面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

弹性力学

（第2版）

杨桂通

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

面 向 2 1 世 纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century

弹性力学

T A N X I N G L I X U E

（第2版）

杨桂通

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书是面向21世纪课程教材。

本书力图用现代的、实用的观点组织教学内容，向学科前沿开设接口，在讲述方法上作了一些革新。全书共分10章，分别为：绪论、应力、应变、广义胡克定律、弹性力学边值问题、平面问题、能量原理及其应用、柱体的扭转、薄板问题、弹性力学专门问题。

本次修订保持了第1版的主要内容和风格，仍以简明易懂为原则，同时降低难度，删去了部分原本列为选学的内容，在选学部分增加了用MATLAB计算弹性力学问题的纲要和例题，在附录中补充了MATLAB简介。

本书可作为高等学校工科有关专业的弹性力学课程教材，也可供工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

弹性力学/杨桂通编. --2版. --北京:高等教育出版社,2011.12
ISBN 978-7-04-033971-0

Ⅰ. ①弹… Ⅱ. ①杨… Ⅲ. ①弹性力学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O343

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第248732号

策划编辑 水 渊　责任编辑 水 渊　封面设计 张 楠　版式设计 余 杨
责任校对 杨凤玲　责任印制 韩 刚

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 三河市骏杰印刷厂
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 16.25
字　　数 290千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
　　　　 http://www.landraco.com.cn
版　　次 1998年6月第1版
　　　　 2011年12月第2版
印　　次 2011年12月第1次印刷
定　　价 25.70元

物 料 号 33971-00

第2版前言

本书第1版出版已有近14年了，在这段时间，我一直关注着弹性力学基础教育中的问题和发展趋势，以及与之相适应的教材建设问题，也有一些老师对这门课程的教材提出了很好的建议。因此有必要进行一次修订。

本次修订基本上保持了第1版的主要内容和风格，仍以简明易懂为原则，同时降低难度，删去艰涩内容，引进先进计算方法。例如，删去了复变函数方法及有关附录等。在选学部分则增加了用 MATLAB 软件计算弹性力学问题的纲要和例题，以附录形式补充了 MATLAB 简介。

在本次修订过程中，太原理工大学王志华教授和阎晓鹏博士根据他们在教学中的经验和体会给了我许多很好的建议和帮助，向他们表示感谢。

知名画家赵青教授再次为本书绘制了科学家肖像插图，她的作品为本书增加了光彩，谨致谢意。

清华大学徐秉业教授审阅了全部书稿，提出了许多宝贵的修改意见，在此致以衷心的感谢。

杨桂通

2011年5月

第1版前言

我原想修订一次我那本1980年由高等教育出版社出版的《弹塑性力学》，因为16年过去了，还是经常有读者来信询问或求索。而我对那本书常感到有些欠缺，很想做一次认真的增删，为此也做了不少准备工作。但是有朋友建议我考虑为更广大的读者提供一本新的简明的弹性力学教材。我一直就在工业大学任教，多次为土木工程系的学生讲授弹性力学课程，后来又任太原工业大学①校长十多年，对工科各专业的课堂教学和教材，特别是力学课程的教法、教材十分关注，也颇有感情。于是我接受了这个极好的建议。这样，为工科有关专业的学生写一本新的弹性力学教材，就成了我这一年来的一件大事。

当我开始动笔的时候，又感到有许多难处。因为弹性力学是固体力学学科中最基础、也是最重要的，理论性与应用性都很强，既是经典学科，又是发展中的、有生命力的学科，想让学生掌握和了解的内容似乎很多很多。此外，在培养一名工程师的整个教学过程中，所能给弹性力学课程安排的学时是有限的，所以内容的选取以及讲解方法放在什么层次上，如何反映新的时代特征，如何为学生进一步的学术追求打下基础，等等，都是难于裁定的重要问题。

