

国家“十一五”重点图书

量子物理新进展系列

量子力学的相空间理论

范洪义 吕翠红 著



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

量子力学的相空间理论研究量子态在相空间中的准几率分布函数表示、演化、重构,以及经典函数的量子化、经典变换与量子么正变换的关系。本书用作者自创的有序算符内的积分技术和纠缠态表象以崭新的视角和方法展开讨论,促进和深化了量子统计和量子信息的理论研究。书中还着重讨论了由量子纠缠所引起的相空间量子力学的新特点,提出相空间中的新变换,明显地丰富与发展了这一学科。

本书适合理工科大学物理专业和通信工程专业的师生及理论物理领域的研究人员阅读。

图书在版编目(CIP)数据

量子力学的相空间理论/范洪义,吕翠红著. —上海:
上海交通大学出版社,2012
ISBN 978-7-313-07064-7

I. ①量… II. ①范…②吕… III. ①量子力学—研究
②相空间—研究 IV. ①0413.1②0186.14

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 007357 号

量子力学的相空间理论

范洪义 吕翠红 著

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 951 号 邮政编码 200030)

电话: 64071208 出版人: 韩建民

浙江云广印业有限公司印刷 全国新华书店经销

开本: 850 mm×1168 mm 1/32 印张: 12.125 字数: 313 千字

2012 年 2 月第 1 版 2012 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-313-07064-7/O 定价: 69.00 元

版权所有 侵权必究

告读者:如发现本书有印装质量问题请与印刷厂质量科联系
联系电话:0573-86577317

前言

相空间一词最早出现在经典物理的哈密顿动力学中,为了形象地说明哈密顿方程,以质点的坐标 q 与动量 p 组成的坐标架就张成了一个相空间.相空间中相体积的概念被用来描写统计力学中的状态数、系综和热力学几率,相体积在演化中的不变性称为刘维定理,等等.那么,随着量子论的出现,相空间的概念应如何发展呢?

在新量子论中,根据海森堡的不确定性原理,人们不能同时精确地测量微观粒子的位置 q 和动量 p ,即不能确定到一个相点.于是自然就会想到在 (q, p) 相空间中定义准分布函数来研究微观粒子的量子态及其运动(当然,其确定的程度要小于最大可能的准确程度),这可以追溯到吉布斯所提出的系综理论.在这个理论框架中,系统的时间演化由相空间中的某一轨道 $(q_i(t), p_i(t))$ 来描述.早在 1930 年,Dirac 就在他的《量子力学原理》一书中指出,“吉布斯提出的系综,通常在实际上除了作为一个粗浅的近似外,是不可能实现的,但是,即便如此,它仍然形成一个有用的理论上的抽象.”他又说,“由于在量子力学里不可能同时对 q 与 p 赋予数值,相空间在量子力学中没有意义,从这种事实出发,相应的密度算符 ρ 的存在确是相当令人惊异的.”到了 1932 年,Wigner 引入了对应密度算符 ρ 的准经典分布函数 $f(q, p)$,它的边缘分布分别对应于在坐标空间和动量空间测量到粒子的几率,赋予了相空间以新的意义.从此,翻开了相空间量子力学的扉页.

显然,描述量子系统的准经典分布函数在相空间量子力学具有运动学的意义.随着时间的推延,初始态的准经典分布函数通常在 (q, p) 空间有展宽,例如一个高斯波包(即一组振荡的、通过干

扰这个振荡在小范围内相互增强,在此小范围外彼此抑制的复合波)的自由运动会随时间展宽,而这样一个波包在谐振子势下不展宽.在相空间中可以建立相似于薛定谔波动方程的 Wigner 函数的时间演化方程,这就使得研究量子相空间中分布函数演化也带有动力学性的意义,即具有波粒二象性的意义.

研究相空间量子力学的另一意义就是企图寻找量子力学与经典力学的相似性,通过与经典力学的规律做类比来深入理解微观世界的运动规律.思想家康德曾说:“每当理智缺乏可靠论证的思路时,类比这个方法往往能指引我们前进.”由于量子力学理论波函数的几率假设本身带有统计的特性,所以量子力学的相空间描述能与经典统计力学和统计数学作一定的类比.

