

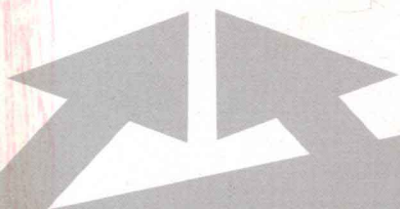
普通高等职业教育数学精品教材



高等数学

◎ 主编 王文平 阮淑萍

◎ 主审 韩新社



Gaodeng
Shuxue



华中科技大学出版社

<http://www.hustp.com>

普通高等职业教育数学精品教材

高等数学

主 编 王文平 阮淑萍
副主编 朱春浩
主 审 韩新社

华中科技大学出版社
中国·武汉

内 容 提 要

本书是根据高职高专高等数学课程教学基本要求,结合数学教学改革的实际经验,注意与高中阶段的数学教学内容的衔接,结合两年制和三年制高等职业教育的数学课时少、要求高的特点,对传统的教学内容削枝强干,进行整合,精选高等数学中最主要的内容。

内容包括:函数、极限与连续,导数和微分,导数的应用,不定积分,定积分及其应用,向量与空间解析几何,多元函数微积分,数学实验。

本书可作为高职高专工科专业的通用高等数学教材,也可作为工程技术人员自学用书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/王文平 阮淑萍 主编. —武汉:华中科技大学出版社,2010.9
ISBN 978-7-5609-6520-8

I. 高… II. ①王… ②阮… III. 高等数学-高等学校;技术学校-教材 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 168907 号

高等数学

王文平 阮淑萍 主编

策划编辑:周芬娜

责任编辑:胡 芬

封面设计:刘 卉

责任校对:祝 菲

责任监印:周治超

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录 排:武汉佳年华科量有限公司

印 刷:华中科技大学印刷

开 本:710mm×1000mm 1/16

印 张:14.25

字 数:293千字

版 次:2010年9月第1版第1次印刷

定 价:27.00元



华中出版

本书若有印装质量问题,请向出版社营销中心调换
全国免费服务热线:400-6679-118 竭诚为您服务
版权所有 侵权必究

前 言

本书是高等职业技术教育理工科类教学用书,是由数名多年从事高职教育实践的教师编写而成的。

在编写本教材时,我们根据教育部制定的高职高专教育高等数学课程教学基本要求,结合数学教学改革的实际经验,从高职教育的实际出发,按照“以应用为目的,以必需、够用为度”的原则,以“理解基本概念、掌握运算方法及应用”为依据,删去了不必要的逻辑推导,强化了基本概念的教学,淡化了数学运算技巧的训练,突出了实际应用能力的培养,特别是结合教学内容引入了数学实验,这不但极大地提高了学生利用计算机求解数学问题的能力,而且提高了学生学数学、用数学的积极性。

教材编排时按照由浅入深、由易到难、由具体到抽象、循序渐进的原则进行,并做到了概念清晰,条理清晰,语言简练,易教易学,便于教师讲授和读者自学;注意从实际问题中引入概念;注意把握好理论推导的深度;注重基本运算能力、分析问题和解决问题能力的培养;贯彻理论联系实际和启发式教学原则。

因此,本书除可作为高职高专工科类各专业教学用书外,也可作为其他大专层次的教学用书和广大自学者的自学用书。

本书共分8章,内容包括:函数、极限与连续,导数和微分,导数的应用,不定积分,定积分及其应用,向量与空间解析几何,多元函数微积分,数学实验。每节后附有习题,总课时约为60学时。

本书由王文平、阮淑萍任主编,提出了全书的总体构思及编写的指导思想;朱春浩教授为副主编;韩新社为主审,他认真、仔细地审阅了全稿,并提出了许多宝贵的修改意见。具体分工如下:第1章由阮淑萍副教授编写,第2、3章由朱双荣副教授编写,第4、5章由姜淑莲副教授编写,第6、7章由王文平副教授编写,第8章由韩新社副教授编写。