"无边落木萧萧下，不尽长江滚滚来"。这本书在一种力量的推动下，现在已经问世了。在对本书的各种要求之下，我们选择了既强调系统、结构严谨、取材难易适度，又要概念清晰，简明易懂，尽量与现代文献接近，少列大套公式，避开数学难点，克服艰涩难懂、不得要领之弊端，希望它可供工科非力学专业弹性力学课程讲授54学时之用。全书共分十章，前九章是必读的。其中第十章扼要地介绍几个弹性力学的专门问题，主要是考虑工程应用和不同专业之需要，大部分不做严格推证。每一个专题按讲授2学时安排内容，作为选修，也可全部留给学生自学，不包括在54学时之内。此外，出于同一种考虑，我们在第六章安排了加注星号*的内容，也不作必修。此外还因为，在这几节中，所介绍的复变函数方法是解弹性力学平面问题最完美的一种方法，实难舍弃，而对某些相关专业来说还有取此而舍其他之便。

本书在完成过程中得到了我的学生和朋友树学锋博士、马宏伟博士和其他应用力学研究所的同学、同事和朋友们的热情帮助；赵青女士绘制了肖像插图。作者对他们诚致谢意。

① 1997年太原工业大学与山西矿业学院合并为太原理工大学。

清华大学徐秉业教授以及河海大学卓家寿教授审阅了全部书稿，提出了许多宝贵修改意见。高等教育出版社有关同志对本书的出版给予了支持和帮助。作者在此一并向他们致以衷心的感谢。

杨桂通

1997年1月于太原工业大学

目　录

第一章 绪　论

§1-1 弹性力学

弹性力学是材料力学课程的延续。它是固体力学的一个分支学科，是研究可变形固体在外力、温度变化和边界约束变动等作用下的弹性变形与应力状态的科学。所谓弹性，是指物体的应力与应变之间有着一一对应的关系，而且当外作用除去后，物体可恢复到原来的状态。在这门课程中，仅限于讨论理想弹性体，即应力与应变之间的关系为线性函数，也就是满足大家所熟知的胡克定律①。当外力未超过某一限度时，大多数固体材料都具有这种属性。

实际上，在材料力学课程中已经用胡克定律讨论过了各种简单的构件。在那里采用了一系列几何的和物理的简化假定，从而可以得到能满足一般工程实用的应力和位移的计算公式。弹性力学可不使用某些未加证明的假定便可以得到比材料力学更加精确的解答。一般说来，所讨论的物体的形状可以是任意的。

应当指出，这并不是说，弹性力学不再需要引进某些假设，相反，若不对具体工程对象进行抽象化，弹性力学仍然是寸步难行的。实际上，在本课程中仍必须引进某些假定并采取简化模型的形式进行研究。当然，这种模型应当在一定条件下反映了该研究对象的基本形态的主要力学特征。

学习本课程的目的主要是使学生掌握确定一般工程结构物体在外作用下的变形、内力分布与承载能力的方法，以及为进一步研究工程结构的强度、振动、稳定性、破坏、失效等力学问题打下必要的理论基础。

§1-2 基本假定

应当指出，实际的固体材料通常有晶体与非晶体两种。晶体是由许多离子、原子按一定规则排列起来的空间格子构成，它们中间常有一些缺陷存在。非晶体是由许多分子的集合组成的高分子化合物。物体中的缺陷、夹杂、孔洞等构成了固体材料的微观结构的复杂性。本课程采用了物体的连续性假定和各向同性

---

① 由胡克（Hooke，R.）于1678年提出。中国郑玄（公元127—200）在《考工记·弓人》的注中已提到这一概念（详见第四章关于郑玄的简介）。

假定,不仅是为了避免数学分析上的困难,重要的是根据这些假定所作出的力学分析被广泛的试验与工程实践证实是可行的。

以后的讨论都是基于以下几项重要的基本假定:

(1) 连续性假定。即认为所研究的固体材料内各质点之间不存在空隙,物体的物质粒子连续地充满了物体所占的空间,且认为物体在变形后仍保持这种连续性。这样,物体的一切物理量,如密度、应力、应变、位移等都将是物体所占空间点的连续函数。

(2) 均匀性假定。即认为所研究的物体是由同一类型的均匀的固体材料所构成,其各部分的物理性质是相同的,并不因坐标位置的变化而变化。例如,物体的弹性性质处处都相同。这样,我们研究问题的时候,就可以从中取出任一单元来进行分析。

(3) 各向同性假定。在本课程中,均讨论各向同性的物体。即认为物体在各方向具有相同的物理性质,物体的弹性常数不随坐标方向的改变而变化。实际上,有不少材料不具有这种性质,像木材、竹材和某些人工加强后的构件等,本书不讨论这类问题。