20 世纪 70 年代诞生的量子光学的重要实验支柱是激光,描述它的量子态是相干态,一种最接近于经典情况的态.众所周知,一个经典粒子在 (q, p) 相空间占据一点,它的运动是一条线轨迹;而一个量子相干态在相空间中则占据一块小面积,这是因为坐标-动量的均方差之积 $\Delta(Q)\Delta(P) = \frac{\hbar}{2}$, 这个极小面积的存在暗示了相空间量子力学的研究有其本身的特点,因而是有趣的.量子相干态的演化在相空间中就是这块面积的移动,我们发现它可以对应于经典傅里叶光学的菲涅耳衍射.事实上,正如将要展示给读者看的,量子光学的许多重要内容在相空间中阐述物理意义还是较明确的,这是研究相空间量子力学的第三层意义.

量子力学的大部分算符之间是不对易的,它们的经典对应难以捉摸,在相空间中的表现有多样性,这就使得相空间量子力学的内容丰富多彩.相空间表述的一个重要任务是:把量子力学算符以一定的规则(例如 Weyl 对应规则)对应到 $q-p$ 相空间的经典的坐标-动量函数,它与量子态的 Wigner 函数密切相关. Dirac 说:“对于经典力学的正则变换应该有量子力学的么正算符与其对应.”所以,从经典变换寻找有物理应用的量子算符也是相空间量子力学的重要任务.例如,正如我们以后会谈到的从经典光学的菲涅耳变换

可以找出我们所谓的量子菲涅耳算符,并研究其与量子 Tomography 理论的关系。

英国物理学家麦克斯韦曾说:“为了不通过一种物理理论而获得物理思想,我们就应当熟悉现存的物理相似性,这样一来,所有的数学科学就建立在物理定律与数的定律的关系上,以致精密科学的目的就是把自然问题化为通过数运算的量来决定。”(薛定谔正是把点粒子的经典动力学看作是几何光学的近似而想出了波函数的线性波动方程。)这段话很能概括我们研究相空间量子力学的途径,即用自己发明的有序算符内的积分技术,通过对由 ket - bra 组成的积分型投影算符积分,完成从经典变换到量子力学变换的过渡,使得量子相空间的统计理论通过相干态表象能与光学变换理论相对照,并能自洽地纳入压缩态理论,极大地丰富量子相空间的内容,深化量子力学的数理基础。

量子相空间分布函数作为量子力学态的一种描述允许人们用尽可能多的经典语言来描述系统的量子特性。另一方面,人们也逐渐想办法来测量对应密度算符 ρ 的 Wigner 函数,从它的 Radon 变换再发展 Tomography 测量理论,因此量子相空间理论也可以为量子测量提供重要的理论基础。

本书用作者自创的有序算符内的积分技术(IWOP 技术)以崭新的视角和方法研究量子态在相空间中的准几率分布函数表示、演化、重构,以及经典函数量子化、经典变换与量子么正变换的关系,以促进和深化量子统计的理论。由于方法新颖,故能博观返约,由约创新。近年来,量子纠缠被广泛用来研究量子光学、量子信息和量子计算机,本书将着重用 IWOP 技术讨论由量子纠缠所引起的相空间量子力学的新特点,这将成为本书的特色之一。

清代大学者袁枚曾说:“……由博观返约之功,为陈年之酒,风霜之木,药淬之匕首,非枯槁简寂之谓,然必须力学苦思,常年不倦。”科技著作的写作应该是承前人未了之绪,开后人未省之端。

写作风格上,我们尽量向 Dirac 学习,崇尚简洁与优美,有序

算符内的积分技术揭示了 Dirac 符号法的深层次的美与简洁,这一点使人想起清代桐城派代表人物刘大魁曾写道:“凡文笔老则简,意真则简,辞切则简,理直则简,味淡则简,品贵则简,神远而含藏不尽则简,故简为文章尽境。”

上海交通大学校领导张杰、谢绳武、叶取源及物理系领导叶庆好十分关心“量子物理新进展系列”的写作和出版,给予了有力的支持,笔者范洪义在写作过程中得到妻子翁海光以及研究生们的协助,他们是刘述光、唐绪兵、宋军、陈俊华、任刚、许业军、谢传梅、胡利云、袁洪春、徐学翔、范悦、周军和陈锋,在此深表感谢.每当夜深人静、身心困倦想偷点懒时,范洪义脑海里就会闪现慈母毛婉珍 50 多年前在灯下为小学生批阅作文时边读边改时的情景,她那消瘦的脸庞和慈祥的目光浮现在儿子眼前,鞭策着他再打起精神,坚持工作一会儿.

