王玉梅　孙在东　张志耀◎编著

经济管理运筹学习题集

Jingji Guanli Yunchouxue Xitiji

3

中国质检出版社
中国标准出版社

经济管理运筹学习题集

王玉梅　孙在东　张志耀　编著

中国质检出版社
中国标准出版社
北京

图书在版编目(CIP)数据

经济管理运筹学习题集/王玉梅,孙在东,张志耀编著.—北京:中国标准出版社,2012
ISBN 978-7-5066-6443-1

Ⅰ.①经… Ⅱ.①王…②孙…③张… Ⅲ.①经济管理-运筹学-习题集 Ⅳ.①F224.3-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第222376号

中国质检出版社
中国标准出版社 出版发行
北京市朝阳区和平里西街甲2号(100013)
北京市西城区三里河北街16号(100045)
网址:www.spc.net.cn
总编室:(010)64275323 发行中心:(010)51780235
读者服务部:(010)68523946
中国标准出版社秦皇岛印刷厂印刷
各地新华书店经销

*

开本 787×1092 1/16 印张 15.5 字数 379 千字
2012年2月第一版 2012年2月第一次印刷

*

定价 36.00 元

前　言

PREFACE

运筹学是一门以人机系统的组织、管理为对象，应用数学和计算机等工具来研究各类有限资源的合理规划使用并提供优化决策方案的科学。它是经济管理类专业本、专科生和研究生层次的重要专业基础课。

本书是由在青岛科技大学第一线工作的、已从事运筹学教学十余年的教师编写，其内容紧密结合经济管理专业的特点，是针对经济管理专业的本科生及研究生运筹学课程的一本辅助教材，主要满足经济管理专业本科层次，同时兼顾研究生和实际应用人员的使用。

习题是消化领会教材的一个重要环节，也是学习掌握运筹学理论和方法的必不可少的手段。本书包含线性规划、目标规划、整数规划、非线性规划、动态规划、图与网络分析、排队论、存储论、决策论、对策论等共 15 章的习题与硕士研究生入学考试的样题，针对每一章的课后习题，不仅给出正确答案，而且对要点进行详解，供学生复习和消化课本知识使用。同时，每一章都提供了近年来运筹学硕士研究生入学考试的样题，并给出其求解的要点。

本书的具体分工是：第 1 章至第 15 章的章节规划、统稿、内容的选编、修改由王玉梅完成；第 7、8、9、12、14 章的编写由王玉梅完成，第 1 章至第 5 章的编写由孙在东完成，第 6、10、11、13、15 章的编写由张志耀完成。

本书在写作过程中得到了青岛科技大学教务处和研究生处的大力支持，获得青岛科技大学教学改革立项项目“运筹学教学改革的

‘3＋3’模式研究”的资金支持。同时感谢在本书写作过程中提供帮助的刘树艳、王志宪、李立、杨友才、柴立俊、张靖、王宪涛、苑吉洋、杨义清、张天鹰、林琳、林双、田恬、傅佳琳、索琪、王丽等同志。

鉴于编者水平有限，书中有不妥或错误之处，恳请广大读者批评指正。

编著者

2011年6月15日

目　录

CONTENTS

第 1 章　线性规划与单纯形法习题详解

习题

1.1　用图解法求解下列线性规划问题，并指出问题是具有唯一最优解、无穷多最优解、无界解还是无可行解。

(1) $\max z=x_1+x_2$

$$\begin{cases}5x_1+10x_2\leqslant 50\\x_1+x_2\geqslant 1\\x_2\leqslant 4\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

(2) $\min z=x_1+1.5x_2$

$$\begin{cases}x_1+3x_2\geqslant 3\\x_1+x_2\geqslant 2\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

(3) $\max z=2x_1+2x_2$

$$\begin{cases}x_1-x_2\geqslant -1\\-0.5x_1+x_2\leqslant 2\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

(4) $\max z=x_1+x_2$

$$\begin{cases}x_1-x_2\geqslant 0\\3x_1-x_2\leqslant -3\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

1.2　将下列线性规划问题变换成标准型，并列出初始单纯形表。

(1) $\min z=-3x_1+4x_2-2x_3+5x_4$

$$\begin{cases}4x_1-x_2+2x_3-x_4=-2\\x_1+x_2+3x_3-x_4\leqslant 14\\-2x_1+3x_2-x_3+2x_4\geqslant 2\\x_1,x_2,x_3\geqslant 0,\quad x_4\text{无约束}\end{cases}$$

(2) $\max s=z_k/p_k$

$$\begin{cases}z_k=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{m}a_{ik}x_{ik}\\\sum\limits_{k=1}^{m}-x_{ik}=-1\ (i=1,\cdots,n)\\x_{ik}\geqslant 0\quad (i=1\cdots n;k=1,\cdots,m)\end{cases}$$

