普通高等职业教育数学精品教材

高等数学

Gaodeng Shuxue

◉主编　王文平　阮淑萍

◉主审　韩新社

华中科技大学出版社

http://www.hustp.com

普通高等职业教育数学精品教材

高 等 数 学

主　编　王文平　阮淑萍
副主编　朱春浩
主　审　韩新社

华中科技大学出版社
中国·武汉

内 容 提 要

本书是根据高职高专高等数学课程教学基本要求，结合数学教学改革的实际经验，注意与高中阶段的数学教学内容的衔接，结合两年制和三年制高等职业教育的数学课时少、要求高的特点，对传统的教学内容削枝强干，进行整合，精选高等数学中最主要的内容。

内容包括：函数、极限与连续，导数和微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用，向量与空间解析几何，多元函数微积分，数学实验。

本书可作为高职高专工科专业的通用高等数学教材，也可作为工程技术人员的自学用书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/王文平　阮淑萍　主编．—武汉：华中科技大学出版社，2010.9
ISBN 978-7-5609-6520-8

Ⅰ．高…　Ⅱ．①王…　②阮…　Ⅲ．高等数学-高等学校：技术学校-教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 168907 号

高等数学　　　　王文平　阮淑萍　主编

策划编辑：周芬娜
责任编辑：胡　芬
封面设计：刘　卉
责任校对：祝　菲
责任监印：周治超
出版发行：华中科技大学出版社（中国·武汉）
　　　　　武昌喻家山　　邮编：430074　　电话：(027)87557437
录　　排：武汉佳年华科技有限公司
印　　刷：华中科技大学印刷厂
开　　本：710mm×1000mm　1/16
印　　张：14.25
字　　数：293 千字
版　　次：2010 年 9 月第 1 版第 1 次印刷
定　　价：27.00 元

华中出版

前　言

本书是高等职业技术教育理工科类教学用书，是由数名多年从事高职教育实践的教师编写而成的.

在编写本教材时，我们根据教育部制定的高职高专教育高等数学课程教学基本要求，结合数学教学改革的实际经验，从高职教育的实际出发，按照“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，以“理解基本概念、掌握运算方法及应用”为依据，删去了不必要的逻辑推导，强化了基本概念的教学，淡化了数学运算技巧的训练，突出了实际应用能力的培养，特别是结合教学内容引入了数学实验，这不但极大地提高了学生利用计算机求解数学问题的能力，而且提高了学生学数学、用数学的积极性。

教材编排时按照由浅入深、由易到难、由具体到抽象、循序渐进的原则进行，并做到了概念清晰，条理清晰，语言简练，易教易学，便于教师讲授和读者自学；注意从实际问题中引入概念；注意把握好理论推导的深度；注重基本运算能力、分析问题和解决问题能力的培养；贯彻理论联系实际和启发式教学原则。

因此，本书除可作为高职高专工科类各专业教学用书外，也可作为其他大专层次的教学用书和广大自学者的自学用书。

本书共分 8 章，内容包括：函数、极限与连续，导数和微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用，向量与空间解析几何，多元函数微积分，数学实验。每节后附有习题，总课时约为 60 学时。

本书由王文平、阮淑萍任主编，提出了全书的总体构思及编写的指导思想；朱春浩教授为副主编；韩新社为主审，他认真、仔细地审阅了全稿，并提出了许多宝贵的修改意见。具体分工如下：第 1 章由阮淑萍副教授编写，第 2、3 章由朱双荣副教授编写，第 4、5 章由姜淑莲副教授编写，第 6、7 章由王文平副教授编写，第 8 章由韩新社副教授编写。

在本书的编写过程中，得到武汉船舶职业技术学院教务处及其他部门的大力支持，作者在此向他们谨致谢意。

由于编者水平有限，时间比较仓促，书中难免有不妥与错误之处，希望专家、同仁和广大读者批评指正。

编　者

2010 年 6 月

目　录

第1章 函数、极限与连续

初等数学研究的对象主要是常量及其运算，而高等数学所研究的对象主要是变量及变量之间的依赖关系．函数正是这种依赖关系的体现，极限方法是研究变量之间依赖关系的基本方法．本章将在复习高中所学的函数与极限概念的基础上，进一步介绍两个重要概念——无穷小与无穷大，以及函数的连续性．