科研作品贵在学附渊源,标新立异,方能使读者动其妍思,引其芳绪.人的精力与时光有限,而追求科学真理无涯,因此吾人读书,当读创意鲜明者、理论优美者、方法直捷者、叙述清晰者、悠久不朽者,以此五点为标准,则鲜见佳本也.笔者不才,写作时尽量以此五点标准来要求自己,然终究水平有限,祈望读者教正.

范洪义写于浩然大厦
2011 年 12 月

目 录

绪 论 相空间量子化的早期理论与绝热不变量	1
参考文献	6
 第 1 章 普朗克创世量子论的历史回顾和普朗克公式的 三种推导	8
1.1 普朗克的“移花接木”	8
1.2 玻色的“锦上添花”	11
1.3 利用广义 Hermann - Feynman 定理推导 普朗克公式的尝试	14
参考文献	20
 第 2 章 发展 Dirac 符号法的有序算符内的积分技术 (IWOP 技术)	21
2.1 Dirac 符号法给予的启示	21
2.2 坐标表象、动量表象和粒子数表象	23
2.3 有序算符内的积分技术	28
2.4 正规乘积算符内积分法求压缩算符	31
2.5 量子力学坐标、动量表象和相干态表象完备式的 纯高斯型积分形式	36
2.6 Wigner 算符的正规乘积形式	41
2.7 波函数和相应的 Wigner 函数的关系	42
2.8 用 IWOP 技术和相干态超完备性导出若干重要	

算符公式	44
参考文献	46
第 3 章 菲涅耳算符和量子刘维定理新观	48
3.1 从相干态在量子相空间中代表点的运动推导 菲涅耳算符	49
3.2 量子刘维定理新观	55
3.3 广义菲涅耳算符	57
3.3.1 压缩相干态表象	57
3.3.2 广义菲涅耳算符	62
3.3.3 广义 Collins 公式	64
3.4 Fresnel - Hadamard 组合变换	66
3.4.1 相干纠缠态表象	67
3.4.2 Hadamard 变换	68
3.4.3 Fresnel - Hadamard 互补变换	69
3.4.4 Fresnel - Hadamard 互补算符的特性	71
3.5 双模菲涅耳算符	73
参考文献	75
第 4 章 Weyl 对应与 Wigner 算符的范氏形式	76
4.1 从 Weyl 变换到 Weyl 对应	76
4.2 Weyl 编序记号的引入和 Wigner 算符的 Weyl 编序形式	80
4.3 Weyl 编序算符内的积分技术	83
4.4 Weyl 编序在相似变换下的不变性	85
4.5 若干 Wigner 变换公式的简化	86
4.6 化任意算符为 Weyl 编序形式的公式	88
4.7 用 Weyl 对应导出 Wigner 算符的相干态表象	90

4.8	用 Weyl 对应导出一类压缩相干态表象	92
4.9	用压缩相干态分析 Husimi 函数	95
4.10	用 Weyl 对应导出广义相干态表象	96
4.11	Weyl 对应和相干态对应	98
4.12	由 Wigner 算符的正规乘积高斯形式重述量子 相空间表象	101
4.12.1	Wigner 算符坐标表象的获得	101
4.12.2	Wigner 算符相干态表象的获得	102
4.12.3	得到 Wigner 算符 Weyl 编序形式的 新方法	105
4.13	原子相干态的 Wigner 函数	106
4.13.1	原子相干态的介绍	106
4.13.2	原子相干态与纠缠态的内积	108
4.13.3	原子相干态的 Wigner 函数	111
4.13.4	原子相干态的 Wigner 函数的边缘 分布	113
4.14	拉曼相干效应中的原子相干态	115
4.15	建立以哈密顿量本征态的 Wigner 函数为本征 函数的方程	119
	参考文献	122

第 5 章 数学统计正态分布和密度矩阵的正规排序

	形式的对应	124
5.1	量子统计中的相空间分布函数	124
5.2	概率统计中有关正态分布知识的回顾	126
5.2.1	正态分布	126
5.2.2	边缘分布	128
5.2.3	数学期望和方差	129

