实验设计与数据处理

SHIYAN SHEJI YU SHUJU CHULI

周玉新 著

湖北科学技术出版社
HUBEI SCIENCE & TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

实施设计与数据处理/周玉新著. 一武汉:湖北科学技术出版社,2005.4

ISBN 7-5352-3388-0

Ⅰ.实… Ⅱ.周… Ⅲ.①试验设计(数学) ②实验数据一数据处理

Ⅳ.①0212.6②N33③

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 034013 号

实验设计与数据处理 ©周玉新 著

策 划:
责任编辑:梁 琼 封面设计:喻 扬

出版发行:湖北科学技术出版社 电话:87679468

地 址:武汉市雄楚大街 268 号湖北出版文化城 B 座 12-14 层 邮编:430070

印 刷:华中师范大学印刷厂 邮编:430079

787 毫米×1092 毫米 16 开 12 印张 290 千字

2005 年 4 月第 1 版 2005 年 4 月第 1 次印刷

印数:0 001-1 000

ISBN 7-5352-3388-0/N·49 定价:22.00 元

前　　言

实验设计与实验的数据分析、处理，随着科技的高速发展，不断地赋予新的内容，但其基本原理和方法，应是我们从事化工生产、化工新产品的研究和化工新工艺开发人员须了解和掌握的基本知识之一。

所谓实验数据处理，就是从带有偶然性的观测值中，运用适当的数学工具及以计算机为手段的“电算”方法，导出规律性结论的过程。所谓规律性的结论，就是人们常说到的“数学模型”。具体地说，是从化学工程研究中实验数据的误差分析、数据整理入手，然后采用适当的数学方法建立数学模型。只有科学地处理实验数据，才能充分有效地利用实验测试信息，得出正确的结论，合理地组织科学研究，正确地指导工程设计和优化过程控制。

实验设计是近代迅速发展起来的一门新兴数学分支。经过众多研究工作者的长期研究，已开发出较多的实验设计方法，包括简单实验设计、正交实验设计、回归实验设计、均匀实验设计、序贯实验设计等。

我们在对某一课题进行研究时，首先应从设计实验开始。实验设计得好，可以大大减少实验次数，得到充分的信息，简化数据处理的过程，节省人力、物力和时间。正确合理的实验设计，可使实验结果的可靠性显著提高，并可为迅速寻求参数的优化数值和选择最佳工艺方案指明方向。

本书在简单介绍了数学模型的来源后，着重讨论和介绍了实验数据的误差分析、实验结果的图示、用最小二乘法拟合实验数据和回归分析法求取数学模型的原理和步骤，并较详细地介绍了几种常用的实验设计方法。

限于时间和编者的水平，难免存在一些错误和不当之处，恳请读者批评指正。

周玉新

2004 年 3 月

目　录

1 数学模型的来源

研究化工数据处理，其目的是要建立相应的化工过程的数学 模型。下面就化工过程数学模型的基本要领及其来源作一简单的介绍。

1.1 化工过程数学模型的概念

化学工程学是创造性地运用质量、能量以及动量传递的科学原理，以改变物质的物理或化学属性为目的的一门工程技术科学。它在上世纪初几乎纯属经验，主题是如何利用实验室的实验结果以设计单元设备的容量，这就是所谓单元操作时期。直到上世纪 50 年代中期，随着生产的发展，化学工程逐渐向技术科学发展，即要求明了质量、能量和动量传递的基本现象。这就要求能够使用数学对这些基本现象进行描述。近年来，随着微型计算机的高速发展和普及，又推动了化学工程进一步走向数学模型化。

所谓数学模型，从广义上讲，就是所考虑的化工过程中某些变量间关系的总称。无论是动态的或是静态的过程，上述关系一般可用表格、图形或数学公式表达出来。故这些表格、图形或数学公式都可称为化工过程的数学模型。由于当前计算机的普及，将所有的表格或图形回归成数学表达式并非难事。因此，数学模型通常又是指过程的解析表达式。

从狭义上讲，数学模型又必然是由数学解析式构成。在这个意义上，数学模型就是用以描述化工过程的特性方程或方程组。

1.2 数学模型的建立

1.2.1 建立数学模型的通则

对任一物理现象进行分析，其中心问题是要有一个适当的数学模型。

对一个简单的物理场建立数学模型的步骤可按图 1-1 所示的步骤进行。

1. 选择基本变量

基本变量指的是一些量的集合，这些量的值在任何时间均包含所有的对所讨论现象所必需的信息。具体地说，这些基本变量就是质量、能量和动量。对任何给定的物理场，或者全都需要，或者仅需要其中的一部分。