1.1 初等函数

1.1.1 函数的概念

1. 函数的定义域和值域

定义1.1 设 x 和 y 是两个变量，D 为一个非空实数集，如果对属于 D 中的每个 x，依照某个对应法则 f，变量 y 都有确定的数值与之对应，那么 y 就称为 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$．x 称为函数的自变量，y 称为因变量，数集 D 称为函数的**定义域**，函数 y 的取值范围 $M=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的**值域**．

如果对于每一个 $x\in D$，都有且仅有一个 $y\in M$ 与之对应，则称这种函数为**单值函数**．如果对于给定 $x\in D$，有多个 $y\in M$ 与之对应，则称这种函数为**多值函数**．一个多值函数通常可看成是由一些单值函数组成的．本书中，若无特别说明，所研究的函数都是指单值函数．

函数的定义域和对应法则称为函数的两个要素，而函数的值域一般称为派生要素，由定义域和对应法则确定．

在函数 $y=f(x)$ 中，当 x 取定 $x_0(x_0\in D)$ 时，称 $f(x_0)$ 为 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值，即

$$f(x_0)=f(x)\big|_{x=x_0}.$$

常用的函数表示法有解析法（又称公式法）、表格法和图像法．

例1 确定函数 $f(x)=\sqrt{3+2x-x^2}+\ln(x-2)$ 的定义域，并求 $f(3)$，$f(t^2)$．

解 该函数的定义域应为满足不等式组 $\begin{cases}3+2x-x^2\geqslant 0\\ x-2>0\end{cases}$ 的 x 值的全体．解此不等式组，得 $2<x\leqslant 3$．

故该函数的定义域为 $D=\{x\,|\,2<x\leqslant 3\}=(2,3]$．

$$f(3)=\sqrt{3+2\times 3-3^2}+\ln(3-2)=\ln 1=0,$$

$$f(t^2)=\sqrt{3+2t^2-t^4}+\ln(t^2-2).$$

2. 反函数

在研究变量之间的函数关系时,有时因变量和自变量的地位会相互转换,于是就出现了反函数的概念.

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$,定义域为 D,值域为 M.如果对于 M 中的每一个 y 值,都可由 $y=f(x)$确定唯一的 x 值与之对应,则得到一个定义在 M 上的以 y 为自变量,x 为因变量的新函数,称为 $y=f(x)$的反函数,记作 $x=f^{-1}(y)$,并称 $y=f(x)$ 为直接函数.为了表述方便,通常将 $x=f^{-1}(y)$改写为 $y=f^{-1}(x)$.函数 $y=f(x)$与其反函数 $y=f^{-1}(x)$的图像关于直线 $y=x$ 对称.

求反函数的过程如下:

(1) 从 $y=f(x)$解出 $x=f^{-1}(y)$;

(2) 交换字母 x 和 y.

例 2 求 $y=x^3+4$ 的反函数.

解 由 $y=x^3+4$ 得到 $\qquad x=\sqrt[3]{y-4}$,

交换 x 和 y,得 $\qquad y=\sqrt[3]{x-4}$,

即 $y=x^3+4$ 的反函数为

$$y=\sqrt[3]{x-4}.$$

3. 分段函数

定义 1.3 定义域分成若干部分,函数关系由不同的式子分段表达的函数称为**分段函数**.

例如:
$$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}.$$

例 3 称下面的函数为符号函数:

$$y=\mathrm{sgn}x=\begin{cases} -1, & x<0 \\ 0, & x=0, \\ 1, & x>0 \end{cases}$$

试绘出函数图像.

解 符号函数表示自变量 x 的符号,定义域为$(-\infty,+\infty)$,函数图像如图 1-1 所示.

