本书获得重庆市科学技术协会学术著作出版资助

抗混叠图像多尺度几何分析技术及其应用

冯 鹏／编著 魏 彪／审校

科学出版社

本书获得重庆市科学技术协会学术著作出版资助

抗混叠图像多尺度几何分析技术及其应用

冯　鹏　编著
魏　彪　审校

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书在简要介绍小波变换、Ridgelet 变换及 Curvelet 变换的基础上，针对多尺度几何分析的典型代表——Contourlet 变换所存在的频谱混叠问题，从方向滤波器组和拉普拉斯塔形变换的构成原理和实现方法两个方面，系统、深入地分析了频谱混叠的来源，提出了将混叠抑制转换为滤波器设计的方案，构造了一种新的多尺度几何分析方法——抗混叠 Contourlet 变换。本书还系统地研究了抗混叠 Contourlet 变换系数统计分布模型，并将其应用于遥感图像降噪、眼底视网膜图像增强、红外图像插值等领域中，获得了良好效果。

本书适合电子科学与技术、信息与通信工程、计算机科学与技术、控制科学与工程等领域的科技工作者与工程技术人员阅读，同时也可作为相关专业的研究生专业课教材与高年级本科生专业选修课教材。

图书在版编目(CIP)数据

抗混叠图像多尺度几何分析技术及其应用 / 冯鹏编著.
—北京：科学出版社，2012.7
ISBN 978-7-03-035030-5
Ⅰ.①抗… Ⅱ.①冯… Ⅲ.①几何-尺度分析-应用-图像处理 Ⅳ.①TP391.41

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 138659 号

责任编辑：韩卫军 陈 靖 / 封面设计：陈思思

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

四川煤田地质制图印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2012 年 7 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2012 年 7 月第一次印刷 印张：10.5
字数：210 千字
定价：43.00 元

前　言

人类对物质世界信息的采集、处理、控制等经历了手工化、机械化及自动化的过程，现今已迈入了信息化阶段。目前，人类正处在一个信息爆炸的时代。新的信息每时每刻都在涌现，给人类的生活带来了极大的便利和更多的选择，同时也让人们开始思考：如何才能从海量的信息中找到需要的内容？换言之，从海量的信息中提取信息的关键特征已日益受到广泛关注。

图像信息作为信息呈现或表达的一种重要手段，是人类观测客观事件的重要信息来源，在卫星遥感、机器视觉、生物医学、交通、公安、军事、地矿等众多领域已有广泛应用，这使图像信息分析技术受到广泛重视。自 20 世纪 60 年代初以来，图像信息分析技术已有半个世纪的发展历程。如何对图像信息进行快速、高效地分析与处理，探寻和呈现其中关键的信息特征，一直以来是数字图像处理领域的一个研究难点。图像信息特征千差万别，纷繁复杂，这就决定了挖掘、呈现这些图像信息特征的困难和困惑。

从空域到频域，从傅里叶变换到小波变换，探索各种变换方法的目的就在于试图寻找一种独特的图像信息特征表示方法，从而实现对图像边缘、纹理等高维奇异特征的有效捕获。需要注意的是，无论是傅里叶变换还是小波变换，都尚难完成上述目标，进而无法实现对图像信息特征的稀疏表示。多尺度几何分析理论的问世，在一定程度上为图像信息的挖掘、分析与处理所面临的深层次挑战开辟了新的途径。近年来，多尺度几何分析理论作为新近发展起来的图像信息表示方法已获得了快速的发展，其典型代表包括 Ridgelet 变换、Curvelet 变换和 Contourlet 变换等。这些变换能够对图像信息进行多尺度、多方向分解，其基函数满足各向异性尺度关系，从而能实现对图像信息特征的最优表达。尽管如此，与之相关的理论算法至今还处在发展之中，尚未形成完善的理论框架，仍有大量问题有待深入、系统地研究。