5.2.4	协方差与相关系数	130
5.3	广义 Wigner 算符及其正规乘积编序形式	130
5.4	广义 Wigner 算符的边缘分布	133
5.5	二维正态分布函数对应的密度算符	135
5.6	一类单模混态的二维正态分布	138
5.6.1	物理意义的探讨	138
5.6.2	ρ_s 的反正规编序形式	140
5.6.3	ρ_s 的边缘分布和方差	141
5.7	一类具有纠缠性质的两模混态的二维正态分布	142
5.8	一类特殊的 k -参数 Wigner 算符与其二维正态分布	148
5.8.1	k -参数 Wigner 算符	148
5.8.2	k -参数 Wigner 算符的统计意义	150
	参考文献	152
第 6 章	相空间中的范氏变换及应用	154
6.1	经典范氏变换的定义及其性质	154
6.2	范氏变换与经典函数量子化的 $P-Q(Q-P)$ 排序	156
6.3	从 $P-Q(Q-P)$ 编序到 Weyl 编序	158
6.4	从 Weyl 编序到 $P-Q(Q-P)$ 排序	160
6.5	$P-Q$ 排序和 $Q-P$ 排序的互换	161
6.6	$(P+Q)^n$ 的 $P-Q(Q-P)$ 排序	162
6.7	Weyl 对应与量子范氏变换积分核的关系	163
6.8	Wigner 算符和 $\delta(q-Q)\delta(p-P)$ 的互变	164
6.9	从 chirplet 函数到分数傅里叶变换	167
6.10	应用范氏变换解方程	170
	参考文献	174

第 7 章 纠缠态表象中的 Wigner 函数	176
7.1 反映量子纠缠性质的两粒子纠缠态表象 $ \eta\rangle$	176
7.2 $ \eta\rangle$ 的共轭表象 $ \xi\rangle$	178
7.3 Wigner 函数的纠缠态表示及其时间演化	180
7.4 $ \eta\rangle$ 态纠缠分析	182
7.5 用纠缠态表象讨论双模压缩算符	184
7.6 纠缠态与 Wigner 函数	186
7.7 纠缠态表象下的 Weyl 变换	188
7.7.1 $\langle\eta' \hat{H} \eta\rangle$ 的广义 Weyl 编序	188
7.7.2 纠缠情况下量子态的大小	191
7.7.3 Wigner 函数的上界	193
7.8 纠缠形式的 Wigner 算符的 Weyl 编序	194
7.9 介观 LC 电路中热真空态的 Wigner 函数及 物理意义	195
7.9.1 有限温度下介观 LC 电路的真空态	195
7.9.2 热场 Wigner 算符	196
7.9.3 热真空态的 Wigner 函数	197
7.9.4 介观电路热真空态 Wigner 函数的 边缘分布	198
7.10 三模纠缠态表象及其压缩	200
7.11 三模纠缠态表象的制备	208
7.12 三模纠缠态表象的 Wigner 函数	209
参考文献	215
第 8 章 纠缠形式的范氏变换	217
8.1 基于纠缠态表象的范氏变换	217
8.2 $\delta^{(2)}(\nu - a_1 + a_2^\dagger)\delta^{(2)}(\mu - a_1 - a_2^\dagger)$ 的 Weyl 编序	219
8.3 $\delta^{(2)}(\nu - a_1 + a_2^\dagger)\delta^{(2)}(\mu - a_1 - a_2^\dagger)$ 和纠缠 Wigner	

算符的互换	221
8.4 $(a_1^\dagger - a_2)^n (a_1 + a_2^\dagger)^m$ 的 Weyl 编序	224
8.5 从 chirplet 函数到复分数傅里叶变换	225
参考文献	229
第 9 章 量子 Tomography 理论和 Fresnel 变换的关系	230
9.1 傅里叶切片定理在 Wigner 算符理论中的应用	231
9.1.1 Wigner 算符的傅里叶切片变换	233
9.1.2 态矢 $ x\rangle_{\mu, \nu}$ 的性质	237
9.1.3 $ x\rangle_{\mu, \nu}$ 的共轭态矢 $ p\rangle_{\sigma, \tau}$	238
9.1.4 利用态矢 $ x\rangle_{\mu, \nu}$ 和 $ p\rangle_{\sigma, \tau}$ 构造新的广义 Wigner 算符	240
9.2 关于 Radon 变换的定理一则	243
9.3 复参数坐标-动量中介表象与 Fresnel 么正 变换算符	245
9.4 光学 Fresnel 变换与量子 tomography 的关系	248
9.5 关于 Tomogram 的一个定理	256
9.6 中介纠缠态表象的构建	262
9.7 中介纠缠态表象和双模 Fresnel 算符	264
9.8 Wigner 变换与 Radon 变换	265
9.9 光学 Fresnel 变换与量子 tomography 的关系 ——两模情况	275
9.10 密度算符的特征函数与其 tomogram 的关系	279
9.11 Wigner 算符在超平面上的 Radon 变换	282
9.12 密度算符用量子 tomogram 的展开式	286
参考文献	289