在很多场合，上述的基本变量往往是无法直接测定的。但可选择一些特征变量来表达它们。

2. 选择特征变量

特征变量是一些可直接测定的变量，如密度、温度、压力、速率等。由这些特征变量再经过

正确的组合以后就可以确定基本变量。如质量、能量和动量可以用密度、温度、压力、速率等加以表征。可见，每一个基本变量均需要一个以上的特征变量来表征。这些特征变量在任何时间、空间和任何点处的所有值就决定了系统的状态，因此，有时特征变量也称为状态变量。

3. 应用守恒原理列衡算方程

确定了这些特征变量之后，就可以根据质量、能量或动量守恒原理列出衡算方程。在一般工程问题中有四个独立变量与之有关，即时间 t 以及三维空间坐标参数 x、y、z。所以，当我们对一个物理场进行模型化时，主要的工作是选取适当的因变量和自变量。

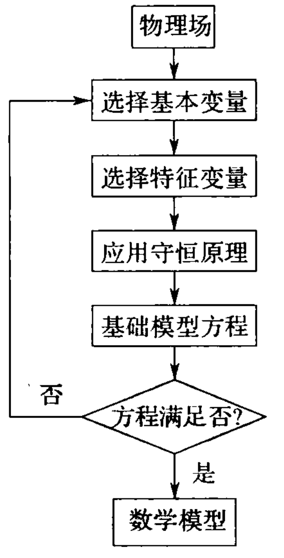

图 1-1 简单物理场建立数学模型的步骤

在模型化的进程中，基本的也是定量的一步，就是利用物理的基本守恒原理，即质量、能量和动量守恒来进行的。当进行衡算时，首先必须对所讨论过程或设备划定一个有限的空间作为讨论的对象。这样的空间我们就称之为限定容积(体系)。如果对限定容积考虑某一个量 X(X 代表质量、能量或动量)，则守恒定律应用于由时间 t_1 到 t_2($t_1 \to t_2$)时间间隔内的衡算式可写为：

$$X|_{t_2}=X|_{t_1(原)}+X\,|\,(t_1\to t_2)_{,进}-X\,|\,(t_1\to t_2)_{,出}$$

即为在时间 t_2 时限定容积内所含 X 的总量必等于在时间 t_1 时限定容积内所含 X 的总量，加上在 t_1 到 t_2 时间间隔内进入的 X 的总量，再减去在 t_1 到 t_2 时间间隔内离开限定容积的 X 的总量。

需要注意的是，质量和能量是标量，而动量是矢量。因此，在作动量衡算时，必须在每一个坐标方向上进行。

4. 校核方程

至此，如果所考虑的问题是一个仅含一个因变量的极其简单的物理场，则由守恒原理导出的基本方程就是所要求的数学模型。否则，就需要校核一下基本方程是否满足，如图 1-1 中的循环就是这种类型的直观表示。若不满足有关条件，则重新选择基本变量，进行下一轮循环。

例 1.1 如图 1-2 所示，考虑一个圆柱形水箱中的加水和排放问题。水箱的截面积为 $A\text{m}^2$，求任一时刻水箱内液面高度 h。

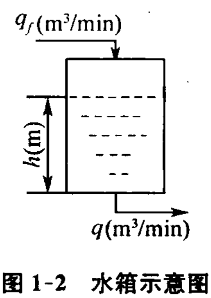

图 1-2 水箱示意图

分析：很明显，此时的基本变量是质量，其逻辑限定容积是水箱。当密度 ρ 为常数时，流过的质量完全可以由液面高度 h 来表征。

任意时刻 t 时水箱内的质量为 $\rho Ah(t)$；

在任意时间间隔 t 到 $t+\Delta t$ 内进入和离开水箱的质量分别为 $\rho q_f\Delta t$ 和 $\rho q\Delta t$。按照质量守恒定律，则可得基本变量与特征变量之间的恒等式：

$$\rho Ah(t+\Delta t)=\rho Ah(t)+\rho q_f\Delta t-\rho q\Delta t$$

两边同时除以 ρA，得

$$h(t+\Delta t)=h(t)+\frac{1}{A}(q_f-q)\Delta t \tag{1-1}$$

下面对 q、q_f 为常量和变量两种情况分别进行讨论。

1. *q_f 和 q 为常量*

若 q_f 和 q 皆为常量，式(1-1)则不管 Δt 值大小总是成立的。设 t_0 为开始时间，t 为任意时间，则上式可改写为：

$$h(t)=h(t_0)+\frac{1}{A}(q_f-q)(t-t_0) \tag{1-2}$$

式(1-2)为一代数式，在已知其他变量的条件下，可用来求取在任何时间 t 时的液面高度。

2. *q_f 和 q 为变量*

q_f 和 q 为变量，即随时间变化。设在很小时间间隔 Δt 内 q_f、q 可视为常量，则在 $\Delta t=t_2-t_1$ 内，

进入的量：$\int_{t_1}^{t_2}\rho q_f(t)\mathrm{d}t$

排出的量：$\int_{t_1}^{t_2}\rho q(t)\mathrm{d}t$

积累的量：$\rho Ah(t_2)-\rho Ah(t_1)$

由质量守恒定律得：

$$\rho Ah(t_2)-\rho Ah(t_1)=\int_{t_1}^{t_2}\rho q_f(t)\mathrm{d}t-\int_{t_1}^{t_2}\rho q(t)\mathrm{d}t$$