本书针对多尺度几何分析的典型代表——Contourlet 变换，所存在的频谱混叠现象，立足于拉普拉斯塔形变换和方向滤波器组，对频谱混叠的原因及其抑制方法展开理论分析，构造了一种新的多尺度几何分析方法——抗混叠 Contourlet 变换。全书着眼于抗混叠 Contourlet 变换算法本身的理论分析和潜在的应用基础进行研究，希望对多尺度几何分析方面的研究工作，起到抛砖引玉的作用。

本书的部分研究成果得到了国家自然科学基金（60172074，61175005，61171157）、重庆市自然科学基金（CSTC2007BB3174，CSTC2009BB2188）、中

国博士后基金（20100480666）以及重庆大学中央高校基本科研业务费（CDJRC10120007，CDJZR11120006）的资助，是在高分辨图像信息的应用分析与处理中初步开展的有益尝试。本书是课题组对近几年在多尺度几何分析研究领域，尤其是抗混叠 Contourlet 变换领域的研究工作的一个小结，是研究集体的工作结晶。希望本书能够对从事图像处理、图像稀疏表示、多尺度几何分析以及 Contourlet 变换等理论和应用研究的科研人员有所裨益。

藉此机会，感谢 Illinois 大学 Urbana-Champaign 分校 Lu Yueming 博士、Mathworks 公司 Duncan Po 博士以及燕山大学练秋生教授给予的无私帮助与指导；感谢宁波大学金炜博士的无私关心与帮助；感谢马晓昕、刘思远、杨峰、陈渝、刘亚楠等研究生所付出的辛勤劳动。重庆大学魏彪教授仔细审校了全书，对本书的体系结构、内容安排、语句的措辞、符号的使用，魏老师都提出了许多指导性和建设性的意见，在此对魏老师表示衷心的感谢。书中内容，除来自作者的研究成果之外，还引用和归纳了国内外同行专家、学者的研究成果，特向各位同行致谢。若参考文献有疏漏，敬请海涵。

由于水平有限，加之多尺度几何分析与抗混叠 Contourlet 变换理论尚处于发展阶段，书中不妥之处在所难免，恳请读者批评指正。

作　者

2012 年初春于重庆

目　　录

第 1 章　绪　　论

在人的五大感觉器官(眼、耳、鼻、舌、皮肤)中，眼睛是人类获取信息的主要器官。“百闻不如一见”“眼见为实”等都说明了人眼在获取信息过程中的重要地位。成像系统犹如人的眼睛，其所获得的图像是人类观测客观世界的重要信息来源。成像系统将世界(宏/微观)映射成图像，而图像处理与分析技术则力图使人眼(视觉)设法利用图像中所包含的信息来推算场景的性质，例如形状、轮廓、色彩、纹理及空间位置结构等。因此，图像处理已成为现代成像系统，如 X-CT (X-ray computed tomography，X 射线计算机断层成像)、超声及红外等成像系统的重要环节。如今，现代成像技术已将人眼不能直接看到的物体内部信息或尺度很小的物体信息，以成像方式(如 X-CT 或显微成像等)变成人眼能够直观的图像信息，使成像系统从传统的“技术摄影”发展到现在的“成像工程”。而现代成像均离不开计算机图像处理，且随着信息科学技术的飞速发展，图像处理技术也有了许多重大进展和突破，例如，将很模糊的 X 射线图像或超声图像处理成相当清晰的图像，将不完整的图像信息恢复成完整的图像信息等。

成像系统可应用于不同的领域，使得图像信息千差万别，这就决定了图像处理与分析技术的复杂性。因此，探索并寻求有效的图像表示方法已成为图像处理与分析中的关键技术。在诸多图像信息中，边缘和纹理等高维几何特征往往反映了大量的信息；然而，传统的基于傅里叶变换和小波变换的图像处理与分析技术，只能处理图像信息的低维特征。所以，研究并寻求一种能够有效捕获图像信息中的高维奇异特征，实现对图像“稀疏”表示的图像表示方法，无疑将具有十分重要的理论意义和潜在的应用前景。