第 10 章 描写相空间量子力学的新表象	291
10.1 单模情形	291
10.2 纠缠情形	299
10.3 Wigner 函数随时间的演化	309
参考文献	314
 第 11 章 s-编序算符内的积分技术(IWSOP)	315
11.1 带 s 参数的 Wigner 算符及相应的 Weyl 对应规则	315
11.2 密度矩阵的 s -编序展开	318
11.3 $\Delta_s(\alpha^*, \alpha)$ 的 s -编序展开	320
11.4 算符 s -编序的本质	321
11.5 $\Theta a^{\dagger m} a^n \Theta$ 的正规编序	322
11.6 $\Theta a^{\dagger m} a^n \Theta$ 的 s' -编序展开	324
11.7 $\Delta_s(\alpha)$ 的相干态表象	325
11.8 $\Delta_s(x, p)$ 的 Radon 变换	326
11.9 带 s 参数的范氏变换	327
11.10 光子计数公式的 s 参数形式	330
11.11 算符 $:(a^\dagger a)^m e^{-\zeta a^\dagger a}:$ 的经典对应	333
11.12 纠缠形式的 s 参数的 Wigner 算符	334
11.13 双模 $\Delta_s(\sigma, \gamma)$ 的 s -编序展开	336
11.14 应用	336
参考文献	340
 第 12 章 纠缠态表象中的路径积分	341
12.1 相干态表象的路径积分	341
12.2 $ \eta\rangle$ 表象的路径积分	342
12.3 应用	346

12.4	三模纠缠态表象 $ \rho, \chi_1, \chi_2\rangle$ 中的路径积分	355
	参考文献	358
第 13 章	费米系统的量子相空间理论	359
13.1	费米系统的相干态表象和 IWOP 技术	359
13.2	费米系统的 Wigner 算符	362
13.3	费米系统的赝 Weyl 对应	363
13.4	费米算符 Weyl 编序在相似变换下的序不变性	365
13.4.1	费米子相似变换和经典 $SO(2n)$ 矩阵的 对应	365
13.4.2	相似变换下费米子算符 Weyl 编序的 序不变性	368
13.4.3	广义两模费米子压缩态	371
	参考文献	373
结 语		374

绪论 相空间量子化的早期理论与绝热不变量

量子力学除了有薛定谔的波动力学表述、海森堡的矩阵力学表述(这两种表述被狄拉克视为同一^[1],并发展为符号法)和费曼的路径积分表述^[2]外,还有一种常用的是相空间表述,相空间的维数是系统的自由度的两倍.可以说,玻尔-索末菲作用量的量子化(旧量子理论)就是在相空间中进行的.以谐振子为例,令其哈密顿量等于一个常量

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} \equiv E_n \quad (0.1)$$

并设 $q = \sqrt{\frac{2E_n}{m\omega^2}} \sin \theta$, $dq = \sqrt{\frac{2E_n}{m\omega^2}} \cos \theta d\theta$, 这就成了相空间中的一个椭圆方程.沿椭圆环路积分包含的面积

$$\oint p dq = \frac{2E_n}{\omega} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \frac{2\pi E_n}{\omega} = \frac{E_n}{\nu} \quad (0.2)$$

再由普朗克量子假设

$$E_n = n\hbar\nu \quad (0.3)$$

则

$$\oint p dq = n\hbar \quad (0.4)$$

说明该面积内有 n 个量子.