(4) 小变形假定。即认为物体在外力或其他外部作用(如温度等)的影响下,物体所产生的变形,与其本身的几何尺寸相比属于高阶小量,可以不考虑因变形而引起的尺寸变化。这样,就可以用变形前的几何尺寸来代替变形后的尺寸,使得在进行力学分析时使问题大为简化。例如,在考虑应变和位移的关系时就可以略去位移公式中的二阶小量等,使基本方程线性化。

以上假定是本书讨论问题的基础,此外还有像完全弹性和无初始应力的假定等。超出以上范围的问题将有专门学科进行研究,如非线性弹性力学、塑性力学、各向异性体弹性力学等。

§1-3 弹性力学的发展及研究方法

近代弹性力学,可认为始于柯西(Cauchy, A. -L.)在1828年引进应变与应力的概念,建立了平衡微分方程、边界条件、应变与位移关系。它的发展进程对促进数学和自然科学基本理论的建立和发展,特别是对促进造船、航空、建筑、水利、机械制造等工业技术的发展起了相当重要的作用。柯西的工作是近代弹性力学及近代连续介质力学的一个起点。之后,世界各国的一大批学者相继做出了重要贡献,使得弹性力学迅速发展起来,并根据实际的需要形成了一些专门分支学科,如热弹性力学、弹性动力学、弹性系统的稳定理论、断裂力学、损伤力学等。

弹性力学为社会发展、人类的文明进步起了至关重要的作用。交通业、造船、铁路建筑、机械制造、航空航天事业、水利工程、房屋建筑、军事工程等的发展,都离不了力学工作者的贡献。从 18 世纪开始,涌现出了一大批力学家,像柯西、欧拉(Euler,L.)、圣维南(Saint-Venant,A. J. C. B. de)、纳维(Navier,C. -L. -M. -H.)、基尔霍夫(Kirchhoff,G. R.)、拉格朗日(Lagrange,J. -L.)、乐甫(Love,A. E. H.)、铁摩辛柯(Timoshenko,S. P.)及钱伟长、钱学森、徐芝纶、胡海昌等。他们都对弹性力学的发展做出了贡献,他们的优秀著作培养了一代又一代的工程师和科学家。详见参考文献[45],[47]。

弹性力学虽是一门古老的学科,但现代科学技术的发展给弹性力学提出了越来越多的理论问题和工程应用问题,弹性力学在不少重要领域展现出它的重要性。本书将介绍其基本原理和实用的解题方法。

弹性力学问题的求解方法可分为三种类型:

(1) 数学方法

就是用数学分析的工具给出弹性力学边值问题进行求解,从而得出物体的应力场和位移场等。这种方法要解含未知量的偏微分方程,对很多问题的精确求解难度很大,故而常采用近似解法。例如,以后将介绍的基于能量原理的变分方法,其中主要是里茨(Ritz,W.)法,伽辽金(Galerkin,B. G.)法等。此外,还有所谓的逆解法和半逆解法。

另一种数学方法是数值方法。特别是广泛应用电子计算机以后,数值方法对大量的弹性力学问题十分有效。在数值方法中,常见的有差分法、有限元法及边界元法等。目前已广泛应用于弹性力学各类问题的计算中。

(2) 试验方法

就是利用机电方法、光学方法、声学方法等来测定结构部件在外力作用下应力和应变的分布规律,如光弹性法、云纹法等。

(3) 试验与数学相结合的方法

这种方法常用于形状非常复杂的弹性结构。例如,对结构的特殊部位的应力状态难以确定,可以用光弹性方法测定,作为已知量,置入数值计算中,特别是当边界条件难以确定时,则需两种方法结合起来,以求得可靠的解答。

本书主要介绍数学方法。

第二章　应　　力

§2-1　体力和面力

作用在物体上的外力有两种类型，即面力和体力。所谓体力是作用在物体微粒体积上的力，称为质量力，如重力、惯性力、电磁力等。面力是沿着物体表面 S 上的分布力，如风力、液体压力、两物体间的接触力等。