在本书的编写过程中,得到武汉船舶职业技术学院教务处及其他部门的大力支持,作者在此向他们谨致谢意。

由于编者水平有限,时间比较仓促,书中难免有不妥与错误之处,希望专家、同仁和广大读者批评指正。

编 者

2010年6月

目 录

第 1 章 函数、极限与连续	(1)
1.1 初等函数	(1)
1.1.1 函数的概念	(1)
1.1.2 基本初等函数	(4)
1.1.3 复合函数、初等函数	(6)
1.1.4 双曲函数	(8)
1.1.5 建立函数关系举例	(8)
习题 1.1	(9)
1.2 极限	(10)
1.2.1 数列的极限	(10)
1.2.2 函数的极限	(11)
习题 1.2	(13)
1.3 无穷小与无穷大	(13)
1.3.1 无穷小	(13)
1.3.2 无穷大	(16)
1.3.3 无穷大与无穷小的关系	(16)
习题 1.3	(17)
1.4 极限的运算	(17)
1.4.1 极限的四则运算法则	(17)
1.4.2 两个重要极限	(19)
习题 1.4	(21)
1.5 函数的连续性与间断点	(22)
1.5.1 函数连续性的概念	(22)
1.5.2 初等函数的连续性	(23)
1.5.3 函数的间断点	(24)
1.5.4 闭区间上连续函数的性质	(26)
习题 1.5	(27)
数学史话——极限思想的产生和发展	(27)
第 2 章 导数和微分	(30)
2.1 导数的概念	(30)

2.1.1	导数的定义	(30)
2.1.2	可导与连续的关系	(33)
2.1.3	导数的实际意义	(34)
习题 2.1		(35)
2.2	导数的运算.....	(36)
2.2.1	函数四则运算的求导法则	(36)
2.2.2	复合函数和反函数的求导法则	(38)
2.2.3	隐函数和由参数方程所确定函数的求导法则	(40)
习题 2.2		(43)
2.3	高阶导数.....	(43)
2.3.1	高阶导数的概念	(43)
2.3.2	二阶导数的力学意义	(44)
习题 2.3		(45)
2.4	微分的概念.....	(45)
2.4.1	微分的定义	(45)
2.4.2	微分的基本公式与运算法则	(47)
2.4.3	微分在近似计算中的应用举例	(48)
2.4.4	弧微分	(50)
习题 2.4		(51)
数学史话——微积分学的产生和发展		(52)
第 3 章	导数的应用	(55)
3.1	微分中值定理.....	(55)
3.1.1	罗尔定理	(55)
3.1.2	拉格朗日中值定理	(56)
习题 3.1		(57)
3.2	洛必达法则.....	(57)
3.2.1	$\frac{0}{0}$ 型未定式	(58)
3.2.2	$\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式	(59)
习题 3.2		(60)
3.3	函数的单调性与极值.....	(60)
3.3.1	函数单调性的判定	(60)
3.3.2	函数的极值与最值	(62)
习题 3.3		(67)

3.4 曲线的凹凸性和拐点	(67)
3.4.1 曲线的凹凸性	(67)
3.4.2 曲线的拐点	(69)
习题 3.4	(70)
3.5 函数图像的描绘	(70)
3.5.1 曲线的渐近线	(70)
3.5.2 描绘简单函数的图像	(71)
习题 3.5	(72)
3.6 曲线的曲率	(73)
3.6.1 曲率的概念	(73)
3.6.2 曲率的计算公式	(74)
3.6.3 曲率圆和曲率半径	(76)
习题 3.6	(77)
第 4 章 不定积分	(78)
4.1 原函数与不定积分	(78)
4.1.1 原函数	(78)
4.1.2 不定积分	(80)
4.1.3 不定积分的几何意义	(80)
习题 4.1	(81)
4.2 不定积分的基本公式和运算法则 直接积分法	(82)
4.2.1 不定积分的基本公式	(82)
4.2.2 不定积分的运算法则	(83)
4.2.3 直接积分法	(84)
习题 4.2	(85)
4.3 换元积分法	(85)
4.3.1 第一类换元积分法	(85)
4.3.2 第二类换元积分法	(91)
习题 4.3	(94)
4.4 分部积分法	(95)
习题 4.4	(98)
第 5 章 定积分及其应用	(99)
5.1 定积分的概念及性质	(99)
5.1.1 两个实例	(99)
5.1.2 定积分的定义	(101)
5.1.3 定积分的几何意义	(102)

