Yan Yuan

燕园教育

2013 考研专家指导丛书

考研数学名师名家高等数学辅导讲义

清华大学 王欢
北京大学 王德军
首都师范大学 童武
主编

由多次参加**命题及阅卷的专家**亲自编写，内容系统、权威

严格按照最新考试大纲，深入解读，突出重点，引领复习

赠送MP3盘

考研名师童武教授

考研数学串讲视频+辅导讲义

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

Yan Yuan
燕园教育

2013 考研专家指导丛书

考研数学名师名家高等数学辅导讲义

清华大学 王欢
北京大学 王德军
首都师范大学 童武
主编

由多次参加命题及阅卷的专家亲自编写，内容系统、权威

严格按照最新考试大纲，深入解读，突出重点，引领复习

考研名师童武教授

考研数学串讲视频+辅导讲义

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

图书在版编目(CIP)数据

考研数学名师名家高等数学辅导讲义/王欢,王德军,童武主编.—北京:中国石化出版社,2012.2
ISBN 978-7-5114-1393-2

Ⅰ.①考… Ⅱ.①王… ②王… ③童… Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 013170 号

未经本社书面授权,本书任何部分不得被复制、抄袭,或者以任何形式或任何方式传播。版权所有,侵权必究。

中国石化出版社出版发行

地址:北京市东城区安定门外大街 58 号
邮编:100011 电话:(010)84271850
读者服务部电话:(010)84289974
http://www.sinopec-press.com
E-mail:press@sinopec.com
北京科信印刷有限公司印刷
全国各地新华书店经销

*

787×1092 毫米 16 开本 17.25 印张 424 千字
2012 年 3 月第 1 版 2012 年 3 月第 1 次印刷
定价:35.00 元(赠送 MP3 盘)

前　　言

中国加入WTO之后，改革开放逐步深化，经济发展速度日益加快，社会对科学技术、文化教育的需求不断向高层次迈进，我国对硕士研究生等高层次人才的需求越来越大，这方面的教育也在稳步发展，规模不断扩大、层次逐步齐全、教学质量不断提高、测试更加规范化，考生人数也在迅猛增加。

从测量学角度来说，全国硕士研究生入学统一考试应是“常模参照”考试，即选拔性考试。命题工作需坚持既有利于为国家选拔高层次的专门人才，又有利于高等学校教学的原则，强调在考查知识的基础上，重点考查考生分析问题和解决问题的能力，并且要采用科学的办法，保持考试水平的稳定性。

为了更好地帮助考生复习，顺利通过数学考试、赢取高分，我们根据国家教育部最新制订的考试大纲，基于多年参加阅卷和考研辅导班的教学实践经验，以及分析了近几年考题中的考点、难点、重点及命题套路，倾力推出这套考研专家指导丛书。本套丛书包括《考研数学历届真题权威解析(数学一)》、《考研数学历届真题权威解析(数学二)》、《考研数学历届真题权威解析(数学三)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学一)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学二)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学三)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学一)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学二)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学三)》、《考研数学最后冲刺超越135分(数学一)》、《考研数学最后冲刺超越135分(数学二)》、《考研数学最后冲刺超越135分(数学三)》、《考研数学名师名家高分复习全书(理工类)》、《考研数学名师名家高分复习全书(经济类)》、《考研数学名师名家高等数学辅导讲义》、《考研数学名师名家线性代数辅导讲义》、《考研数学名师名家概率论与数理统计辅导讲义》、《考研数学最新精选1000题(理工类)》、《考研数学最新精选1000题(经济类)》、《考研数学必做客观题1800题精析(理工

类)》、《考研数学必做客观题1800题精析(经济类)》、《考研数学必做主观题600题精析(理工类)》和《考研数学必做主观题600题精析(经济类)》。

本套书的编写特点如下:

1. 配合最新考试大纲,反映最新变化

本书在严格遵循最新考试精神和最新考试大纲要求的基础上,力求反映最新考试要求,紧扣全国硕士研究生入学数学考试的脉搏。

2. 注重考试技巧、高效突破难关

本书精辟阐明解题思路,全面展现题型变化,为考生全程领航和理性分析,引领考生高效通过考试难关。考生可以利用本套冲刺试卷进行考前模拟实战训练,检验自己的学习成果,及时进行查漏补缺,有针对性地进行复习备考。希望考生能在仿真的环境下进行模拟训练,这样效果最佳。

3. 教授亲自主笔,编写阵容强大

本书由一线专家和教授亲自编著。编者多年来一直从事考研数学的考前辅导工作,积累了丰富的教学辅导经验,对历年考试情况比较了解,对考生在复习和考试过程中可能遇到的问题把握得比较准确。

尽管在编写过程中经历了严格的编审程序,力求达到完美,但限于时间和水平,仍可能存在不足,纰漏之处希望广大考生和专家批评、指正。

编　者

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com

目　　录

第一章　函数、极限与连续

§1　函　　数

考试大纲要求

(1)理解函数的概念，掌握函数的表示法，并会建立应用问题中的函数关系．

(2)了解函数有界性、单调性、周期性和奇偶性．

(3)理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念．

(4)掌握基本初等函数的性质及图形，了解初等函数的概念．

考点、重点与难点介绍

一、基本概念

1. 函数的定义

定义　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集．如果对于每个数 $x \in D$，变量 y 按照一定法则总有唯一确定的值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记做 $y = f(x)$．数值 D 叫做这个函数的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量．

当 x 遍取 D 的各个数值时，对应的函数值全体组成的数集 $W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域．

确定一个函数的两要素：定义域和对应法则．

注　当且仅当两个函数的定义域和对应法则完全相同时，才表示同一函数．

2. 反函数

定义　设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W．如果对于值域 W 中的任一 y 值，从关系式 $y = f(x)$ 中可确定唯一的一个 x 值，则称变量 x 为变量 y 的函数，记为 $x = \varphi(y)$，$\varphi(y)$ 称为函数 $y = f(x)$ 的反函数，习惯上 $y = f(x)$ 的反函数记为 $y = f^{-1}(x)$.

注 (1) $y = f(x)$ 的图像与其反函数 $x = \varphi(y)$ 的图像重合；$y = f(x)$ 的图像是与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称．

(2)只有一一对应的函数才有反函数．

(3)虽然 $y = f(x)$ 是单值函数，反函数 $x = \varphi(y)$ 却不一定是单值的．只有 $y = f(x)$ 不仅单值，而且是严格单调的，其反函数 $x = \varphi(y)$ 在 W 上是单值的．

3. 基本初等函数

基本初等函数共有以下六个，其性质和图形必须牢记，在此就不一一复述了．

(1)常数函数: $y(x)=c$

(2)幂函数: $y=x^a$(a 为常数)

(3)指数函数: $y=a^x$(a 是常数且 $a>0,a\neq 1$)

(4)对数函数: $y=\log_a x$(a 是常数且 $a>0,a\neq 1$), 定义域 $(0,+\infty)$, 它是指数函数 $y=a^x$ 的反函数.

(5)三角函数:

正弦函数 $y=\sin x(-\infty<x<+\infty)$

余弦函数 $y=\cos x(-\infty<x<+\infty)$

正切函数 $y=\tan x$, $D=\left\{x \mid x\in R, x\neq(2n+1)\dfrac{\pi}{2}, n\in Z\right\}$

余切函数 $y=\cot x$, $D=\{x \mid x\in R, x\neq n\pi, n\in Z\}$

正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$, $D=\left\{x \mid x\in R, x\neq(2n+1)\dfrac{\pi}{2}, n\in Z\right\}$

余割函数 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$, $D=\{x \mid x\in R, x\neq n\pi, n\in Z\}$

(6)反三角函数:

反正弦函数 $y=\arcsin x$, $x\in[-1,1]$, 值域 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$

反余弦函数 $y=\arccos x$, $x\in[-1,1]$, 值域 $[0,\pi]$

反正切函数 $y=\arctan x$, $x\in(-\infty,+\infty)$, 值域 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$

反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$, $x\in(-\infty,+\infty)$, 值域 $(0,\pi)$.