化简、整理得：

$$h(t_2)=h(t_1)+\frac{1}{A}\int_{t_1}^{t_2}[q_f(t)-q(t)]\mathrm{d}t \tag{1-3}$$

如果已知 q_f 和 q 随时间变化的具体函数关系，则可由式(1-3)求取液面高度 h。

式(1-2)和式(1-3)是有一定的内在联系的。我们可引用数学分析中的中值定理，将式(1-3)改写为如下形式：

$$h(t+\Delta t)-h(t)=\frac{1}{A}(\overline{q_f-q})\Delta t$$

式中$(\overline{q_f-q})$表示在时间 $t+\Delta t$ 与 t 间加水和排水速率之差的平均值，这就是式(1-2)的形式。

当 $\Delta t\to 0$ 时，可导出：

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{A}(q_f-q)$$

或

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho Ah)=\rho q_f-\rho q \tag{1-4}$$

式(1-4)中，等号左边表示水箱中物质的变化速率，而右边则为物质的净流率。

式(1-4)即为按图 1-1 的步骤建立的数学模型。

1.2.2 局部方程和限定容积

1. *局部方程*

图 1-1 仅适用于单变量的简单情况。但实际情况一般都很复杂，直接应用守恒定律往往

不可能得到我们需要的全部信息。因此，这个框图应加以修正，即当充分应用守恒定律仍不足以解决问题时，就必须引入局部关系，亦即附加关系的步骤。此时，图 1-1 可修正成图 1-3 的形式。

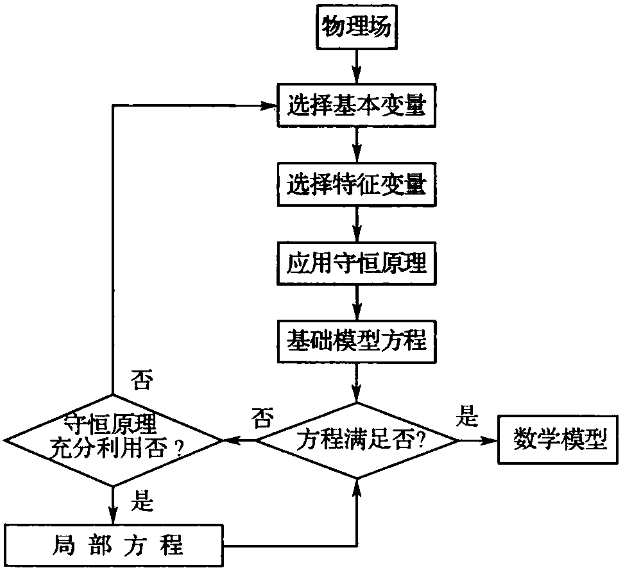

图 1-3 利用局部关系建立数学模型

寻找这个附加关系（补充关系）——局部方程，一般有三种方法：

(1) 一开始就借助于实验；

(2) 先由理论找出函数的形式，而一些参数则由实验确定；

(3) 一开始就由理论推导。

局部方程是充分利用守恒定律以后需要补充的关系式，故它是有局限性的。它只能用于特殊的物料或者特殊的场合。例理想气体定律

$$PV=nRT$$

只能用于低密度气体，而不能用于高密度的真实气体，这就是它的局限性。

2. 限定容积

在例 1.1 中的限定容积（即体系），选择的是水箱。这意味着所有的变量与空间位置无关，即在任何瞬间，变量在限定容积内的任何空间位置上均保持不变。ρ、A 和 h 均属此类，只有时间 t 是惟一的独立变量。如果水箱内盛的是固体颗粒悬浮液，则由于地心引力，其密度在任一瞬间和空间位置上均将发生变化。此时的限定容积就不能选为整个设备，即水箱，而必须选择一个新的限定容积。由高等数学原理可知，这个新的限定容积必须是一个微分体（微元），因为只有在微分体内才能将变量 ρ（密度）作常量处理。只有对这一微分体才可以应用守恒原理去推导变量间的关系，故此，所得方程中因变量必须依赖于 x，y，z 及 t 而变化。

