二阶可导，且 $f(a)=g(a)=0$，$f'(a)<0$，$g'(a)>0$，令 $\varphi(x)=\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t$，则(　　).

(A) $x=a$ 是 $\varphi(x)$ 的极小值点

(B) $x=a$ 是 $\varphi(x)$ 的极大值点

(C) $(a,\ \varphi(a))$ 是曲线 $y=\varphi(x)$ 的拐点

(D)以上都不对

6. 曲线 $y=(x-1)^3$ 的拐点是(　　).

(A) $(-1,\ 8)$　(B) $(1,\ 0)$　(C) $(0,\ -1)$　(D) $(2,\ 1)$

7. 若 $f'(x_0)=0$ 且 $f''(x_0)>0$，则点 x_0 一定是 $f(x)$ 的(　　).

(A)极大值点　(B)极小值点　(C)最大值点　(D)最小值点

三、计算题

1. 设 $f(x)=\begin{cases} x^{2x}, & 当\ x>0, \\ x+2, & 当\ x\leqslant 0, \end{cases}$ 求 $f(x)$ 的极值.

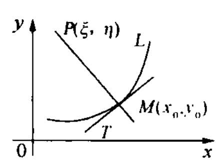
2. 求下列函数在指定点处的导数：

(1) $f(x)=(\arcsin x)\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$，求 $f'(0)$；

(2)设 $f(x)=\varphi(a+bx)-\varphi(a-bx)$，其中 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处可导，求 $f'(0)$；

(3)设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=\dfrac{1}{3}$，又对任意的 x，有 $f(3+x)=3f(x)$，求 $f'(3)$.

3. 如右图所示，设曲线 L 的方程为 $y=f(x)$，且 $y''>0$，MT、MP 分别为该曲线在点 $M(x_0,\ y_0)$ 处的切线和法线，已知线段 MP 的长度为 $\dfrac{[1+y_0'^2]^{3/2}}{y''_0}$（其中 $y'_0=y'(x_0)$，$y''_0=y''(x_0)$），试推导出点 $P(\xi,\ \eta)$ 的坐标表达式.



4. 求下列函数的导数与微分：

(1)设 $y=\mathrm{e}^{\tan\frac{1}{x}}\cdot\sin\dfrac{1}{x}$，求 $\mathrm{d}y$；

(2)设 $\begin{cases} x=\cos(t^2), \\ y=t\cos(t^2)-\int_1^{t^2}\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cos u\mathrm{d}u, \end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 在 $t=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ 的值；

(3)设 $F(x)=\sin(x^2)\int_0^1 f(t\sin x^2)\mathrm{d}t$，求 $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}$；

(4)设 $\sin(x^2+y^2)+\mathrm{e}^x-xy^2=0$，求 y'；

(5)已知$y=f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)$，$f'(x)=\arctan(x^2)$，求$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$；

(6)由方程组$\begin{cases}x=t^2+2t,\\t^2-y+a\sin y=1\end{cases}$ $(0<a<1)$确定y为x的函数，求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

5. 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} & x>0\\ \sin x-1 & x\leqslant 0\end{cases}$，讨论$f(x)$在$x=0$点处的连续性，可导性.

6. 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0,\end{cases}$ 其中$\varphi(x)$具有二阶导数，且$\varphi(0)=1$，$\varphi'(0)=0$

(1)确定a的值，使$f(x)$在$x=0$处连续；

(2)求$f'(x)$的表达式；

(3)讨论$f'(x)$在$x=0$处的连续性.

7. 证明：当$x>0$时，$(x^2-1)\ln x\geqslant(x-1)^2$.

8. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有连续导数，且存在常数a_1、b_1、a_2、b_2 $(a_1<a_2)$使得$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(a_1x+b_1)]=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(a_2x+b_2)]=0$，

证明：对任意$c\in(a_1,a_2)$，$\exists\xi$，使$f'(\xi)=c$.

9. 设$y=f(x)=\dfrac{(x^2+2x-3)e^{\frac{1}{x}}}{(x^2-1)\arctan x}$，求函数$f(x)$渐近线.

10. 设$f(x)$在区间$[a,b]$上具有二阶导数，且$f(a)=f(b)=0$，$f'(a)\cdot f'(b)>0$，证明存在$\varepsilon\in(a,b)$和$\eta\in(a,b)$，使$f(\varepsilon)=0$及$f''(\eta)=0$.