1.1　图像的特性

图像具有一些复杂的内在特性：①数据的非结构性，一般的图像数据本质上不具有结构性，不像关系数据库中数据记录那样结构规整和清晰，便于操作；②数据的复杂性，图像数据本身无明显、直观的数据规律，寥寥数笔的勾勒便构成了图像，复杂的地貌也能构成图像，如 1024×1024 像素的 24 位彩色图像，可能的“图像”数目就有 $2^{25165824}$ 之多。

图像的广泛应用以及图像自身的复杂性，必然需要有效的图像处理方法。图

像处理最基本的工作就是提取图像的特征。虽然图像信息千差万别，但都具有一个明显的特性，即边缘主导(edge dominate)特性。A. B. Lee 和 D. Mumford 将大量自然图像分割为 3×3 的图像块，他们发现，其中 1/2 乃至更多部分的高对比度的图像模块都可以解释为边缘的片断[1]。据此可以判定，边缘是自然图像中占据主导角色的成分，称为边缘主导特性。该结论也基本符合人类对自然景观的认知规律：人们首先通过边缘分割得到各个子对象，再在此基础上进行图像理解，从而产生视觉。D. Donoho 通过进一步的分析[2]，认为图像的非高斯性[3]以及尺度间相关性[4]都可以应用边缘主导特性来进行解释。

边缘，实际上就是信号中的非连续点连接成一条曲线，而非简单地为孤立非连续点，也就是所谓高维奇异性。这对传统的信号分析方法提出了更高的挑战。传统的傅里叶变换只能较好地分析连续信号，小波分析方法也只能较好地分析信号中的点状奇异性。可见，傅里叶变换和小波分析等传统的图像处理数学算法，并不能对边缘主导的信号进行有效的处理与分析。

1.2 传统图像表示方法

1.2.1 从傅里叶分析到小波变换

信号实际上是传递信息的某种具体物理过程。最常用的信号分析方法是寻找一种简单有效的变换，使信号所包含的重要特征在变换域能更直接地显示出来。在小波变换兴起之前，傅里叶变换是信号分析中最重要的数学分析手段，它将信号展开成不同频率正弦波的线性叠加，从而分析信号中各种不同频率成分的强弱、信号能量在频率域的分布。然而，傅里叶变换刻画的是信号在整个时间(空间)域的频率特征，无法反映信号在局部时间段内的变化情况。此外，傅里叶变换是一种全局的变换，不能同时表述信号的时(空)频局部性质。但在许多实际问题中，获取的信号往往是非平稳的，而时频局部性恰好是非平稳信号最基本和最关键的性质。例如，图像处理中的边缘检测，人们关心的是信号突变的位置，即纹理结构。信号的突变(奇异)部分包含大量的有用信息，由于这些突变成分和任何一个傅里叶基函数都不相似，因此它们的傅里叶变换不是稀疏分布的。换言之，傅里叶基并不是非平稳信号的最优表示方法。

为了克服傅里叶变换的不足，D. Gabor 于 1946 年提出加窗傅里叶变换(window Fourier transform)，又称 Gabor 变换[5]。由于信号只在时间窗内有值，因而变换结果所反映的就是在时间窗内信号的频率信息，从而实现了对信号局部频率特征的分析。然而，Gabor 变换时频分辨率是固定不变的，但在实际应用中，对于高频的信息，时间窗要相对的小，对于低频的信息，则要求时间窗要相对的宽。为了解决窗函数的“弹性”问题，人们引入了小波变换的概念。