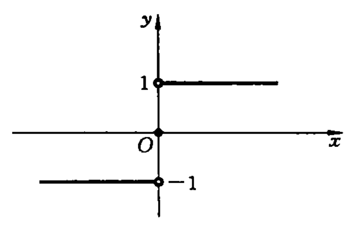


图 1-1

4. 函数的几种特性

1) 有界性

设函数 $y=f(x)$在集合 D 上有定义,如果存在一个正数 M,对于所有的 $x\in D$ 恒有$|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$在 D 上是有界的;如果不存在这样的正数 M,则称函数 $f(x)$在 D 上是无界的.

例如，函数 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$，存在正数 $M=1$，使得对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，均有 $|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$，所以函数 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 在其定义域 $\mathbf{R}$ 内都是有界的．易知函数 $y=\tan x$，$y=\cot x$ 都是无界的．

2）奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 在集合 D 上有定义，如果对于任意的 $x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为偶函数；如果对于任意的 $x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为奇函数．

偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于原点对称，如图 1-2(a) 和图 1-2(b) 所示．

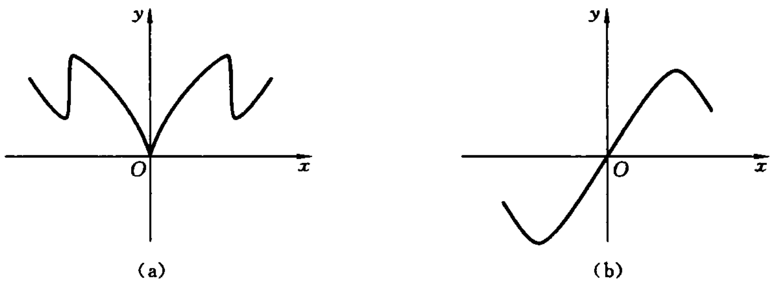


图 1-2

3）单调性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果对于 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调增加的，区间 (a,b) 称为函数 $f(x)$ 的单调增加区间；如果对于 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调减少的，区间 (a,b) 称为函数 $f(x)$ 的单调减少区间．

单调增加函数和单调减少函数统称为单调函数．显然单调增加函数的图像是沿 x 轴正向逐渐上升的，如图 1-3 所示；单调减少函数的图像是沿 x 轴正向逐渐下降的，如图 1-4 所示．

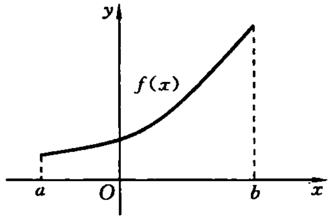


图 1-3

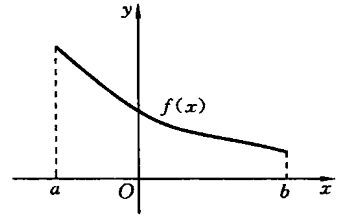


图 1-4

4）周期性

对于函数 $y=f(x)$，如果存在正数 T，使得 $f(x)=f(x+T)$ 恒成立，则称 $f(x)$

为周期函数，称 T 为函数周期. 显然 nT（n 是整数）也为函数 $f(x)$ 的周期，一般提到的周期均指最小正周期 T.

三角函数 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 的周期都为 2π，$y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 的周期都是 π.

1.1.2 基本初等函数

常数函数 $y=C$ （C 为常数）.

幂函数 $y=x^a$ （a 为实数）.

指数函数 $y=a^x$ （$a>0, a\neq 1$）.

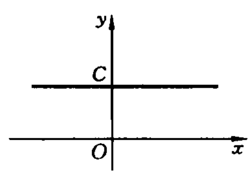
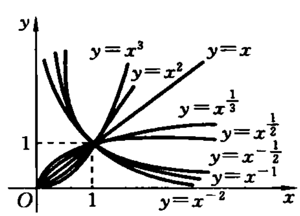
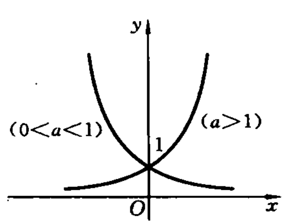
对数函数 $y=\log_a x$ （$a>0, a\neq 1$）.

三角函数 $y=\sin x$；$y=\cos x$；$y=\tan x$；$y=\cot x$.