5.1.4 定积分的性质	(105)
习题 5.1	(107)
5.2 微积分基本定理	(108)
5.2.1 积分上限函数	(109)
5.2.2 微积分基本定理	(110)
习题 5.2	(112)
5.3 定积分的换元法与分部积分法	(112)
5.3.1 定积分的换元法	(112)
5.3.2 定积分的分部积分法	(115)
习题 5.3	(116)
5.4 定积分的近似计算	(116)
5.4.1 矩形法	(116)
5.4.2 梯形法	(117)
5.4.3 抛物线法	(118)
习题 5.4	(119)
5.5 定积分在几何中的应用	(119)
5.5.1 定积分的微元法	(119)
5.5.2 平面图形的面积	(120)
5.5.3 体积	(122)
习题 5.5	(124)
5.6 定积分在物理中的应用	(125)
5.6.1 变力沿直线所做的功	(125)
5.6.2 液体的静压力	(126)
5.6.3 函数的平均值	(127)
习题 5.6	(129)
5.7 广义积分	(130)
5.7.1 无穷区间上的广义积分	(130)
5.7.2 有无穷间断点函数的广义积分	(131)
习题 5.7	(133)
第 6 章 向量与空间解析几何	(134)
6.1 空间直角坐标系与向量的概念	(134)
6.1.1 空间直角坐标系	(134)
6.1.2 向量的概念及其运算	(135)
6.1.3 向量的坐标表达式	(137)
习题 6.1	(139)

6.2 两向量的点积与叉积	(140)
6.2.1 两向量的点积	(140)
6.2.2 两向量的叉积	(142)
习题 6.2	(143)
6.3 平面与直线	(143)
6.3.1 平面方程	(143)
6.3.2 直线方程	(145)
习题 6.3	(147)
6.4 曲面与空间曲线	(147)
6.4.1 曲面及其方程	(148)
6.4.2 空间曲线及其方程	(151)
6.4.3 二次曲面	(152)
习题 6.4	(154)
数学史话——解析几何的产生和发展	(155)
第7章 多元函数微积分	(157)
7.1 多元函数的概念	(157)
7.1.1 多元函数的定义	(157)
7.1.2 二元函数的几何意义	(159)
习题 7.1	(159)
7.2 偏导数	(160)
7.2.1 偏导数的概念	(160)
7.2.2 高阶偏导数	(162)
习题 7.2	(164)
7.3 全微分	(164)
7.3.1 全微分的定义	(164)
7.3.2 全微分在近似计算中的应用举例	(166)
习题 7.3	(166)
7.4 偏导数的应用	(166)
7.4.1 二元函数极值的概念	(167)
7.4.2 二元函数极值的判别法	(167)
7.4.3 条件极值	(169)
习题 7.4	(170)
7.5 二重积分	(170)
7.5.1 二重积分的概念	(170)
7.5.2 二重积分的性质	(173)

7.5.3 二重积分的计算	(174)
7.5.4 二重积分的应用举例	(178)
习题 7.5	(180)
第 8 章 数学实验	(181)
实验 1 函数、极限与连续	(181)
实验 1 习题	(194)
实验 2 导数与微分	(195)
实验 2 习题	(197)
实验 3 导数的应用	(197)
实验 3 习题	(199)
实验 4 不定积分与定积分	(199)
实验 4 习题	(201)
实验 5 空间解析几何	(201)
实验 5 习题	(205)
实验 6 多元函数微积分	(205)
实验 6 习题	(208)
参考答案	(209)

第1章 函数、极限与连续

初等数学研究的对象主要是常量及其运算,而高等数学所研究的对象主要是变量及变量之间的依赖关系.函数正是这种依赖关系的体现,极限方法是研究变量之间依赖关系的基本方法.本章将在复习高中所学的函数与极限概念的基础上,进一步介绍两个重要概念——无穷小与无穷大,以及函数的连续性.