因此，任何物理场的数学模型框图，必须再加上选择限定容积这一步骤。其逻辑框图见图 1-4。

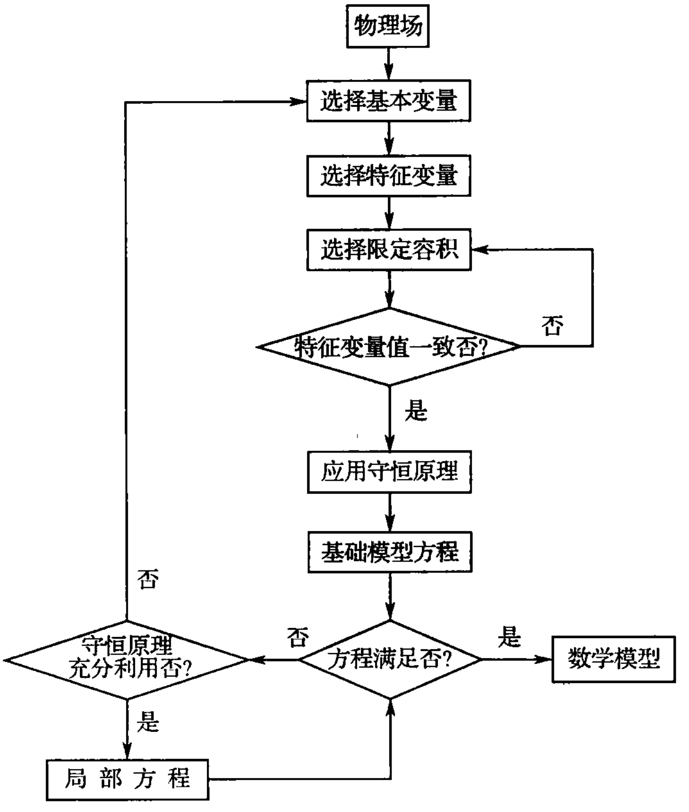

图 1-4 任何物理场的数学模型建立步骤

1.3 因次分析

1.3.1 数学描述中因次的一致性

因次分析是一种十分有用的工具，它在化学工程学科中至今占有特殊的地位。这是因为化学工程由经验向技术科学发展的过程中，仍然碰到大量目前不能用纯数学方法描述的实际问题，所以就不得不求助于因次分析。因为因次分析的惟一依据是方程的齐次性，它可以很方便地将未知函数关系转换为无因次的准数方程形式，所以它又是前面所述物理现象模型化中寻求局部方程形式的有力工具，并且是化工实验设计及整理化工实验数据的常用方法之一。

首先,我们熟悉一下因次的概念。

为了使物理方程成为最简单的形式,在科学研究中总是采用绝对单位制。而度量任何一个量,即是将它与所选作度量单位的同类量相比,当度量单位变化时,其度量结果也会随之变化。

目前除在自然科学中应用绝对单位制(C·G·S)外,在技术科学中广泛应用国际单位制(SI)。两种系统的单位见表 1-1。

表 1-1　C·G·S和SI制的基本单位

单位制 / 名称	C·G·S制	SI制
长　度	厘米,cm	米,m
质　量	克,g	千克,kg
时　间	秒,s	秒,s
温　度	摄氏度,℃	开,K

国际单位制是在米制的基础上发展而来的,于1960年第11届国际计量大会上正式通过,并于1978年1月1日起实行,目前已成为国际上最广泛使用的单位制了。

我们知道,在力学单位制的范围内,绝对单位制已选定长度[L]、质量[M]和时间[T]作为基本单位,其他物理量单位则皆可通过既定的物理关系与它们联系起来,且被称作导出单位。导出单位可以按下列形式表示出来:

$$[Q]=L^{\alpha}M^{\beta}T^{\gamma}$$

上式即为物理量Q的因次(或称量纲)式;α、β、γ则称为因次(或量纲),它们可以为任意有理数。在力学范围内,SI所选基本单位与绝对单位制相同。

和基本单位与导出单位的关系一样,物理量的导出单位也是由基本单位通过一定的物理定律而导出的。例如,牛顿第二定律

$$f=Ama \tag{1-5}$$

式中,f——力;

a——加速度;

m——质量。

比例函数A依对f、m、a各量中所选择的基本单位之不同可取不同之值。但绝对单位制规定,在选择单位时应使$A=1$(SI亦同),这么一来,在式(1-5)中任意二个量的单位一经选定后,第三量的单位即已确定,不可选择了。比如说选择了m和a的单位后,力f的单位则要服从因次式

$$[f]=[m][a]$$

这就规定了基本单位的选择是任意的,而导出单位则为上式所决定。由此可见,f的因次必定是式(1-5)右边各量的因次的综合。从而我们可以看出,完整的物理方程的各项均具有同一的因次式,且当转变度量单位时方程保持不变。