1967 年法国地质物理学家 J. Morlet 在分析地质数据时首先提出了小波分析(wavelet analysis)这一概念，并建立了以他的名字命名的 Morlet 小波[6]。随后，法国数学家 Y. Meyer、T. Battle 和 P. Lemarie 等分别对小波的发展做出了自己的贡献。而随后 S. Mallat 则将通信理论中的镜像滤波器组的概念、数字图像处理中塔式分解的概念，以及正交小波基的概念巧妙地结合起来，形成了多分辨率分析(multiresolution analysis)理论，从而统一了此前提出的构造小波函数的各种方法，并给出了小波变换分解和重构的快速算法——Mallat 算法[3,7,8]。I. Daubechies证明了有限支撑的正交小波基的存在[8,9]。至此，小波分析理论体系初步建立起来。

小波变换与 Gabor 变换的根本区别在于，其窗口宽度是变化的，随频率增大而减小，是一种多分辨率时(空)频变换。它具有卓越的时(空)-频率局部化能力，能够自动适应时频信号分析的要求，通过多分辨率分析聚焦到信号的任意细节，最终达到高频处时间细分，低频处频率细分，从而克服了短时傅里叶变换的缺陷。也正因为如此，小波变换被广泛应用于图像压缩、去噪、增强、检索和特征提取等图像处理领域，并取得了极大成功[10-17]。

1.2.2 小波的局限

需要指出的是，尽管小波分析理论已经显得非常完善，并在图像处理领域得到了广泛应用，但仍然存在一定的缺陷。小波分析理论的成功主要得益于其对信号的时频局域分析能力及其对一维有界变差函数类的最优逼近性能[18]。换言之，小波能够有效地表示信号的零维奇异特征，反映奇异点的大小和位置，是表示具有点状奇异目标函数的最优基。遗憾的是，小波分析在一维信号所具有的优异特性并不能简单地推广到二维或更高维。二维图像中的轮廓、边缘和纹理等高维几何特征包含了大量的信息，而由一维小波张成的二维可分离小波(separable wavelet)只具有有限的方向(严格地说，只有 2.5 个方向)。方向选择性的匮乏使得小波无法实现对图像中曲线奇异的稀疏表示，小波不再是表示图像的最优基[19]。另一方面，小波变换的基函数都是各向同性的，即基函数的支撑区域是正方形的。在描述图像边缘时，具有长条形支撑区间的基函数比正方形的基函数具有更稀疏的表示方式，它们能以更少的系数表示图像的边缘。这种长条形的支撑区间实际上是曲线方向性的一种体现，称为各向异性。生理学家对人类视觉系统的研究成果同样说明，最优的图像表示方法，其基函数应该是各向异性的，具有方向选择性[20]。因此，多方向选择性和各向异性是获得图像稀疏表示的必要条件，文献中通常把具有这两种特性的图像分析方法统称为多尺度几何分析(multiscale geometric analysis)，而其目的就在于寻求对具有高维奇异特征的函数的最优表示方法[21]。

1.3　多尺度几何分析

多尺度几何分析是近几年在国际上兴起的第二次小波浪潮[21]。针对小波变换在表示具有线奇异或者面奇异的高维函数时的不足，它以传统多尺度分析理论为基础，并进行延伸、拓展，通过构造支撑区间满足各向异性尺度关系(anisotropy scale relation)的基，达到稀疏表示图像信号的能力。图像的多尺度几何分析是一个非常前沿的研究领域。目前，基于不同的应用范围，学者们已经提出了一系列的多尺度几何分析理论，根据其基函数的不同，可以分为两类：自适应多尺度几何分析和非自适应多尺度几何分析。