1.1 初等函数

1.1.1 函数的概念

1. 函数的定义域和值域

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量, D 为一个非空实数集,如果对属于 D 中的每个 x ,依照某个对应法则 f ,变量 y 都有确定的数值与之对应,那么 y 就称为 x 的函数,记作 $y=f(x)$. x 称为函数的自变量, y 称为因变量,数集 D 称为函数的定义域,函数 y 的取值范围 $M=\{y|y=f(x), x\in D\}$ 称为函数的值域.

如果对于每一个 $x\in D$,都有且仅有一个 $y\in M$ 与之对应,则称这种函数为单值函数.如果对于给定 $x\in D$,有多个 $y\in M$ 与之对应,则称这种函数为多值函数.一个多值函数通常可看成是由一些单值函数组成的.本书中,若无特别说明,所研究的函数都是指单值函数.

函数的定义域和对应法则称为函数的两个要素,而函数的值域一般称为派生要素,由定义域和对应法则确定.

在函数 $y=f(x)$ 中,当 x 取定 $x_0(x_0\in D)$ 时,称 $f(x_0)$ 为 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值,即

$$f(x_0)=f(x)|_{x=x_0}.$$

常用的函数表示法有解析法(又称公式法)、表格法和图像法.

例 1 确定函数 $f(x)=\sqrt{3+2x-x^2}+\ln(x-2)$ 的定义域,并求 $f(3)$, $f(t^2)$.

解 该函数的定义域应为满足不等式组 $\begin{cases} 3+2x-x^2\geq 0 \\ x-2>0 \end{cases}$ 的 x 值的全体.解此不等式组,得 $2<x\leq 3$.

故该函数的定义域为 $D=\{x|2<x\leq 3\}=(2,3]$.

$$f(3)=\sqrt{3+2\times 3-3^2}+\ln(3-2)=\ln 1=0,$$

$$f(t^2) = \sqrt{3+2t^2-t^4} + \ln(t^2-2).$$

2. 反函数

在研究变量之间的函数关系时,有时因变量和自变量的地位会相互转换,于是就出现了反函数的概念.

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$, 定义域为 D , 值域为 M . 如果对于 M 中的每一个 y 值, 都可由 $y=f(x)$ 确定唯一的 x 值与之对应, 则得到一个定义在 M 上的以 y 为自变量, x 为因变量的新函数, 称为 $y=f(x)$ 的反函数, 记作 $x=f^{-1}(y)$, 并称 $y=f(x)$ 为直接函数. 为了表述方便, 通常将 $x=f^{-1}(y)$ 改写为 $y=f^{-1}(x)$. 函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

求反函数的过程如下:

(1) 从 $y=f(x)$ 解出 $x=f^{-1}(y)$;

(2) 交换字母 x 和 y .

例 2 求 $y=x^3+4$ 的反函数.

解 由 $y=x^3+4$ 得到 $x=\sqrt[3]{y-4},$

交换 x 和 y , 得 $y=\sqrt[3]{x-4},$

即 $y=x^3+4$ 的反函数为

$$y=\sqrt[3]{x-4}.$$

3. 分段函数

定义 1.3 定义域分成若干部分, 函数关系由不同的式子分段表达的函数称为分段函数.

例如:
$$y=|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

例 3 称下面的函数为符号函数:

$$y=\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

试绘出函数图像.

解 符号函数表示自变量 x 的符号, 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 函数图像如图 1-1 所示.

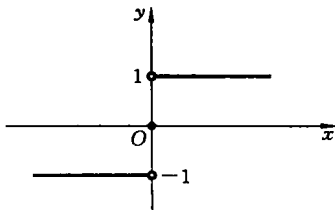


图 1-1

4. 函数的几种特性

1) 有界性

设函数 $y=f(x)$ 在集合 D 上有定义, 如果存在一个正数 M , 对于所有的 $x \in D$ 恒有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $f(x)$ 在 D 上是有界的; 如果不存在这样的正数 M , 则称函数 $f(x)$ 在 D 上是无界的.

例如, 函数 $y = \sin x$ 和 $y = \cos x$, 存在正数 $M=1$, 使得对于任意的 $x \in \mathbf{R}$, 均有 $|\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$, 所以函数 $y = \sin x$ 和 $y = \cos x$ 在其定义域 $\mathbf{R}$ 内都是有界的. 易知函数 $y = \tan x, y = \cot x$ 都是无界的.