4. 复合函数

定义　设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f, $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_φ, $D=\{x \mid x\in D_\varphi$ 且 $\varphi(x)\in D_f\}\neq\varnothing$, 则当 $x\in D$ 时, 由 $y=f(\varphi(x))$ 确定的函数称为 f 与 φ 的复合函数, 而 u 称为中间变量.

5. 初等函数

由基本初等函数及其复合函数, 以及由这些函数的四则运算组成的函数称为初等函数.

6. 其他常见函数

(1)双曲函数:

双曲正弦: $\mathrm{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, 定义域 $(-\infty,+\infty)$, 奇函数.

双曲余弦: $\mathrm{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, 定义域 $(-\infty,+\infty)$, 偶函数.

双曲正切: $\mathrm{th}x=\dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$, 定义域 $(-\infty,+\infty)$, 奇函数.

(2)符号函数: $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$

(3)取整函数: $y=[x]$, y 是 x 的最大整数部分.

(4)狄利克雷函数：$y=f(x)=\begin{cases}1, & 当x为有理数时,\\0, & 当x为无理数时.\end{cases}$

注　符号函数、取整函数与狄利克雷函数都是分段函数，一般的分段函数不是初等函数.

二、函数的基本特性

1. 有界性

定义　若存在$M>0$，使得对任意$x\in I\subset D$，都有$|f(x)|\leqslant M(f(x)\leqslant M$或$f(x)\geqslant -M)$，则称$f(x)$在$I$上有界(有上界或下界)；若不存在这样的$M>0$，则称$f(x)$在区间$I$上无界.

注意　无穷大与无界函数的区别：在一定变化趋势下$f(x)$为无穷大，则$f(x)$一定无界；若$f(x)$在某个区间上无界，则$f(x)$不一定是无穷大.

2. 单调性

定义　若对于任意的$x_1,x_2\in(a,b)$，当$x_1<x_2$时，有$f(x_1)<f(x_2)$，则称函数$f(x)$在区间(a,b)上单调增加；若对于任意的$x_1,x_2\in(a,b)$，当$x_1<x_2$时，有$f(x_1)>f(x_2)$，则称$f(x)$在区间(a,b)上单调减少.

注　不是所有函数都有单调性，例如狄利克雷函数就没有单调性.

3. 函数的奇偶性

定义　设函数$f(x)$的定义域D关于原点对称(即若$x\in D$，则必有$-x\in D$). 如果对于任一$x\in D$，有$f(-x)=f(x)$恒成立，则称$f(x)$为偶函数. 如果对于任一$x\in D$，$f(-x)=-f(x)$恒成立，则称$f(x)$为奇函数.

注　(1)奇函数图形关于原点对称，偶函数图形关于y轴对称.

(2)奇函数满足$f(x)+f(-x)=0$.

(3)定义域一定要对称.

(4)奇函数或偶函数运算具有以下结论：

奇函数±奇函数=奇函数；偶函数±偶函数=偶函数；奇函数×(÷)奇函数=偶函数；偶函数×(÷)偶函数=偶函数；奇函数×(÷)偶函数=奇函数.

4. 周期性

定义　设函数$f(x)$的定义域为D. 如果存在一个不为零的数l，使得对于任意$x\in D$有$(x\pm l)\in D$，且$f(x+l)=f(x)$恒成立，则称$f(x)$为周期函数，l称为$f(x)$的周期，通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

注　(1)若T是$f(x)$的周期，则T/a是$f(ax+b)$的周期$(a>0)$；若T_i是$f_i(x)$的周期$(i=1,2,\cdots,n)$，则$T_1,T_2,\cdots,T_n$的最小公倍数T是$f_i(x)$及$f_i(x)$经初等运算所得函数的公共周期.