系统动力学的相空间描述方式有利于“绝热不变量”的讨论.力学系统在外部条件无限缓慢改变(外来干扰)下的进程叫做“绝热的”.相对于外来干扰而言,需要加以量子化的量,从经典力学层

面上看必须是对外来干扰不敏感的量. 爱因斯坦曾经提出绝热不变量的概念, 它是绝热过程中的一个不变量. 仍以谐振子为例, 从式(0.2)可以看出 $\frac{E_n}{\nu}$ 是绝热不变的. 这可以通过单摆来说明: 在摆弦的起点挖一细孔, 通过小孔极其缓慢地拉动摆弦, 以改变摆的长度 l . 弦的张力由摆的重力与向心力两部分组成, 所作的功

$$\delta A = -(mg \cos \varphi + ml \dot{\varphi}^2) \delta l \quad (0.5)$$

这里 φ 是角位移. 在提升摆弦所导致的绝热变化中, 发生了许多次振动, 但 l 没有明显改变, 可通过平均值写出方程

$$\delta A = -(mg \overline{\cos \varphi} + ml \overline{\dot{\varphi}^2}) \delta l \quad (0.6)$$

现在将能量的增加 δA 分解为外能量的增加和内能量的增加:

$$\delta A = -mg \delta l + \delta E \quad (0.7)$$

对于内能部分, 有

$$\delta E = [mg(1 - \overline{\cos \varphi}) - ml \overline{\dot{\varphi}^2}] \delta l = (\overline{E}_{\text{势能}} - 2 \overline{E}_{\text{动能}}) \frac{\delta l}{l} \quad (0.8)$$

只要振动是简谐的, 就有 $\overline{E}_{\text{势能}} = \overline{E}_{\text{动能}}$, 因此

$$\frac{\delta E}{E} = -\frac{1}{2} \frac{\delta l}{l}, \quad \delta \ln E = \delta \ln \frac{1}{\sqrt{l}} \quad (0.9)$$

$$E\sqrt{l} \text{ 或 } \frac{E}{\nu} = \text{常数} \quad (0.10)$$

如果通过该孔缓慢地拉动摆弦, 振动能量的改变将与频率成正比.

还可以更直观地用介观电路的量子化理论来分析量子电路中的绝热不变量, Louisell^[3] 是第一个把介观电路量子化的物理学家, 介观 LC 电路的经典哈密顿量是

$$H = \frac{p^2}{2L} + \frac{q^2}{2C}, \quad p = L \frac{dq}{dt} \quad (0.11)$$

加入量子化条件 $[q, p] = i\hbar$, 即把电荷量子化为正则坐标, $L \frac{dq}{dt}$ 量子化为正则动量, 并引入

$$q = \sqrt{\frac{\hbar\omega C}{2}} (a + a^\dagger), \quad p = i\sqrt{\frac{\hbar\omega L}{2}} (a^\dagger - a) \quad (0.12)$$

式中, $\omega L = (\omega C)^{-1}$, 则哈密顿量变为

$$H = \frac{Q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = \frac{Q^2}{2C} + \frac{\Phi^2}{2L} \quad (0.13)$$

式中, $\Phi = LI$ 是电感磁通. 电量 Q 的突变需要一脉冲电流 I , 但是这种脉冲电流将会对电感产生一个无限大的磁场, 所以 Q 是不突变的. 同样地, Φ^2 正比于电感的磁场能量, 它也是不可能突变的. 所以当一个介观 LC 电路的 L 和 C 在外部干扰下做无限小的改变时, $L \rightarrow L + \delta L$, $C \rightarrow C + \delta C$, 电路的能量改变为

$$\begin{aligned} \delta H &= \delta \left(\frac{Q^2}{2C} \right) + \delta \left(\frac{\Phi^2}{2L} \right) = Q^2 \delta \left(\frac{1}{2C} \right) + \Phi^2 \delta \left(\frac{1}{2L} \right) \\ &= -\frac{Q^2}{2C} \frac{\delta C}{C} - \frac{\Phi^2}{2L} \frac{\delta L}{L} \end{aligned} \quad (0.14)$$

由于参数 L 和 C 是绝热变化的, 其间电路发生了多次振荡, 故取平均 (从而平均电容能 = 平均电感能 = E), 可以得到

$$\delta E = -\frac{\overline{Q^2}}{2C} \frac{\delta C}{C} - \frac{\overline{\Phi^2}}{2L} \frac{\delta L}{L} = -\frac{E}{2} \left(\frac{\delta C}{C} + \frac{\delta L}{L} \right) = -E \frac{\delta \sqrt{LC}}{\sqrt{LC}} \quad (0.15)$$

对方程 (0.15) 积分就得到

$$E \sqrt{LC} = E/\omega = \text{const.} \quad (0.16)$$

考虑上述一般讨论的一个具体情况. 在经典理论中, 假设电路的电