2) 奇偶性

设函数 $y = f(x)$ 在集合 D 上有定义, 如果对于任意的 $x \in D$, 恒有 $f(-x) = f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 为偶函数; 如果对于任意的 $x \in D$, 恒有 $f(-x) = -f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图像关于 y 轴对称, 奇函数的图像关于原点对称, 如图 1-2(a) 和图 1-2(b) 所示.

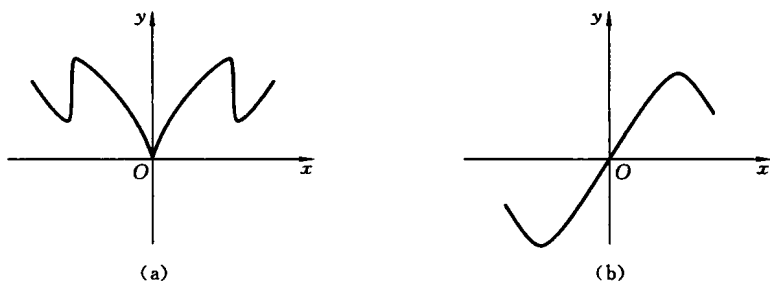


图 1-2

3) 单调性

设函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义, 如果对于 (a, b) 内的任意两点 x_1 和 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内是单调增加的, 区间 (a, b) 称为函数 $f(x)$ 的单调增加区间; 如果对于 (a, b) 内的任意两点 x_1 和 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内是单调减少的, 区间 (a, b) 称为函数 $f(x)$ 的单调减少区间.

单调增加函数和单调减少函数统称为单调函数. 显然单调增加函数的图像是沿 x 轴正向逐渐上升的, 如图 1-3 所示; 单调减少函数的图像是沿 x 轴正向逐渐下降的, 如图 1-4 所示.

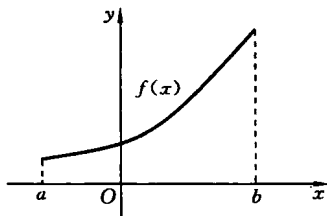


图 1-3

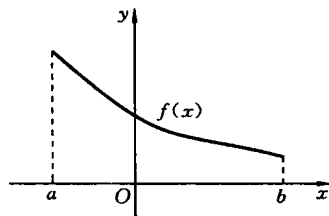


图 1-4

4) 周期性

对于函数 $y = f(x)$, 如果存在正数 T , 使得 $f(x) = f(x + T)$ 恒成立, 则称 $f(x)$

为周期函数,称 T 为函数周期. 显然 nT (n 是整数) 也为函数 $f(x)$ 的周期,一般提到的周期均指最小正周期 T .

三角函数 $y = \sin x$ 和 $y = \cos x$ 的周期都为 2π , $y = \tan x$ 和 $y = \cot x$ 的周期都是 π .

1.1.2 基本初等函数

常数函数 $y = C$ (C 为常数).

幂函数 $y = x^a$ (a 为实数).

指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$).

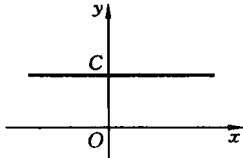
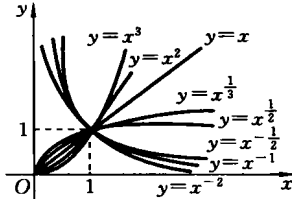
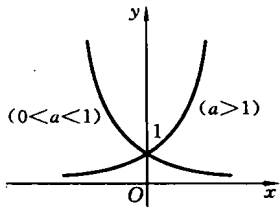
对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$).

三角函数 $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \tan x$; $y = \cot x$.