(2)常见周期函数：$\sin x$，$\cos x$其周期$T=2\pi$；$\tan x,\cot x,|\sin x|,|\cos x|$，其周期$T=\pi$.

典型例题精解

1. 利用函数定义

例1 若$f(x)$是奇函数,$\varphi(x)$是偶函数,且$\varphi[f(x)]$有意义,则$\varphi[f(x)]$是(　　).

(A)偶函数　　(B)奇函数

(C)非奇非偶函数　　(D)可能是奇函数也可能是偶函数

【答案】 A

【解析】 由题设知$f(-x)=-f(x)$,$\varphi(-x)=\varphi(x)$

例2 命题"①$f(x)$,$g(x)$在x_0点的某邻域内都无界,则$f(x)$,$g(x)$在x_0点的该邻域内一定无界;②$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$,则$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=\infty$;③$f(x)$及$g(x)$在$x_0$点的某邻域内均有界,则$f(x)$,$g(x)$在$x_0$的该邻域内一定有界;④$f(x)$,$g(x)$是当$x\to x_0$的无穷小量,则$x\to x_0$时$f(x)$和$g(x)$中至少有一个是无穷小量."中正确的是(　　).

(A)①②　　(B)②③　　(C)③④　　(D)①④

【答案】 B

【解析】 设$f(x)=\begin{cases}0, & x\text{为有理数}\\ 1/x, & x\text{为无理数}\end{cases}$　　$g(x)=\begin{cases}1/x, & x\text{为有理数,且}x\neq 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

则$f(x)g(x)=0$

当$x\to 0$时,$f(x)g(x)\to 0$. 但$x\to 0$时,$f(x)$及$g(x)$都不是无穷小,命题④不正确;且本例中$f(x)$及$g(x)$在$x=0$的任何邻域内都无界,但$f(x)g(x)=0$,在与前相同的邻域内有界,即命题①不正确.

2. 求函数的定义域

例3 求下列函数的定义域:

(1) $y=\arcsin\dfrac{1-x}{2}+\dfrac{\sqrt{4x-x^2}}{\lg(3x+1)}$;(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}\log\sqrt[3]{x^2-5}[\log_2(25-x^2)]$;

(3) $f(x)=\displaystyle\int_{x^2}^{\pi/2}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.

【解析】 (1) y的定义域应是三个复合函数定义域的交集:

$$\begin{cases}\left|\dfrac{1-x}{2}\right|\leqslant 1,\\ 4x-x^2\geqslant 0,\\ 3x+1>0,\\ 3x+1\neq 1,\end{cases}\quad \text{化简得}\quad \begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 3,\\ 0\leqslant x\leqslant 4,\\ x>-\dfrac{1}{3},\\ x\neq 0,\end{cases}$$

y的定义域为$(0,3]$.

(2)由y的表达式知

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com

$$\begin{cases} x-1\geqslant 0, \\ \sqrt{x-1}\neq 0, \\ \sqrt[3]{x^2-5}>0, \\ \sqrt[3]{x^2-5}\neq 1, \\ 25-x^2>0, \\ \log_2(25-x^2)>0, \end{cases} \text{化简得} \begin{cases} x\geqslant 1, \\ x\neq 1, \\ x^2-5>0, \\ x^2-5\neq 1, \\ 25>x^2, \\ 25-x^2>1, \end{cases} \text{解出} \begin{cases} x>1, \\ x>\sqrt{5}\text{ 或 }x<-\sqrt{5}, \\ x\neq \pm\sqrt{6}, \\ -5<x<5, \\ -2\sqrt{6}<x<2\sqrt{6} \end{cases}$$

y 的定义域为 $\sqrt{5}<x<\sqrt{6}$ 或 $\sqrt{6}<x<2\sqrt{6}$.

(3)该函数定义域为 $(-\infty,+\infty)$，注意不要写成 $x\neq 0$. 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，所以 $x=0$ 是被积函数的第一类间断点. 因此 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在包含 $x=0$ 的区间内积分有意义.