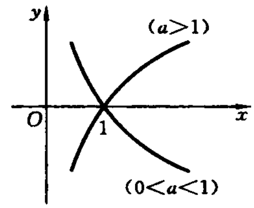
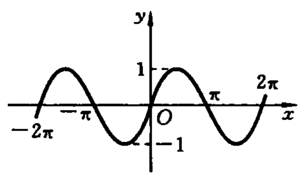
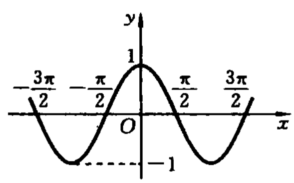
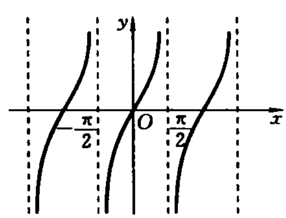
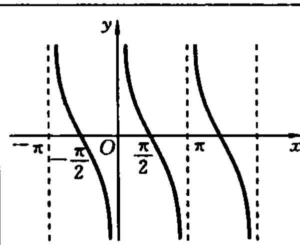
反三角函数 $y=\arcsin x$；$y=\arccos x$；$y=\arctan x$；$y=\operatorname{arccot} x$.

以上六种函数统称为基本初等函数. 为了便于应用，将它们的定义域、图像及主要性质列于表 1-1 中.

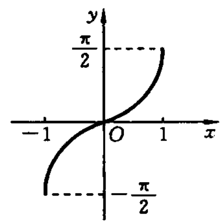
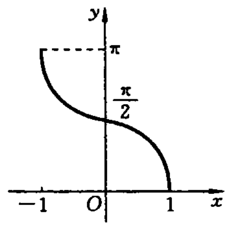
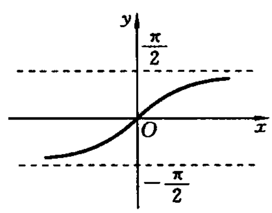
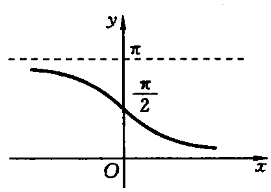
表 1-1

函数名称	表达式	定义域	图像	主要性质
常数函数	$y=C$ （C 为常数）	$(-\infty,+\infty)$		图像过点 $(0,C)$，为平行于 x 轴的一条直线
幂函数	$y=x^a$ （a 为实数）	随 a 的不同而不同，但在 $(0,+\infty)$ 内总有定义		① 图像过点 $(1,1)$. ② 当 $a>0$ 时，函数在 $(0,+\infty)$ 内单调增加；当 $a<0$ 时，函数在 $(0,+\infty)$ 内单调减少
指数函数	$y=a^x$ （$a>0, a\neq 1$）	$(-\infty,+\infty)$		① 当 $a>1$ 时，函数单调增加；当 $0<a<1$ 时，函数单调减少. ② 图像在 x 轴上方，且都过点 $(0,1)$

续表

函数名称	表达式	定义域	图　像	主 要 性 质
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>0,a\neq1)$	$(0,+\infty)$		① 当 $a>1$ 时，函数单调增加；当 $0<a<1$ 时，函数单调减少．② 图像在 y 轴右侧，且都过点 $(1,0)$
三角函数	$y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$		① 奇函数，周期为 2π，是有界函数．② 在 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加；在 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$ 内单调减少 $(k\in\mathbf{Z})$
	$y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$		① 偶函数，周期为 2π，是有界函数．② 在 $(2k\pi-\pi,2k\pi)$ 内单调增加；在 $(2k\pi,2k\pi+\pi)$ 内单调减少 $(k\in\mathbf{Z})$
	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$		① 奇函数，周期为 π，是无界函数．② 在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加 $(k\in\mathbf{Z})$
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$		① 奇函数，周期为 π，是无界函数．② 在 $(k\pi,k\pi+\pi)$ 内单调减少 $(k\in\mathbf{Z})$