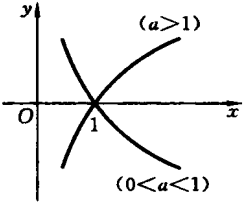
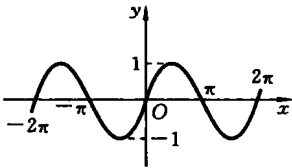
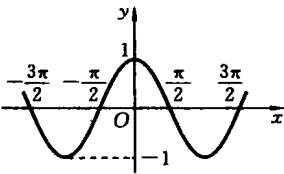
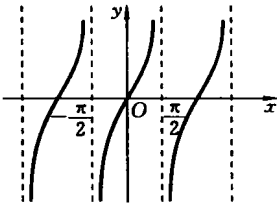
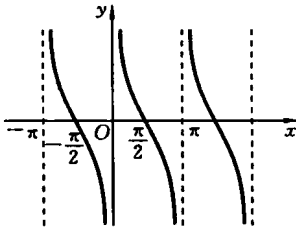
反三角函数 $y = \arcsin x$; $y = \arccos x$; $y = \arctan x$; $y = \operatorname{arccot} x$.

以上六种函数统称为基本初等函数. 为了便于应用,将它们的定义域、图像及主要性质列于表 1-1 中.

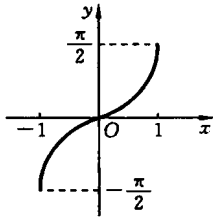
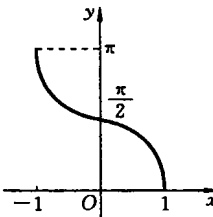
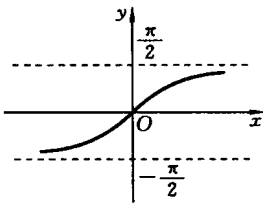
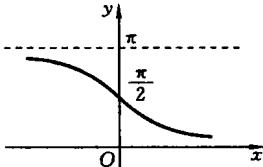
表 1-1

函数名称	表达式	定义域	图 像	主要性质
常数函数	$y = C$ (C 为常数)	$(-\infty, +\infty)$		图像过点 $(0, C)$, 为平行于 x 轴的一条直线
幂函数	$y = x^a$ (a 为实数)	随 a 的不同而不同, 但在 $(0, +\infty)$ 内总有定义		① 图像过点 $(1, 1)$. ② 当 $a > 0$ 时, 函数在 $(0, +\infty)$ 内单调增加; 当 $a < 0$ 时, 函数在 $(0, +\infty)$ 内单调减少
指数函数	$y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)	$(-\infty, +\infty)$		① 当 $a > 1$ 时, 函数单调增加; 当 $0 < a < 1$ 时, 函数单调减少. ② 图像在 x 轴上方, 且都过点 $(0, 1)$

续表

函数名称	表达式	定义域	图 像	主要性质
对数函数	$y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)	$(0, +\infty)$		① 当 $a > 1$ 时, 函数单调增加; 当 $0 < a < 1$ 时, 函数单调减少. ② 图像在 y 轴右侧, 且都过点 $(1, 0)$
三角函数	$y = \sin x$	$(-\infty, +\infty)$		① 奇函数, 周期为 2π, 是有界函数. ② 在 $(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2})$ 内单调增加; 在 $(2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2})$ 内单调减少 ($k \in \mathbb{Z}$)
	$y = \cos x$	$(-\infty, +\infty)$		① 偶函数, 周期为 2π, 是有界函数. ② 在 $(2k\pi - \pi, 2k\pi)$ 内单调增加; 在 $(2k\pi, 2k\pi + \pi)$ 内单调减少 ($k \in \mathbb{Z}$)
	$y = \tan x$	$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$)		① 奇函数, 周期为 π, 是无界函数. ② 在 $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$ 内单调增加 ($k \in \mathbb{Z}$)
	$y = \cot x$	$x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)		① 奇函数, 周期为 π, 是无界函数. ② 在 $(k\pi, k\pi + \pi)$ 内单调减少 ($k \in \mathbb{Z}$)

续表

函数名称	表达式	定义域	图 像	主要性质
反三角函数	$y = \arcsin x$	$[-1, 1]$		① 奇函数, 单调增加函数, 有界. ② $\arcsin(-x) = -\arcsin x$
	$y = \arccos x$	$[-1, 1]$		① 非奇非偶函数, 单调减少函数, 有界. ② $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$
	$y = \arctan x$	$(-\infty, +\infty)$		① 奇函数, 单调增加函数, 有界. ② $\arctan(-x) = -\arctan x$
	$y = \operatorname{arccot} x$	$(-\infty, +\infty)$		① 非奇非偶函数, 单调减少函数, 有界. ② $\operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot} x$

1.1.3 复合函数、初等函数

1. 复合函数

设有函数 $y = f(u) = \sqrt{u}$, $u = \varphi(x) = x^2 + 1$, 若要把 y 表示成 x 的函数, 可用代入法来完成:

$$y = f(u) = f[\varphi(x)] = f(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}.$$

这个处理过程就是函数的复合过程.