例 4　设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)$，函数 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，试求 $f\left(\dfrac{[x]}{x}\right)$ 的定义域.

【解析】　因 $f(x)$ 的定义域为 $0<x<1$，设 $\varphi(x)=\dfrac{[x]}{x}$，故 $f\left(\dfrac{[x]}{x}\right)=f(\varphi(x))$ 定义域是 $0<\varphi(x)=\dfrac{[x]}{x}<1$. 为使 $\dfrac{[x]}{x}<1$，必有 $x>0$ 且 $x\neq 1,2,3\cdots$；又因为 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$[x]=0$，为使 $\dfrac{[x]}{x}>0$，必有 $(-\infty<x<0)\cup[1,+\infty)$，其交为所求的定义域，即 $x>1$，且 $x\neq 2,3,\cdots$.

注　实际问题中的函数定义域须由实际条件许可的范围来确定，而不只是根据它的分析表示式确定.

例 5　从一块半径为 R 的圆铁片上挖去一个扇形做成一个漏斗（如图 1.1，图 1.2），留下的中心角为 φ. 试将漏斗容积表示成中心角 φ 的函数，并求其定义域.

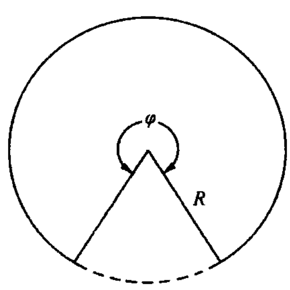

图 1.1

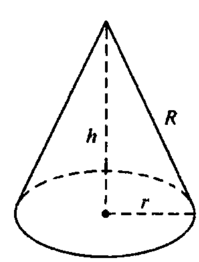

图 1.2

【解析】　设做成的漏斗高为 h，底半径为 r，则体积为 $V=\pi r^2h/3$，这里有两个变量 r 与 h，但它们不是独立的，由圆铁片的半径 R 联系着：

$$R^2=h^2+r^2,\quad \text{即}\quad h=\sqrt{R^2-r^2}$$

因而 V 可表示成 r 的函数. 为将 V 表示成 φ 的函数只需求出 r 与 φ 的关系.

由 $2\pi r=R\varphi$ 得 $r=R\varphi/2\pi$，所以

$$h=\sqrt{R^2-r^2}=R\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}/(2\pi),\ V=\pi r^2h/3=R^3\varphi^2\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}/(24\pi^2)$$

又容积 $V>0$，故 $4\pi^2-\varphi^2>0$，即 $\varphi^2<(2\pi)^2$，$|\varphi|<2\pi$，即 $-2\pi<\varphi<2\pi$. 由题意 φ 表示留下的中心角，故 $\varphi>0$. 所求定义域 $0<\varphi<2\pi$.

3. 求反函数

例 6　求 $y=1+2\sin\dfrac{x-1}{x+1}(x\geqslant 0)$ 的反函数及其定义域.

【解析】　由 $y=1+2\sin\dfrac{x-1}{x+1}$ 解出 x，得

$$\frac{y-1}{2}=\sin\frac{x-1}{x+1},\ \arcsin\frac{y-1}{2}=\frac{x-1}{x+1}=1-\frac{2}{x+1},$$

化简得

$$1-\arcsin\frac{y-1}{2}=\frac{2}{x+1},\ \frac{2}{1-\arcsin\frac{y-1}{2}}=x+1,$$

$$x=\left[1+\arcsin\left(\frac{y-1}{2}\right)\right]\Big/\left[1-\arcsin\left(\frac{y-1}{2}\right)\right]$$

所求的反函数为

$$y=\frac{1+\arcsin[(x-1)/2]}{1-\arcsin[(x-1)/2]},$$

其定义域可由 $-1\leqslant\arcsin[(x-1)/2]\leqslant 1$ 及 $\arcsin\dfrac{x-1}{2}\neq 1$ 确定，由此可知

$$1-2\sin 1\leqslant x\leqslant 1+2\sin 1\quad 及\quad x\neq 1+2\sin 1.$$

所以 y 的定义域为 $\{x\mid 1-2\sin 1\leqslant x<1+2\sin 1\}=[1-2\sin 1,1+2\sin 1)$.