为了表明物体在坐标系 $Oxyz$ 内的一点 C 所受体力的大小和方向，在 C 点的邻域取一包含 C 在内的微小体积元素 ΔV，设 ΔV 的体力为 $\Delta \boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}$，则体力按体积计算的平均集度为 $\Delta \boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}/\Delta V$，当 ΔV 无限缩小而趋于 C 点时，$\Delta \boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}/\Delta V$ 将趋于一定的极限矢量 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}$，即

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}}{\Delta V} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{b}} \tag{2-1}$$

显然，体力矢量 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}$ 的方向就是 ΔV 内的体力的极限方向。体力的单位为 $\mathrm{N/m^3}$。

设 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}$ 是物体内 C 点邻域单位质量的质量力，并令 $m=\rho \mathrm{d}V$ 是体积 $\mathrm{d}V$ 物体微粒的质量，ρ 为质量密度，则 $m\boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}$ 是作用在 $\mathrm{d}V$ 中质量上的力，而单位体积的力则为 $\rho \boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}$，称为体力。类似地讨论可以给出一点 P 的面力矢量 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{S}}$。为此，设在物体表面上一点 P 的邻域（含 P 在内）取微小面元 ΔS，令 ΔS 上的面力为 $\Delta \boldsymbol{F}_{\mathrm{S}}$，则面力的平均集度为 $\Delta \boldsymbol{F}_{\mathrm{S}}/\Delta S$，则有（图 2-1）

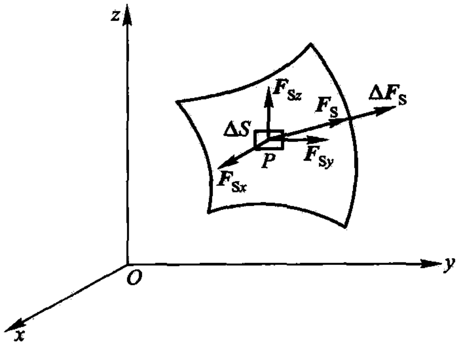

图 2-1

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{F}_S}{\Delta S}=\boldsymbol{F}_S \tag{2-2}$$

此处 $\boldsymbol{F}_S$ 是作用在物体单位面积上的面力矢量，而作用在 $\mathrm{d}S$ 上的面力则为 $\boldsymbol{F}_S\mathrm{d}S$。

§ 2-2 应力与应力张量

在外力作用下，物体将产生应力和变形，也就是物体中诸元素之间的相对位置发生变化，由于这种变化，便产生了企图恢复其初始状态的附加相互作用力。用以描述物体在受力后任何部位的内力和变形的力学量是应力和应变。本章将讨论应力矢量和某一点处的应力状态。

为了说明应力的概念，假想把受一组平衡力系作用的物体用一平面 C 分成 A 和 B 两部分(图 2-2)。如将 B 部分移去，则 B 对 A 的作用应代之以 B 部分对 A 部分的作用力。这种力在 B 移去以前是物体内 A 与 B 之间在截面 C 上的内力，且为分布力。如从 C 面上点 P 处取出一包括点 P 在内的微小面积元素 ΔS，而 ΔS 上的内力矢量为 $\Delta \boldsymbol{p}$，则内力的平均集度为 $\Delta \boldsymbol{p}/\Delta S$，如令 ΔS 无限缩小而趋于点 P，则在内力连续分布的条件下 $\Delta \boldsymbol{p}/\Delta S$ 趋于一定的极限 $\boldsymbol{\sigma}$，即

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{p}}{\Delta S}=\boldsymbol{\sigma} \tag{2-3}$$

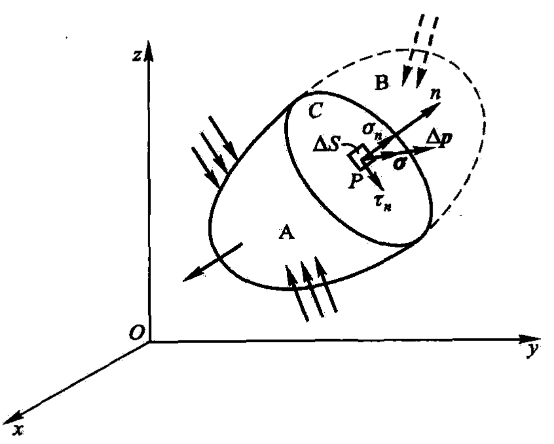

图 2-2

这个极限矢量 $\boldsymbol{\sigma}$ 就是物体在过 C 面上点 P 处的应力。由于 ΔS 为标量，故 $\boldsymbol{\sigma}$ 的方向与 $\Delta \boldsymbol{p}$ 的极限方向一致。