显而易见,上述后一性质只有各量间成幂指数关系的形式时才能实现,例如

$$y=kx_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_m^{\alpha_m}$$

式中,$k,\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$均为无名数。

在这种情况下,如以C_ix_i替代x_i,一定会使所有乘数C_i括成一个因子,而在这个因子上乘以原来的表达式,即

$$C_yy=k(c_1^{\alpha_1}c_2^{\alpha_2}\cdots c_m^{\alpha_m})x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_m^{\alpha_m}$$

因此

$$C_y=c_1^{\alpha_1}c_2^{\alpha_2}\cdots c_m^{\alpha_m}$$

凡具有上述性质的函数称为"相似函数"或"同族函数"。除单项幂指数外,同一因次的指数综合数群(或准数)之和也具有同族性质。如果其中有超越函数,则必具有相等的宗量才能同族。

在这种同族的情况下，当因子

$$c=\frac{c_y}{c_1^{\alpha_1}c_2^{\alpha_2}\cdots c_m^{\alpha_m}}=1 \tag{1-6}$$

时，函数则称为齐次函数，而式(1-6)就是决定函数齐次的条件。如式(1-6)存在，则函数称为有条件的齐次；如果式(1-6)的条件自然满足，则函数就无条件地成为齐次。如任何同类量之比就是这样。

可见，任何一个导出量 Q 总可以用各种基本量 A、B、C 的幂次乘积表达，即：

$$Q=A^{\alpha}B^{\beta}C^{\gamma}$$

或者写成如下更一般的形式

$$Q=a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}[A]^{\alpha}[B]^{\beta}[C]^{\gamma} \tag{1-7}$$

式中，$[A]$、$[B]$、$[C]$ —— 基本量；

a、b、c—— 常数。

物理方程中各项总可以表达为式(1-7)的多项式形式，且每项的因次显然应和量 Q 的因次相同。所以，该多项式(即物理方程)对于基本量是齐次的。也就是说，任何完整的物理方程，等号两边各项对应的因次必须相等，这就是物理现象数学描述中的因次一致性原则。它对于物理量的单位换算、校验计算结果的正确性，具有实际意义，也是整理实验数据的依据之一。

前已述及，基本单位的选择是任意的，但在同一度量制中，这些量需满足什么条件才能相互独立呢？下面讨论其条件。

设在一单位制中，已知一基本单位组为 P_1，P_2，P_3，…，P_n。在此以外，欲再找出另外 n 个量所组成的新的一组基本单位来。显然，要这样做，首先要求这几个量必须彼此独立，现试求这 n 个量 Q_1，Q_2，…，Q_n 彼此独立的条件。设这些量在原来基本单位制中的因次式为

$$\begin{aligned}
&[Q_1]=P_1^{\alpha_1}P_2^{\beta_1}\cdots P_n^{\gamma_1}\\
&[Q_2]=P_1^{\alpha_2}P_2^{\beta_2}\cdots P_n^{\gamma_2}\\
&[Q_i]=P_i^{\alpha_i}P_2^{\beta_i}\cdots P_n^{\gamma_i}\\
&\cdots \quad \cdots \quad \cdots\\
&[Q_n]=P_1^{\alpha_n}P_2^{\beta_n}\cdots P_n^{\gamma_n}
\end{aligned}$$

于是，这些量的度量单位 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ 即可写为

$$\left.\begin{aligned}
&q_1=P_1^{\alpha_1}P_2^{\beta_1}\cdots P_n^{\gamma_n}\\
&q_2=P_1^{\alpha_2}P_2^{\beta_2}\cdots P_n^{\gamma_2}\\
&\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots\\
&q_n=P_1^{\alpha_n}P_2^{\beta_n}\cdots P_n^{\gamma_n}
\end{aligned}\right\} \tag{1-8}$$

如果量 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_n$ 是彼此独立的，因而其单位 $q_1,q_2,\cdots q_n$ 也是彼此独立的，就可由式(1-8)确定 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 为 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ 的函数。为此，就必须使其雅可比行列式：

$$\frac{\partial(q_1q_2\cdots q_n)}{\partial(P_1P_2\cdots P_n)}=\begin{vmatrix}
\alpha_1P_1^{\alpha_1-1}P_2^{\beta_1}\cdots P_n^{\gamma_1} & \beta_1P_1^{\alpha_1}P_2^{\beta_1-1}\cdots P_n^{\gamma_1}\\
\alpha_2P_1^{\alpha_2-1}P_2^{\beta_2}\cdots P_n^{\gamma_2} & \beta_2P_1^{\alpha_2}P_2^{\beta_2-1}\cdots P_n^{\gamma_2}\\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots & \cdots \quad \cdots\\
\alpha_nP_1^{\alpha_n-1}P_2^{\beta_n}\cdots P_n^{\gamma_2} & \beta_nP_1^{\alpha_n}P_2^{\beta_n-1}\cdots P_n^{r_n}
\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \cdots\gamma_1 P_1^{\alpha_1} P_2^{\beta_1} \cdots P_n^{r_1-1} \\ \cdots\gamma_2 P_1^{\alpha_2} P_2^{\beta_2} \cdots P_n^{\gamma_2-1} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \cdots\gamma_n P_1^{\alpha_n} P_2^{\beta_n} \cdots P_n^{\gamma_n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