例 7　求函数

$$y=f(x)=\begin{cases}x, & -\infty<x<1,\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4,\\ 2^x, & 4<x<+\infty\end{cases}$$

的反函数及其定义域.

【解析】　(1)在区域 $(-\infty,1)$ 内，$y=x$ 的反函数就是它本身，又因函数 $y=x$ 的值域为 $(-\infty,1)$，故其反函数 $x=y$ 的定义域也为 $(-\infty,1)$，于是有 $y=f^{-1}(x)=x(-\infty<x<1)$.

(2)在区间 $[1,4]$ 上由 $y=x^2$ 解出 $x=\pm\sqrt{y}$，因 $x\in[1,4]$，故 $x=\sqrt{y}$，又函数的值域为 $[1,16]$，故其反函数定义域为 $[1,16]$. 于是 $y=f^{-1}(x)=\sqrt{x}\ (1\leqslant x\leqslant 16)$.

(3)在区间 $(4,+\infty)$ 上由 $y=2^x$ 解出 $x=\log_2 y$. 因函数 $y=2^x$ 的值域为 $(16,+\infty)$，故其反函数定义域为 $(16,+\infty)$，于是 $y=\log_2 x(16<x<+\infty)$.

综上所述，所求反函数也是一分段函数，它的表达式为

$$y=f^{-1}(x)=\begin{cases}x, & -\infty<x<1,\\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 16,\\ \log_2 x, & 16<x<+\infty\end{cases}$$

注 如果从方程 $y-f(x)=0$ 中解出的 x 不唯一[例如上例中情况(2)]，则应根据原来函数的定义域即所求反函数的值域的要求确定其中一个函数.

4. 关于函数特性的几种题型

例 8 下列说法正确的是( ).

(A)若 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内有界，则它在 x_0 点必连续

(B)若 $f(x)$ 在 x_0 点连续，则必 $\exists\ \delta>0$，使 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时，$f(x)$ 有界

(C)若 $f(x)$ 在 x_0 点的某邻域内有界且可导，则 $f'(x)$ 也在 x_0 点的该邻域内有界

(D)若 $f(x)$ 为有界函数且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)a(x)=0$，则必有 $\lim\limits_{x\to x_0}a(x)=0$

【答案】 B

【解析】 $\because f(x)$ 在 x_0 处连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

$\therefore$ 给定 $\varepsilon=1$，必 $\exists\delta>0$，使 $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ 时

$|f(x)|-|f(x_0)|\leqslant|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

$\therefore |f(x)|<|f(x_0)|+\varepsilon=|f(x_0)|+1$

即 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内有界.

例 9 设函数 $f(x)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\sin\dfrac{x}{n}$（其中 n 是确定的自然数），则 $f(x)$ 是( ).

(A)无界函数 (B)有界但非周期函数

(C)单调函数 (D)以 $2n\pi$ 为周期的函数

【解析】 本题答案为(D). 这里需要指出的是，在 $f(x)$ 表达式中 n 是常数，是一个确定的值，只影响 $\sin\dfrac{x}{n}$ 的正负.

例 10 设 $f(x)$ 在包含原点的区间上可积，由 $f(x)$ 的奇偶性，讨论函数 $\varphi(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 的奇偶性.

【解析】 设 $f(x)$ 为偶函数，则 $f(-x)=f(x)$，由此有

$$\varphi(-x)=\int_0^{-x}f(t)\,\mathrm{d}t\xlongequal{令\ t=-z}\int_0^x f(-z)\,\mathrm{d}(-z)=-\int_0^x f(-z)\,\mathrm{d}z$$

$$=-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=-\varphi(x)$$

所以，当 $f(x)$ 为偶函数时，$\varphi(x)$ 是奇函数.