应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 可分解为所在平面的外法线方向和切线方向这样两个分量。沿应力所在平面的外法线方向 n 的应力分量称为正应力，记作 σ_n。沿切线方向的应力分量称为切应力，记做 τ_n。此处脚注 n 标明其所在面的外法线方向，由此，ΔS 面上的正应力和切应力分别为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_n &= \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{p}_n}{\Delta S} \\ \tau_n &= \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{p}_t}{\Delta S}\end{aligned}\right\} \tag{2-4}$$

其中 $\Delta \boldsymbol{p}_n$，$\Delta \boldsymbol{p}_t$ 分别为 ΔS 上的内力矢量 $\Delta \boldsymbol{p}$ 在平面 C 的法向和切向分量。

如果图 2-2 中 n 的方向与 y 坐标轴的方向一致（图 2-3），则此时有

$$\sigma_n = \sigma_y \text{ 及 } \tau_n = \tau_y \tag{2-5}$$

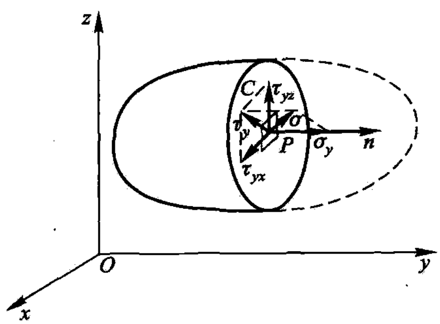

图 2-3

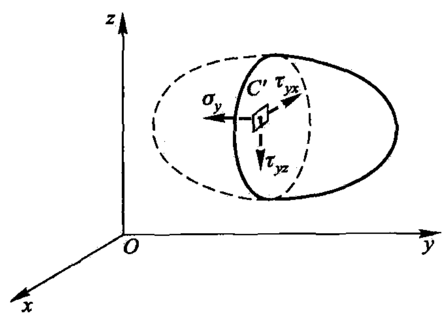

图 2-4

其中 τ_y 是作用在截面 C 内的切应力，如将 τ_y 分解为沿 x 轴和 z 轴的两个分量，并记作 τ_{yx} 和 τ_{yz}，则过 C 面上点 P 的应力分量为 σ_y，τ_{yx}，τ_{yz}。以后，对正应力只用一个字母的下标标记，对切应力则用两个字母标记，其中第一个字母表示应力所在面的外法线方向；第二个字母表示应力分量的指向。正应力的正负号规定为：拉应力为正，压应力为负。切应力的正负号规定分为两种情况：当其所在面的外法线与坐标轴的正方向一致时，则以沿坐标轴正方向的切应力为正，反之为负；当所在面的外法线与坐标轴的负方向一致时，则以沿坐标轴负方向的切应力为正，反之为负。图 2-3 及图 2-4 中的各应力分量均为正。应力及其分量的单位为 Pa。

在以上的讨论中，过点 P 的平面 C 是任选的。显然，过点 P 可以做无穷多个这样的平面 C。或者说，过点 P 有无穷多个连续变化的 n 方向。不同面上的应力是不同的。这样，就产生了一个到底如何描绘一点处的应力状态的问题。下面讨论这个问题。

为了研究点 P 处的应力状态，在点 P 处沿坐标轴 x,y,z 方向取一个微小的平行六面体(图 2-5)，其 6 个面的外法线方向分别与 3 个坐标轴的正负方向重合，各边长分别为 $\Delta x,\Delta y,\Delta z$。假定应力在各面上均匀分布，于是各面上的应力便可用作用在各面中心点的一个应力矢量来表示，每个面上的应力矢量又可分解为 1 个正应力和 2 个切应力分量。按前面约定的表示法，图 2-5 给出的各应力分量均为正方向。