1.3.1　自适应多尺度几何分析

所谓自适应多尺度几何分析，是指图像变换的基函数随图像内容变化而变化。它一般先进行边缘检测，再利用边缘信息对原函数进行最优表示，主要包括Brushlet[22]、Wedgelet[23,24]、Bandelet[25,26]和 Directionlets[27]等，其中以 Bandelet 变换为其典型代表。自适应的多尺度几何表示方法，实际上是边缘检测和图像表示方法的结合，因而其关键问题在于对图像本身的分析。然而，在自然图像中，灰度值的突变并不总是对应着物体的边缘[25]。所有基于边缘的自适应方法，所要解决的一个共同的问题是：如何确定图像中灰度值剧烈变化的区域对应的是物体边缘还是纹理的变化，而这是一个非常困难的问题。在实际应用中，当图像出现较复杂的几何特征时，用逼近误差作为衡量标准，大部分基于边缘的自适应算法性能，并不能超过可分离的正交小波分解[25]。因此，人们从小波基中受到启发，试图寻找一种不受图像先验信息限制，既能够有效表示图像中线奇异或面奇异，又具有固定基函数的图像表示方法，即非自适应多尺度几何分析方法。

1.3.2　非自适应多尺度几何分析

所谓非自适应多尺度几何分析，是指图像变换的基函数与图像内容无关。它主要包括最近提出的 Ridgelet、Curvelet 和 Contourlet 理论。Ridgelet 理论[28,29]由E. J. Candès在 1998 年提出，其初衷就是为了弥补二维张量小波在表示含线奇异或面奇异等高维函数时的缺陷。Ridgelet 变换对于具有直线奇异的多变量函数有良好的逼近性能[28,30]，然而，自然图像往往曲线奇异居多。为了解决含曲线奇异的多变量函数的稀疏逼近问题，E. J. Candès 于 1999 年又提出了单尺度 Ridgelet 变换(monoscale Ridgelet transform)[31,32]。随后，E. J. Candès 和 D. Donoho 在单尺度 Ridgelet 变换的基础上，提出了第一代 Curvelet 变换[19]。第一代 Curvelet 变换由子带滤波结合多尺度局部 Ridgelet 变换组成，并在 2002 年，由 J. L.

Stack 等实现了离散的 Curvelet 变换[33]。Ridgelet 变换和第一代 Curvelet 变换，都是基于块剖分的变换，其计算量和变换系数的冗余度相当庞大，因而在实际应用中并不多见。为解决这一问题，E. J. Candès 和 F. Guo 于 2002 年利用非均匀空间抽样的二维快速傅里叶变换（fast Fourier transform，FFT）算法实现了第二代 Curvelet 变换[34]。该变换无需分块操作和 Ridgelet 变换，计算量和冗余度均大幅度下降。两代 Curvelet 基函数均满足各向异性尺度关系，即 Curvelet 基函数支撑区间的宽度与长度近似符合平方律：$\text{width} \propto \text{length}^2$。E. J. Candès 等同时还证明，符合各向异性尺度关系的 Curvelet 是表示具有二阶可微分段平滑曲线边缘的最优基[34]。

在 Curvelet 变换的基础上，M. N. Do 和 M. Vetterli 结合方向滤波的思想，于 2002 年提出了一种新的多分辨率、局域、多方向的图像表示方法——Contourlet 变换，也称为拉普拉斯塔形方向滤波器组（pyramidal directional filter banks，PDFB）[35]。它继承了 Curvelet 变换的多方向选择性和各向异性尺度关系，其基函数支撑区间具有长宽比随尺度变化而变化的长条形结构，能以接近最优的方式描述图像边缘。Contourlet 变换将多尺度分析和方向分析分开进行，其最终结果是用类似于轮廓段（contour segment）的基结构来逼近原图像，这也是 Contourlet 这个名字的由来。

纵然，非自适应多尺度几何分析的基函数是固定的，但它同样能够获得图像的最优表示（如 Curvelet 变换和 Contourlet 变换）。理论上说，凡是能用小波变换的领域，非自适应多尺度几何分析同样适用，并且能够得到更好的效果；而自适应多尺度几何分析则在许多领域的应用上受到限制。因此，本书的研究范畴立足于非自适应多尺度几何分析这一大的框架。

1.4 本书研究的目的及意义

如前所述，所谓图像具有边缘主导性，即图像包含大量的高维奇异信号，使得基于傅里叶变换和小波变换的图像处理技术无法获得满意结果。因此，探索并寻找一种有效刻画图像高维奇异性的表示方法，便成为图像处理的关键技术问题。