同理可证：当 $f(x)$ 为奇函数时，$\varphi(x)$ 是偶函数.

注 若 $f(x)$ 连续，则 $\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，任一个原函数都可写成 $\varphi(x)+C$，C 为任意取定的常数. 当 $f(x)$ 为偶函数时，$\varphi(x)$ 是奇函数，但 $\varphi(x)+C\ (C\neq0)$ 都不是奇函数.

5. 复合函数与初等函数

例 11 设 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant0$，求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

【解析】 由 $f(x)$ 可求出 $f[\varphi(x)]$ 的表达式：$f[\varphi(x)]=\mathrm{e}^{\varphi^2(x)}$. 又由 $f[\varphi(x)]=1-x$，得 $\mathrm{e}^{\varphi^2(x)}=1-x$，即 $\varphi^2(x)=\ln(1-x)$，$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}\ (\varphi(x)\geqslant0)$. $\varphi(x)$ 的定义域显然为 $(-\infty,0]$.

例 12　设$f(x)=\dfrac{x}{x-1}(x\neq 0,x\neq 1)$，$f_n(x)=\underbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}_{n次}$，试求$f_n(x)$的表达式.

【解析】　由$f(x)$的表达式知

$$f_1(x)=f(x)=\frac{x}{x-1},f_2(x)=f[f_1(x)],\cdots,f_n(x)=f[f_{n-1}(x)],$$

$$f(x)=\frac{x}{x-1}=\frac{1}{1-\dfrac{1}{x}},\frac{1}{f(x)}=1-\frac{1}{x},$$

所以

$$\begin{aligned}f_2(x)&=f[f_1(x)]=f[f(x)]\\&=\frac{1}{1-\dfrac{1}{f(x)}}=\frac{1}{1-\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}=x,\\f_3(x)&=f[f_2(x)]=f(x)\\&=\frac{x}{x-1}=\frac{1}{1-\dfrac{1}{x}},\\f_4(x)&=f[f_3(x)]\\&=f[f(x)]=f_2(x)=x.\end{aligned}$$

由以上三式可推测$f_{2n}(x)=x,f_{2n+1}(x)=\dfrac{x}{x-1}$. 下面可用数学归纳法证之. 假设当$n=2k-1$时，原式成立，则当$n=2k$时，

$$f_{2k}(x)=f[f_{2k-1}(x)]=f[f(x)]=f_2(x)=x,$$

$$f_{2k+1}(x)=f[f_{2k}(x)]=f(x)=\frac{x}{x-1}$$

所以$f_{2n}(x)=x,f_{2n+1}(x)=\dfrac{x}{x-1}$

$$\begin{cases}f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)-af(x)=\varphi(x),\\f(x)-af\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=\varphi\left(\dfrac{x}{x-1}\right),\end{cases}$$

解得$f(x)=\dfrac{1}{1-a^2}\left[a\varphi(x)+\varphi\left(\dfrac{x}{x-1}\right)\right]$.

§2　极　　限

考试大纲要求

(1)理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念，以及函数极限存在与左右极限之间的关系.

(2)掌握极限的性质及四则运算法则.

(3)掌握极限存在的两个法则：单调有界准则和夹逼准则，并会利用它们求极限；掌握利用两个重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 求极限的方法.

(4)理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的比较方法，会用等价无穷小求极限.

考点、重点与难点介绍

一、基本概念

1. 数列的极限

定义1 如果数列 $\{x_n\}$ 与常数 a 有下列关系：对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正整数 N, 使得对于 $n>N$ 时的一切 x_n, 不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 都成立，则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a, 记为

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 或 $x_n\to a(n\to\infty)$

如果数列没有极限，就说数列是发散的.

注 (1) ε 既是任意的，又是给定的；(2) N 根据给定的 ε 找出, $N=N(\varepsilon)$；(3) N 不唯一.