将此行列式各列分别乘上 $P_1, P_2, \cdots, P_n$，然后将行列式各行分别除以 $P_1^{\alpha_1} P_2^{\beta_1} \cdots P_n^{\gamma_1}$，$P_1^{\alpha_2} P_2^{\beta_2} \cdots P_n^{\gamma_2}$，$\cdots$，$P_1^{\alpha_n} P_2^{\beta_n} \cdots P_n^{\gamma_n}$，则上式变为

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \cdots & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \cdots & \gamma_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_n & \beta_n & \cdots & \gamma_n \end{vmatrix} \neq 0 \tag{1-9}$$

式(1-9)就是量 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ 彼此独立的充分且必要条件。

例如，在绝对单位制中选择长度[L]、质量[M]和时间[T]为力学范围内的基本量，而时间、长度、力的因次式为[T]、[L]及[MLT^2]，将其代入式(1-9)中则得：

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

所以它们彼此具备了独立的充要条件，因而，这样来选择是正确的。这就是工程单位制中为什么可以选择长度 m、时间 s 和力 kgf 作为基本量的依据。

1.3.2 π 定理的证明及讨论

对于给定的物理场如用变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 来描述，那么，用因次分析便可以推断这些变量间可能存在的函数形式。因次分析虽不可能完全断定这个未知函数关系，但它可以划出一个可能的界限，并且对一些简单的情况，给出一个带比例常数的完整的函数关系。

因次分析的基本理论依据是 π 定理。π 定理的文字叙述如下：

π 定理 任何与 N 个物理量有关的全部函数关系，当这些物理量共具有 m 个基本单位时，则此函数关系可以简化为用这些物理量的 $N-m$ 个无因次数群来表示。

证明 设所考虑的 N 个物理量($N=n+1$)为 $Q_0, Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$，已知它们具有 m 个基本单位，并且

$$Q_0 = f(Q_0, Q_1, Q_2, \cdots, Q_n)$$

现在从 $Q_i (i=1,2,\cdots,n)$ 中挑出 m 个彼此独立且满足式(1-9)的量，例如 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_m$ 作为新度量单位。于是有

$$\left.\begin{aligned} & Q_0 = \pi Q_1^{\alpha} Q_2^{\beta} \cdots Q_m^{\gamma} \\ & Q_1 = \pi_1 Q_2^{\alpha_1} Q_2^{\beta_1} \cdots Q_m^{\gamma_1} \\ & Q_{m+1} = \pi_{m+1} Q_1^{\alpha_{m+1}} Q_2^{\beta_{m+1}} \cdots Q_m^{\gamma_{m+1}} \\ & \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ & Q_n = \pi_n Q_1^{\alpha_n} Q_2^{\beta_n} \cdots Q_m^{\gamma_n} \end{aligned}\right\} \tag{1-10}$$

式中，$\pi, \pi_1, \cdots \pi_{m+1}, \cdots, \pi_n$ 均为无因次比例系数。在 Q_i 满足条件(1-9)的情况下，式(1-10)必定成立。

例如，取其基本单位为 3 个，如 Q_1，Q_2 和 Q_3 作为新的度量基本量。又设原来也只有 3 个

基本量[L]、[M]和[T]，则量 Q_1，Q_2 和 Q_3 在此基本单位制中的因次式为：

$$\left.\begin{aligned}[Q_1]&=L^{a_1}M^{b_1}T^{c_1}\\ [Q_2]&=L^{a_2}M^{b_2}T^{c_2}\\ [Q_3]&=L^{a_3}M^{b_3}T^{c_3}\end{aligned}\right\}\tag{1-11}$$

式(1-10)能否成立，就要看各幂参数 $\alpha,\beta,\cdots,\gamma$ 能否被惟一地确定下来，亦即简化后的 $Q_0=Q_1^\alpha Q_2^\beta Q_3^\gamma$ 中的 α,β,γ 能否定得出来。因为其他情况可以依次类推。

将式(1-11)代入 $Q_0=Q_1^\alpha Q_2^\beta Q_3^\gamma$ 的因次式$[Q_0]=[Q_1]^\alpha[Q_2]^\beta[Q_3]^\gamma$ 中，则得：

$$L^{a_0}M^{b_0}T^{c_0}=(L^{a_1}M^{b_1}T^{c_1})^\alpha(L^{a_2}M^{b_2}T^{c_2})^\beta(L^{a_3}M^{b_3}T^{c_3})^\gamma$$