Contourlet 变换正是这样一种图像表示方法。相比 Curvelet 变换，Contourlet 变换不但继承了 Curvelet 变换的优点（多方向选择性和基函数的各向异性尺度关系），能够有效地捕捉图像中的高维奇异性，实现对图像的稀疏表示，而且冗余度大大低于 Curvelet 变换。且由于是在数字域定义，计算机实现也较为简单。因此，可以想象的是，Contourlet 变换在图像处理领域应该大有可为。

然而，在实际应用中，Contourlet 变换并没有表现出应有的实力。Contourlet 变换用于图像去噪，虽然较好地保持了边缘，但会在重构图像中出现严重的划痕，这一点甚至在基于隐马尔科夫树(hidden Markov tree，HMT)模型的 Contourlet 去噪中也有所反映。Contourlet 变换用于图像编码，与 JPEG 2000 比较，其压缩效率和视觉效果也尚有较大差距。依据上述情况，文献[36]将其归结为 Contourlet 的基函数在频域不够局部化，各方向子带之间存在频谱混叠，因而导致 Contourlet 变换的系数不够稀疏，系数之间具有相关性。但其并未指出频谱混叠的来源，亦未提出解决的办法。因此，探索并寻找 Contourlet 变换频谱混叠的原因，提高 Contourlet 基函数的空频局域性，减轻或消除划痕现象，降低 Contourlet 系数的相关性，是一个值得研究的课题。这不仅对推广 Contourlet 变换在各个领域的应用具有重要理论意义，而且也正是本书研究工作之目的。

多尺度几何分析是近年来兴起的一个研究领域，理论和算法还处在发展当中，但其取得的初步成果已经令人鼓舞。在国内，对多尺度几何分析的研究基本还停留在应用阶段，鲜有理论性的创新。目前，国内外针对 Contourlet 变换的研究，主要是利用 Contourlet 进行图像的去噪[37,38]、编码[39,40]、改进平移不变性[41]和降低冗余度[42-45]等，对 Contourlet 变换的频谱混叠问题并未涉及。因此，本书针对 Contourlet 变换存在的缺陷，对 Contourlet 变换的频谱混叠问题展开研究，深入剖析频谱混叠产生的原因，并提出相应的解决方案，以消除 Contourlet 变换中的频谱混叠。在此基础上，结合优化的方向滤波器组（directional filter banks，DFB），提出一种新的多尺度多方向分解方法，即抗混叠 Contourlet 变换(non-aliasing Contourlet transform，NACT)，并将其应用于高空摄影图像降噪、视网膜血管图像对比度增强和红外图像插值等领域，这对于深入理解 Contourlet 变换、开拓 Contourlet 变换的应用范围、寻求更有效的图像表示方法具有重要的理论指导意义。

1.5 主要内容安排

第 1 章为绪论，首先介绍了现代成像系统中图像信息的特点；其次分析介绍了图像表示方法的研究现状和发展趋势。在此基础上，阐明了本书研究的目的及意义，并给出了本书的主要内容安排。

第 2 章从图像奇异性和函数逼近论的角度，讨论了小波在分析二维图像时的局限，阐述了多尺度几何分析的产生、发展历程，并简要论述了多尺度几何分析中三种具有代表性的变换：Ridgelet 变换、Curvelet 变换和 Contourlet 变换，为构造新的变换做必要的理论准备。

第 3 章从 Ridgelet 变换的基本理论出发，对其涉及的连续 Ridgelet 变换、单尺度 Ridgelet 变换等方法进行了阐述，并介绍了 Ridgelet 变换在直线特征检测、

水印等图像处理领域的典型应用。进而对 Curvelet 变换的由来、性质与局限、其与 Ridgelet 之间的关系，以及 Curvelet 变换在图像去噪、融合与增强中的应用进行了介绍，为下一章对 Contourlet 变换的研究奠定基础。