2. 函数的极限

2.1 当 $x\to x_0$ 时函数的极限

定义2 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义，如果对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正数 δ, 使得对于适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 的一切 x, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$, 那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 的极限，记做

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (当\ x\to x_0)$$

注 定义中 $0<|x-x_0|$ 表示 $x\neq x_0$, 所以 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 有没有极限与 $f(x)$ 在点 x_0 是否有定义并无关系.

2.2 自变量趋于无穷大时函数的极限

定义3 设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义. 如果对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在着正数 X, 使得对于适合不等式 $|x|>X$ 的一切 x, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$, 那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记做

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (当\ x\to x_0)$$

3. 左、右极限

定义4 （左极限） 在上述 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的定义2中，把 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $x_0-\delta<x<x_0$, 那么 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限，记做

$$\lim_{x\to x_0-0}f(x)=A \quad 或 \quad f(x_0-0)=A$$

定义5 （右极限） 在上述 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的定义2中，把 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $x_0<x<x_0+\delta$, 那么 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的右极限，记做

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A \quad 或 \quad f(x_0 + 0) = A$$

4. 无穷小

设函数$f(x)$在x_0的某一去心邻域内有定义(或$|x|$大于某一正数时有定义). 如果对于任意给定的正数ε(不论它多么小),总存在正数δ(或正数X),使得对于适合不等式$0 < |x - x_0| < \delta$(或$|x| > X$)的一切x,对应的函数值$f(x)$都满足不等式$f(x) < \varepsilon$,那么称函数$f(x)$当$x \to x_0$(或$x \to \infty$)时为无穷小,记做$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$(或$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$).

5. 无穷大

设函数$f(x)$在x_0的某一去心邻域内有定义(或$|x|$大于某一正数时有定义). 如果对于任意给定的正数M(不论它多么大),总存在正数δ(或正数X),使得对于适合不等式$0 < |x - x_0| < \delta$(或$|x| > X$)的一切x,对应的函数值$f(x)$总满足不等式$|f(x)| > M$,则称函数$f(x)$当$x \to x_0$(或$x \to \infty$)时为无穷大.

6. 无穷小与无穷大之间的关系

在自变量的同一变化过程中,若$f(x)$为无穷大,则其导数$\dfrac{1}{f(x)}$必为无穷小;反之,若$f(x)$为无穷小,且$f(x) \neq 0$,则其导数$\dfrac{1}{f(x)}$必为无穷大.

7. 函数的渐近线

如果$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = C$,则直线$y = C$是函数$y = f(x)$的水平渐近线;

如果$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$,则直线$x = x_0$是函数$y = f(x)$的垂直渐近线.

二、重要定理与性质

1. 收敛数列的性质

定理1(极限的唯一性) 数列$\{x_n\}$不能收敛于两个不同的极限.

定理2(收敛数列的有界性) 如果数列$\{x_n\}$收敛,那么数列$\{x_n\}$一定有界.

定理3(收敛数列与其子列间的关系) 如果数列$\{x_n\}$收敛于a,那么它的任一子列也收敛,且其极限也是a.

注 根据定理2,如果数列$\{x_n\}$无界,那么数列$\{x_n\}$一定发散. 但是,如果数列$\{x_n\}$有界,却不能断定数列$\{x_n\}$一定收敛,例如数列$1, -1, 1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots$有界,但却是发散的. 所以数列有界是数列收敛的必要条件,但不是充分条件.

2. 有关函数极限的定理

定理1 函数$f(x)$当$x \to x_0$时极限存在的充分必要条件是左极限及右极限各自存在且相等,即

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$$

定理2 (极限的局部保号性) 如果$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$,而且$A > 0$(或$A < 0$),那么就存在着点$x_0$的某一去心邻域,当$x$在该邻域内时,就有$f(x) > 0$(或$f(x) < 0$).

定理3 在自变量的同一变化过程$x \to x_0$(或$x \to \infty$)中,具有极限的函数等于它的极限与一个无穷小之和;反之,如果函数可表示为常数与无穷小之和,那么该常数就是这函数的

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com