11. 设$f(x)$在区间$[0,1]$上连续，试证明存在$\varepsilon\in(0,1)$，使$\int_0^{\varepsilon}f(t)\,dt=(1-\varepsilon)f(\varepsilon)$；若又设$f(x)>0$且单调减少，则这种$\varepsilon$是唯一的.

12. 设$y=(\arcsin x)^2$

(Ⅰ)证明$(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n-1)xy^{(n+1)}-n^2y^{(n)}=0\quad(n\geqslant 1)$；

(Ⅱ)求$y^{(n)}(0)$的值.

答案与解析

一、填空题

1.【答案】(1)$-3f'(x_0)$　(2)$2f'(x_0)$　(3)$\dfrac{3}{2}f'(x_0)$　(4)$-\dfrac{1}{f'(x_0)}(f'(x_0)\neq 0)$

(5)$2f'(x_0)$

【解析】(1)$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-3h)-f(x_0)}{h}=-3\lim\limits_{-3h\to 0}\dfrac{f[x_0+(-3h)]-f(x_0)}{-3h}=-3f'(x_0)$

(2)$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}\right]=2f'(x_0)$

(3)$\lim\limits_{h\to\infty}h\left[f\left(x_0+\dfrac{1}{h}\right)-f\left(x_0-\dfrac{1}{2h}\right)\right]$

$$=\lim_{\frac{1}{h}\to 0}\left[\frac{f\left(x_0+\frac{1}{h}\right)-f(x_0)}{\frac{1}{h}}+\frac{1}{2}\frac{f\left(x_0-\frac{1}{2h}\right)-f(x_0)}{-\frac{1}{2h}}\right]$$

$$=f'(x_0)+\frac{1}{2}f'(x_0)=\frac{3}{2}f'(x_0)$$

(4) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{f(x_0)-f(x_0+h)}=-\dfrac{1}{\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(f'(x_0)\neq 0)$

(5) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{f(x_0+x_n)-f(x_0-y_n)}{x_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{f(x_0+x_n)-f(x_0)}{x_n}+\dfrac{y_n}{x_n}\dfrac{f(x_0-y_n)-f(x_0)}{-y_n}\right]$

$=f'(x_0)+f'(x_0)\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{y_n}{x_n}=2f'(x_0)$

2.【答案】$-\dfrac{1}{2e}$

【解析】$f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t(1+\dfrac{1}{x})^{2tx}=t\left[\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x\right]^{2t}=te^{2t}$，则$f'(t)=(1+2t)e^{2t}$. 令$f'(t)=0$，则$t=-\dfrac{1}{2}$，且$f''(-\dfrac{1}{2})=(4+4t)e^{2t}\Big|_{t=-\frac{1}{2}}=2e^{-1}>0$，故$t=-\dfrac{1}{2}$是$f(t)$的极小值点，极小值为$f(-\dfrac{1}{2})=-\dfrac{1}{2}e^{-1}=-\dfrac{1}{2e}$.

3.【答案】$x-2y+2=0$

【解析】方程 $e^{2x+y}-\cos(xy)=e-1$ 两边求导得$(2+y')e^{2x+y}+(y+xy')\sin(xy)=0$. 在点$(0,1)$处，$(2+y')e=0$，则$y'=-2$，法线斜率为$\dfrac{-1}{-2}=\dfrac{1}{2}$，法线方程为$y-1=\dfrac{x}{2}$，即$x-2y+2=0$.

4.【答案】$\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$

【解析】令$f(x,y)=x^2+y^2+\lambda\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}-1\right)$，则由$\begin{cases}f_x=2x+\dfrac{\lambda}{a}=0\\ f_y=2y+\dfrac{\lambda}{b}=0\\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1\end{cases}$，解得$\lambda=-\dfrac{2a^2b^2}{a^2+b^2}$，

$x=\dfrac{ab^2}{a^2+b^2}$，$y=\dfrac{a^2b}{a^2+b^2}$

函数$z=x^2+y^2$在点$\left(\dfrac{ab^2}{a^2+b^2},\dfrac{a^2b}{a^2+b^2}\right)$取得极小值，极小值为

$$\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}\right)^2+\left(\frac{a^2b}{a^2+b^2}\right)^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

5.【答案】0

【解析】因$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{2^{f(x)}-1}=1$ 且 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x-1)=0$，故$\lim\limits_{x\to 0}(2^{f(x)}-1)=2^{f(0)}-1=0$，则有