第 4 章以二维多率抽样系统的基本概念为出发点，详细阐述了 Contourlet 变换的构成原理，从拉普拉斯塔形变换（Laplacian pyramidal transform，LP 变换）和 DFB 两个方面，对 Contourlet 变换展开分析，并在此基础上，对 Contourlet 变换存在的不足和相应改进措施进行了介绍。

第 5 章详细讨论了 Contourlet 变换中 LP 变换和 DFB 各自频谱混叠产生的原因，并在此基础上，提出并构造了一种新的多尺度几何分析方法——NACT。NACT 通过在频域直接定义满足 Nyquist 抽样定律的滤波器，采用双迭代结构实现了一种新的多尺度分解以替代 LP 分解，并与 DFB 结合，实现对图像的多尺度多方向分解。NACT 基函数不仅具有多分辨率、多方向、局域性等特性，满足各向异性尺度关系，且空频域正则性和局域性均明显优于 Contourlet 变换。非线性逼近和去噪实验表明，与 Contourlet 变换相比，在峰值信噪比（PSNR）和视觉效果上，NACT 均有大幅度提高。

第 6 章研究了 NACT 的边缘分布和联合分布系数统计模型。针对 NACT 系数的边缘分布具有明显的非高斯性、高峰度和长拖尾性的特点，在充分比较了拉普拉斯分布、广义高斯分布（generalized Gaussian distribution，GGD）和贝塞尔 K 分布（Bessel K-forms distribution，BKF）描述 NACT 系数时的优劣的基础上，借助皮尔逊 χ^2 假设检验的方法，验证了 NACT 系数边缘分布服从 GGD 模型。对于联合分布，则从定性和定量两个方面对两种变换系数的统计依赖性和非独立性进行了分析，并利用广义非高斯二元变量模型对系数的联合分布进行建模。

第 7 章介绍了 NACT 在高空摄影图像去噪、视网膜血管图像对比度增强以及红外图像插值中的应用，揭示了 NACT 在现代成像系统的高分辨图像处理中的潜在应用前景。

第 2 章　从小波变换到多尺度几何分析

多尺度分析的思想是用一系列简单的函数来逼近一个一般函数 $f(t)$。而 S. Mallat则从函数的多分辨率分解出发，将小波分析与多尺度分析紧密地联系在了一起。自 20 世纪 80 年代以来，关于小波分析的理论、方法及应用研究一直是热门课题，其在信号处理领域的应用尤为成功。然而，小波在一维(信号)情况下的优势并不能简单推广至二维(图像)。在高维情况下，小波并不能充分利用数据本身特有的几何特征，无法最优或最稀疏表示图像中的线奇异或面奇异。针对小波变换的这一缺陷，E. J. Candès、D. Donoho 和 M. N. Do 等学者提出了 Ridgelet、Curvelet 和 Contourlet 等非自适应多尺度几何分析方法[19,28,35]。这些多尺度几何分析方法是真正的二维变换，能够有效捕捉图像中的几何特征。本章首先介绍小波分析的基本理论，从小波基逼近图像中曲线奇异时所存在的问题出发，阐述多尺度几何分析的产生、发展历程，简要介绍具有代表性的上述三种变换的基本原理和性质，同时讨论其局限性，为构造新的变换做必要的理论准备。