或

$$L^{a_0}M^{b_0}T^{c_0}=L^{a_1\alpha+a_2\beta+a_3\gamma}M^{b_1\alpha+b_2\beta+b_3\gamma}T^{c_1\alpha+c_2\beta+c_3\gamma}$$

比较等号两边同一基本量的幂指数，则得：

$$\left.\begin{aligned}a_0&=a_1\alpha+a_2\beta+a_3\gamma\\ b_0&=b_1\alpha+b_2\beta+b_3\gamma\\ c_0&=c_1\alpha+c_2\beta+c_3\gamma\end{aligned}\right\}$$

式中，α,β,γ 是未知量。由于原假设 Q_1，Q_2 和 Q_3 为新选的基本量，故其行列式：

$$\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}\neq 0$$

从而方程有惟一的确定解，即 α,β 和 γ 可被惟一地确定。

由此可见，如果量 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_m$ 满足条件式(1-9)，则式(1-10)肯定可以成立。

将式(1-10)代入原来的函数关系 $Q_0=f(Q_1,Q_2,\cdots,Q_n)$中，则得：

$$\pi Q_1^\alpha Q_2^\beta\cdots Q_n^\gamma=f(Q_1,Q_2,\cdots,Q_m,\pi_{m+1}Q_1^{\alpha_{m+1}}Q_2^{\beta_{m+1}}\cdots Q_m^{\gamma_{m+1}},\cdots,\pi_n Q_1^{\alpha_n}Q_2^{\beta_n}\cdots Q_m^{\gamma_n})$$

如将上式 Q_i 上相应地乘以 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,m)$，则有：

$$\begin{aligned}&\pi(\lambda_1^\alpha\lambda_2^\beta\cdots\lambda_n^\gamma)(Q_1^\alpha Q_2^\beta\cdots Q_n^\gamma)=f[\lambda_1Q_1,\lambda_2Q_2\cdots,\lambda_mQ_m,\\ &\pi_{m+1}(\lambda_1^{\alpha_{m+1}}\lambda_2^{\beta_{m+1}}\cdots\lambda_m^{\gamma_{m+1}})(Q_1^{\alpha_{m+1}}Q_2^{\beta_{m+1}}\cdots Q^{\gamma_{m+1}}),\cdots,\\ &\pi_n(\lambda_1^{\alpha_n}\lambda_2^{\beta_n}\cdots\lambda_m^{\gamma_n})(Q_1^{\alpha_n}Q_2^{\beta_n}\cdots Q_m^{\gamma_n})]\end{aligned}$$

令上式中的 $\lambda_1=\dfrac{1}{Q_1},\lambda_2=\dfrac{1}{Q_2},\cdots,\lambda_m=\dfrac{1}{Q_m}$，则得：

$$\pi=f(\overbrace{1,1,\cdots,1}^{m\text{个}},\pi_{m+1},\cdots\pi_n)$$

或者写成

$$F(\pi,\pi_{m+1},\cdots,\pi_n)=0\tag{1-12}$$

式(1-12)中，π,π_i 均为无因次变量，由式(1-10)确定。于是，共含 m 个基本量的 N(即 $n+1$)个物理量关系式便化成了新的$(n-m)$个无因次数群 $\pi,\pi_i(i=m+1,m+2,\cdots,n)$的函数关系。至此完成了 π 定理的证明。

式(1-12)亦可以改写成无因次的、由所考虑的物理量组成的指数综合数群表达式：

$$F\left(\frac{Q_0}{Q_1^\alpha Q_2^\beta\cdots Q_m^\lambda},\frac{Q_{m+1}}{Q_1^{\alpha_{m+1}}Q_2^{\beta_{m+1}}\cdots Q_m^{\gamma_{m+1}}},\cdots,\frac{Q_n}{Q_1^{\alpha_n}Q_2^{\beta_n}\cdots Q_m^{\gamma_n}}\right)=0$$

π 定理的价值是非常明显的，因为所组成的无因次数群，即准数的数目通常总小于原来的物理量的总个数，这就为实验研究提供了极大的方便。此定理的限制条件为各量间只能有一

种独立函数关系。

π 定理在研究中应用很广泛，并由它可导出一重要推论：指数综合数群，或称为准数的数目 t_π 等于不同因次的量的数目 n 与独立因次量的数目 k 之差；简单同类量之比，或称为简单准数的数目 t_s 则等于物理量的总数 N 与不同因次的量的数目 n 之差。