续表

函数名称	表达式	定义域	图　像	主要性质
反三角函数	$y=\arcsin x$	$[-1,1]$		① 奇函数，单调增加函数，有界. ② $\arcsin(-x)$ $=-\arcsin x$
	$y=\arccos x$	$[-1,1]$		① 非奇非偶函数，单调减少函数，有界. ② $\arccos(-x)$ $=\pi-\arccos x$
	$y=\arctan x$	$(-\infty,+\infty)$		① 奇函数，单调增加函数，有界. ② $\arctan(-x)$ $=-\arctan x$
	$y=\operatorname{arccot} x$	$(-\infty,+\infty)$		① 非奇非偶函数，单调减少函数，有界. ② $\operatorname{arccot}(-x)$ $=\pi-\operatorname{arccot} x$

1.1.3 复合函数、初等函数

1. 复合函数

设有函数 $y=f(u)=\sqrt{u}$，$u=\varphi(x)=x^2+1$，若要把 y 表示成 x 的函数，可用代入法来完成：

$$y=f(u)=f[\varphi(x)]=f(x^2+1)=\sqrt{x^2+1}.$$

这个处理过程就是函数的复合过程.

定义 1.4　设 y 是变量 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是变量 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且

$\varphi(x)$的函数值全部或部分落在$f(u)$的定义域内，那么y通过u的联系而成为x的函数，称为由$y=f(u)$和$u=\varphi(x)$复合而成的函数，简称x的**复合函数**，记作$y=f[\varphi(x)]$，其中u称为**中间变量**.

例 4 试将下列各函数y表示成x的复合函数：

(1) $y=\sqrt[3]{u}$, $u=x^4+x^2+1$； (2) $y=\ln u, u=3+v^2$, $v=\sec x$.

解 (1) $y=\sqrt[3]{u}=\sqrt[3]{x^4+x^2+1}$， 即 $y=\sqrt[3]{x^4+x^2+1}$.

(2) $y=\ln u=\ln(3+v^2)=\ln(3+\sec^2 x)$， 即 $y=\ln(3+\sec^2 x)$.

例 5 指出下列各函数的复合过程，并求其定义域：

(1) $y=\sqrt{x^2-3x+2}$； (2) $y=e^{\cos 3x}$； (3) $y=\ln(2+\tan^2 x)$.

解 (1) $y=\sqrt{x^2-3x+2}$是由$y=\sqrt{u}, u=x^2-3x+2$这两个函数复合而成的. 要使函数$y=\sqrt{x^2-3x+2}$有意义，须$x^2-3x+2\geqslant 0$，解此不等式得$y=\sqrt{x^2-3x+2}$的定义域为$(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$.

(2) $y=e^{\cos 3x}$是由$y=e^u, u=\cos v, v=3x$这三个函数复合而成的，因此$y=e^{\cos 3x}$的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

(3) $y=\ln(2+\tan^2 x)$是由$y=\ln u$, $u=2+v^2, v=\tan x$这三个函数复合而成的. 当$x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$时$\tan x$不存在，因此$y=\ln(2+\tan^2 x)$的定义域为

$$\left\{x \,\middle|\, x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right\} \quad 或 \quad \left(k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z}).$$

说明

(1) 在复合过程中，中间变量可多于一个，如$y=f(u), u=\varphi(v), v=\psi(x)$，复合后为$y=f[\varphi(\psi(x))]$. 但并不是任何两个函数($y=f(u), u=\varphi(x)$)都可复合成一个函数，只有当内层函数$u=\varphi(x)$的值域没有超过外层函数$y=f(u)$的定义域时，两个函数才可以复合成一个新函数，否则便不能复合. 例如，$y=\sqrt{u^2-2}, u=\sin x$就不能复合.

(2) 分析一个复合函数的复合过程时，每个层次都应是基本初等函数或常数与基本初等函数的四则运算式. 当分解到常数与自变量的基本初等函数的四则运算式(称为简单函数)时就不再分解了(如例 5).

2. 初等函数

定义 1.5 由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合步骤所构成的，并用一个解析式表示的函数称为**初等函数**.

例如，$y=2x^2-1, y=\sin\frac{1}{x}, y=e^{\sin^2(2x+1)}, y=\ln\cos e^x$ 等都是初等函数. 许多情况下，分段函数不是初等函数，因为在定义域上不能用一个式子表示. 例如，符号函数