定义 1.4 设 y 是变量 u 的函数 $y = f(u)$, 而 u 又是变量 x 的函数 $u = \varphi(x)$, 且

$\varphi(x)$ 的函数值全部或部分落在 $f(u)$ 的定义域内, 那么 y 通过 u 的联系而成为 x 的函数, 称为由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数, 简称 x 的复合函数, 记作 $y=f[\varphi(x)]$, 其中 u 称为中间变量.

例 4 试将下列各函数 y 表示成 x 的复合函数:

$$(1) y=\sqrt[3]{u}, u=x^4+x^2+1; \quad (2) y=\ln u, u=3+v^2, v=\sec x.$$

解 (1) $y=\sqrt[3]{u}=\sqrt[3]{x^4+x^2+1}$, 即 $y=\sqrt[3]{x^4+x^2+1}$.

(2) $y=\ln u=\ln(3+v^2)=\ln(3+\sec^2 x)$, 即 $y=\ln(3+\sec^2 x)$.

例 5 指出下列各函数的复合过程, 并求其定义域:

$$(1) y=\sqrt{x^2-3x+2}; \quad (2) y=e^{\cos 3x}; \quad (3) y=\ln(2+\tan^2 x).$$

解 (1) $y=\sqrt{x^2-3x+2}$ 是由 $y=\sqrt{u}$, $u=x^2-3x+2$ 这两个函数复合而成的.

要使函数 $y=\sqrt{x^2-3x+2}$ 有意义, 须 $x^2-3x+2 \geq 0$, 解此不等式得 $y=\sqrt{x^2-3x+2}$ 的定义域为 $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$.

(2) $y=e^{\cos 3x}$ 是由 $y=e^u$, $u=\cos v$, $v=3x$ 这三个函数复合而成的, 因此 $y=e^{\cos 3x}$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

(3) $y=\ln(2+\tan^2 x)$ 是由 $y=\ln u$, $u=2+v^2$, $v=\tan x$ 这三个函数复合而成的.

当 $x=k\pi+\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ 时 $\tan x$ 不存在, 因此 $y=\ln(2+\tan^2 x)$ 的定义域为

$$\left\{x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\} \quad \text{或} \quad \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right) (k \in \mathbb{Z}).$$

说明

(1) 在复合过程中, 中间变量可多于一个, 如 $y=f(u)$, $u=\varphi(v)$, $v=\psi(x)$, 复合后为 $y=f[\varphi(\psi(x))]$. 但并不是任何两个函数 ($y=f(u)$, $u=\varphi(x)$) 都可复合成一个函数, 只有当内层函数 $u=\varphi(x)$ 的值域没有超过外层函数 $y=f(u)$ 的定义域时, 两个函数才可以复合成一个新函数, 否则便不能复合. 例如, $y=\sqrt{u^2-2}$, $u=\sin x$ 就不能复合.

(2) 分析一个复合函数的复合过程时, 每个层次都应是基本初等函数或常数与基本初等函数的四则运算式. 当分解到常数与自变量的基本初等函数的四则运算式 (称为简单函数) 时就不再分解了 (如例 5).

2. 初等函数

定义 1.5 由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合步骤所构成的, 并用一个解析式表示的函数称为初等函数.

例如, $y=2x^2-1$, $y=\sin \frac{1}{x}$, $y=e^{\sin^2(2x+1)}$, $y=\ln \cos e^x$ 等都是初等函数. 许多情

况下, 分段函数不是初等函数, 因为在定义域上不能用一个式子表示. 例如, 符号函数