2.1　小波分析基本理论

传统的信号分析是建立在傅里叶变换基础之上的，其基本思想是将信号看成一种由各种不同幅度、不同频率的正弦波叠加而成的复杂波动。傅里叶变换的突出贡献是把时(空)域与频率域联系起来，用信号的频谱特性去分析时(空)域内难以看清楚的问题。但是，由于傅里叶分析使用的是一种全局变换，对信号性质的讨论要么完全在时域，要么完全在频域，却无法同时表述信号的时频局部性质，而时频局部特征恰好是非平稳信号最关键的性质。为了克服傅里叶变换的不足，D. Gabor 于 1946 年提出了短时傅里叶变换(short time Fourier transform)的思想，也称为加窗傅里叶变换。其基本思想是[46,47]：在时域上对信号 $f(t)$加上一个窗函数 $g(t-\tau)$，使其对 $f(t)$作乘积运算以实现在 τ 附近的开窗和平移，然后再对加窗信号进行傅里叶变换，进而获取相应的频域特征。其数学描述为

$$S_f(\omega,\ \tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{2-1}$$

其中，窗口函数 $g(t)$一般是光滑的低通函数，保证 $g(t-\tau)$只在 τ 附近非零，在其余处迅速衰减，这样，短时傅里叶变换就在 τ 点附近局部地测量了频率分量 ω 的幅度值，得到信号在 $t=\tau$ 附近的频率信息。

如果选取的窗口函数在时域和频域都具有良好的局部性质(如呈指数衰减的高斯函数)，此时短时傅里叶变换能够同时在频域和时域内提取关于信号的精确信息。

但是，短时傅里叶变换的时间频率窗口是固定不变的，一旦窗口函数 $g(t)$ 选定，其时频分辨率也就随之确定，并且不随频率 ω 和时间 τ 而变化。因此，短时傅里叶变换本质上只有单一分辨率。若要提高时间分辨率，就要重新选择窗函数，使其窗口缩得很窄，但这样势必降低频率分辨率。由海森堡测不准原理可知，时间和频率的最高分辨率受下式制约：

$$\Delta\omega \cdot \Delta t \geqslant \frac{1}{4\pi} \tag{2-2}$$

式中，Δt 和 $\Delta\omega$ 分别表示时域和频域窗口宽度。这表明，不可能在时间和频率上都有任意高的分辨率，任何一方分辨率的提高都意味着另一方分辨率的降低。

短时傅里叶变换问题的症结在于使用了固定的窗口，而对实际时变信号的分析需要时频窗口具有自适应性：对于高频信息，时间间隔相对较小以给出较高的精度；对于低频信息，时间间隔相对较宽，以获得完全信息。换言之，关键在于一个灵活可变的时间-频率窗，能够在高中心频率时自动变窄，而在低中心频率时自动变宽。小波就是为此而设计的。

小波变换的概念是由法国从事石油信号处理的工程师 J. Morlet 在 1984 年首先提出的。与傅里叶变换、窗口傅里叶变换相比，小波变换是一个时间-频率的局域变换，它在低频部分具有较高的频率分辨率和较低的时间分辨率，在高频部分有较高的时间分辨率和较低的频率分辨率，从而实现从信号中有效地提取信息，进而通过伸缩和平移等运算功能对函数或信号进行多尺度细化分析，解决了傅里叶变换所不能克服的诸多困难问题。因此，小波变换被誉为“数学显微镜”，它的出现也成为调和分析发展史上具有里程碑意义的事件。

2.1.1　连续小波变换

设函数 $\psi(t)\in \boldsymbol{L}^2(\mathbf{R})$（平方可积函数），若其傅里叶变换满足

$$C_\psi = \int_{\mathbf{R}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}\mathrm{d}\omega < \infty \tag{2-3}$$

则称 $\psi(t)$为母小波或基本小波，简称为小波，式(2-3)为小波容许条件。显然，

$$\hat{\psi}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\cdot 0\cdot t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)\mathrm{d}t = 0 \tag{2-4}$$

即 $\psi(t)$必须时正时负地波动。在实际应用中，往往还要求小波具有很好的时域局域化性质，即幅度衰减得很快。$\psi(t)$通过伸缩和平移，可得到一组函数：

$$\psi_{a,b}(t) = |a|^{-\frac{1}{2}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \tag{2-5}$$

式中，$\psi_{a,b}(t)$称为小波基函数，参数 $a>0$，反映一个特定基函数的尺度，称为尺