在下面的讨论中，给出几个例题，说明 π 定理的应用。

1.3.3 π 定理应用举例

例 1.2 用因次分析法求粘性流体在管内流动时的压力降。

解：根据流体力学的知识可知，压力降 ΔP 与平均流速 u、流过的管长 l、管径 d 以及流体的物性如密度 ρ、粘度 μ 等因素有关，即可写为：

$$\Delta P = f(u, l, \rho, \mu, d)$$

将 f 表达为幂指数函数关系，可得出下式：

$$\Delta P = Cu^n \mu^m \rho^r l^s d^t \tag{a}$$

式(a)中各量的因次式如下：

$$[\Delta P] = FL^{-2} \qquad [u] = LT^{-1}$$
$$[\mu] = FTL^{-2} \qquad [\rho] = FL^{-4}T^2$$
$$[l] = L \qquad [d] = L$$

将各量的因次式引入式(a)得：

$$FL^{-2} = C(LT^{-1})^n (FTL^{-2})^m (FL^{-4}T^2)^r (L)^s (L)^t \tag{b}$$

根据物理方程的一致性，可得：

$$\left.\begin{aligned} 1 &= m + r \\ -2 &= n - 2m - 4r + s + t \\ 0 &= -n + m + 2r \end{aligned}\right\} \tag{c}$$

式(c)中三个方程含有 5 个未知量，要求出定解须人为地指定其中的两个变量，如指定 m、s 后对式(c)求解，即得：

$$\left.\begin{aligned} r &= 1 - m \\ n &= 2 - m \\ t &= -m - s \end{aligned}\right\} \tag{d}$$

将式(d)代入式(a)中，则有

$$\Delta P = cu^{2-m} \mu^m \rho^{1-m} l^s d^{-m-s}$$

整理上式可得：

$$\frac{\Delta p}{\rho u^2} = c\left(\frac{du\rho}{\mu}\right)^{-m} \left(\frac{l}{d}\right)^s \tag{e}$$

式中 c 为无因次比例系数。

式(e)中准数的选择，与 π 定理是相符的。事实上，式(a)中物理量总数为

$$N = 6(\text{即 } \Delta P, u, \mu, \rho, l, d)$$

具有不同因次的量的数目为：

$$n = 5(\text{即 } \Delta P, u, \mu, \rho, d)$$

独立因次数目：

$$k = 3(\text{即 } L, F, T)$$

依上述 π 定理的推论可知，指数综合数群（即复杂准数）的数目应为

$$t_{\pi}=n-k=5-3=2(\text{即}\frac{\Delta p}{\rho u^2},\frac{du\rho}{\mu})$$

简单同类量之比（即简单准数）的数目：

$$t_s=N-n=6-5=1(\text{即 } l/d)$$

准数的总数：

$$t=N-k=6-3=3(\text{即}\frac{\Delta p}{\rho u^2},\frac{du\rho}{\mu},l/d)$$

例 1.2 对 π 定理予以了验证。下面的两个例题是应用 π 定理求取局部方程或者准数方程的问题。

例 1.3 用因次分析法求取敞口水箱底部的小孔流出液体的流量 q 与水平面高度 h 的直接关系。已知小孔断面积为 A_0，流体密度为 ρ。

解：此处流体仅仅因重力而流出，故重力加速度 g 必须考虑在内。

对于一时无法判定哪个为因变量时，可用下面介绍的一种无需先判别因变量的因次分析法。题给的变量及因次如下：

$$[q]=L^3T^{-1} \qquad [\rho]=ML^{-3}$$
$$[h]=L \qquad [g]=LT^{-2}$$
$$[A_0]=L^2$$

由 π 定理可知，准数的总数为

$$t=5-3=2$$

此处因无相同因次式，故无简单同类量组成的简单准数，即

$$t_s=0$$

当此局部方程写成无因次准数方程时，其每一项必为

$$q^a h^b A_0^c \rho^d g^e$$

并且其因次式为

$$[L^3T^{-1}]^a[L]^b[L^2]^c[ML^{-3}]^d[LT^{-2}]^e$$
$$=L^{3a+b+2c-3d+e}M^dT^{-a-2e}$$

因为 L、M 和 T 为独立因次，故其幂指数必为零，即

$$3a+b+2c-3d+e=0$$
$$d=0$$
$$-a-2e=0$$

又因 $d=0$，故密度与流量无关。由其余两方程可得：

$$2.5a+b+2c=0$$

故有

$$q^a h^{-2c-2.5a}A_0^c g^{-0.5a}=\left(\frac{q}{g^{0.5}h^{2.5}}\right)^a\left(\frac{A_0}{h^2}\right)^c$$

至此，可得出两个无因次准数。

$$N_1=\frac{q}{g^{0.5}h^{2.5}}$$

$$N_2=\frac{A_0}{h^2}$$