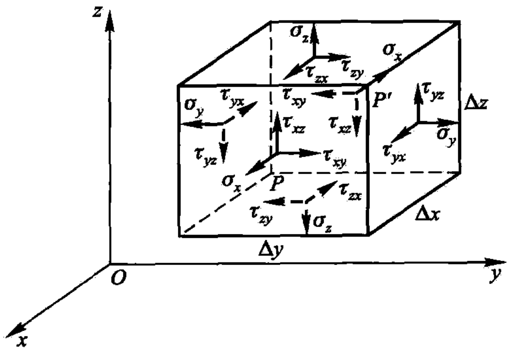

图 2-5

由图 2-5 可知，当微小的平行六面体趋于无穷小时，六面体上的应力就代表点 P 处的应力。因此，点 P 处的应力分量共有 9 个，其中有 3 个正应力分量、6 个切应力分量(以后将证明切应力互等定理，从而，实际上独立的切应力分量只有 3 个)。把这 9 个应力分量按一定规则排列，令其中每一行为过点 P 的一个面上的 3 个应力分量，即

$$\begin{matrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{matrix} \tag{2-6}$$

以上这 9 个应力分量定义为一个新的量 $\boldsymbol{\Sigma}$，它描绘了一种物理现象，即点 P 处的应力状态。$\boldsymbol{\Sigma}$ 是对坐标系 $Oxyz$ 而言的，当坐标系变换时，它们按一定的变换式变换成另一坐标系 $Ox'y'z'$ 中的 9 个量，即

$$\begin{matrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'x'} & \sigma_{y'} & \tau_{y'z'} \\ \tau_{z'x'} & \tau_{z'y'} & \sigma_{z'} \end{matrix}$$

这 9 个分量描绘同一点 P 的同一物理现象，所以它们定义的仍为 $\boldsymbol{\Sigma}$。而 $\sigma_x,\sigma_y,\cdots$ 这 9 个量就称为 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的元素。数学上，**在坐标变换时，服从一定坐标变**

换式的 9 个量所定义的量称为二阶张量。根据这一定义，$\boldsymbol{\Sigma}$ 是一个二阶张量，并称为应力张量。以后将证明，应力张量为一对称二阶张量。各应力分量即为应力张量的元素。在 §2-3 中将给出应力分量在坐标变换时服从的变换公式。

应力张量通常表示为

$$(\sigma_{ij})=\begin{pmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z\end{pmatrix} \tag{2-7}$$

其中 $i,j=x,y,z$，当 i,j 任取 x,y,z 时，便得到相应的分量①。

式(2-7)与 3×3 阶的矩阵写法相同。如令 i 代表行，j 代表列，行列数 1，2，3 对应于 x,y,z。例如，第二行第三列的元素为 τ_{23}，即应力分量为 τ_{yz}，余类推。

应当指出，物体内各点的应力状态，一般说来是不同的，即非均匀分布的，亦即各点的应力分量应为坐标 x,y,z 的函数。所以，**应力张量 σ_{ij} 与给定点的空间位置有关，谈到应力张量总是针对物体中的某一确定点而言的，以后将看到，应力张量 σ_{ij} 完全确定了一点处的应力状态。**

张量符号与下标记号法使冗长的弹性力学公式变得简明醒目，在文献中已被广泛应用，今后将逐渐熟悉这种标记法。

§2-3 二维应力状态与平面问题的平衡方程

上一节中讨论力和应力概念时，是从三维受力物体出发的，其中点 P 是从一个三维空间中取出来的点。现为简单起见，首先讨论平面问题。掌握了平面问题以后，再讨论空间问题就比较容易了。

平面问题的特点是物体所受的面力和体力以及其应力都与某一个坐标轴(例如 z 轴)无关。平面问题又分为平面应力问题与平面应变问题。

在平面应力问题中，所考虑的物体是一个很薄的平板，荷载只作用在板边，且平行于板面(图 2-6)，即 z 方向的体力分量 F_{bz} 及面力分量 F_{Sz} 均为零。故如取图 2-6 中的坐标系，则板面上($z=\pm\delta/2$ 处)应力分量为

$$(\sigma_z)_{z=\pm\frac{\delta}{2}}=0$$

$$(\tau_{zx})_{z=\pm\frac{\delta}{2}}=(\tau_{zy})_{z=\pm\frac{\delta}{2}}=0$$

① $\sigma_{xx},\sigma_{yy},\sigma_{zz}$ 已简写为 $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z$。此外，张量有多种记法，为简便计，今后用分量记法(也称指标记法)，如将(σ_{ij})记作 σ_{ij}。