1.3　在下面的线性规划问题中找出满足约束条件的所有基解。指出哪些是基可行解，并代入目标函数，确定最优解。

(1) $\max z=2x_1+3x_2+4x_3+7x_4$

$$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3-4x_4=8\\x_1-2x_2+6x_3-7x_4=-3\\x_1,x_2,x_3,x_4\geqslant 0\end{cases}$$

(2) $\max z=5x_1-2x_2+3x_3-6x_4$

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+4x_4=7\\2x_1+x_2+x_3+2x_4=3\\x_1,x_2,x_3,x_4\geqslant 0\end{cases}$$

1.4　分别用图解法和单纯形法求解下列线性规划问题，并指出单纯形迭代每一步相当于图形的哪一点。

(1) $\max z=2x_1+x_2$

$$\begin{cases}3x_1+5x_2\leqslant 15\\6x_1+2x_2\leqslant 24\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

(2) $\max z=2x_1+5x_2$

$$\begin{cases}x_1\leqslant 4\\2x_2\leqslant 12\\3x_1+2x_2\leqslant 18\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

1.5 以 1.4 题(1)为例，具体说明当目标函数中变量的系数怎样变动时，满足约束条件的可行域的每一个顶点，都可能使得目标函数值达到最优。

1.6 分别用单纯形法中的大 M 法和两阶段法求解下列线性规划问题，并指出属哪一类解。

(1) $\max z=2x_1+3x_2-5x_3$

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3\leqslant 15\\2x_1-5x_2+x_3\leqslant 24\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

(2) $\min z=2x_1+3x_2+x_3$

$$\begin{cases}x_1+4x_2+2x_3\geqslant 8\\3x_1+2x_2\geqslant 6\\x_1,x_2,x_3\geqslant 0\end{cases}$$

(3) $\max z=10x_1+15x_2+12x_3$

$$\begin{cases}5x_1+3x_2+x_3\leqslant 9\\-5x_1+6x_2+15x_3\leqslant 15\\2x_1+x_2+x_3\geqslant 5\\x_1,x_2,x_3\geqslant 0\end{cases}$$

(4) $\max z=2x_1-x_2+2x_3$

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3\geqslant 6\\-2x_1+x_3\geqslant 2\\2x_2-x_3\geqslant 0\\x_1,x_2,x_3\geqslant 0\end{cases}$$

1.7 求下述线性规划问题目标函数 z 的上界和下界。

$\max z=c_1x_1+c_2x_2$

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2\leqslant b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2\leqslant b_2\end{cases}$$

其中：$1\leqslant c_1\leqslant 3,4\leqslant c_2\leqslant 6,8\leqslant b_1\leqslant 12,10\leqslant b_2\leqslant 14,-1\leqslant a_{11}\leqslant 3,2\leqslant a_{12}\leqslant 5,2\leqslant a_{21}\leqslant 4,4\leqslant a_{22}\leqslant 6$。

1.8 表 1-1 是某求极大化线性规划问题计算得到的单纯形表。表中无人工变量，a_1，a_2，a_3，d，c_1，c_2 为待定常数。试说明这些常数分别取何值时，以下结论成立：

(1)表中解为唯一最优解；(2)表中解为最优解，但存在无穷多最优解；(3)该线性规划问题具有无界解；(4)表中解非最优，对解改进，换入变量为 x_1，换出变量为 x_6。

表 1-1

b		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	d	4	a_1	1	0	a_2	0
x_4	2	-1	-3	0	1	-1	0
x_6	3	a_3	-5	0	0	-4	1
c_j-z_j		c_1	c_2	0	0	-3	0

1.9 某昼夜服务的公交线路每天各时间段内所需司机和乘务员人数如表 1-2：

表 1-2

班次	时　间	所需人数	班次	时　间	所需人数
1	6:00～10:00	60	4	18:00～22:00	50
2	10:00～14:00	70	5	22:00～2:00	20
3	14:00～18:00	60	6	2:00～6:00	30

设司机和乘务人员分别在各时间区段一开始时上班，并连续上班 8 小时，问该公交线路至少配备多少名司机和乘务人员。列出这个问题的线性规划模型。

1.10 某糖果厂用原料 A、B、C 加工成三种不同牌号的糖果甲、乙、丙，已知各种糖果中 A、B、C 含量，原料成本，各种原料的每月限制用量，三种牌号糖果的单位加工费用及售价如表 1-3 所示。

表 1-3

原料	甲	乙	丙	原料成本/(元/kg)	每月限制用量/kg
A	≥60%	≥15%		2	2000
B				1.5	2500
C	≤20%	≤60%	≤50%	1	1200
加工费(元/kg)	0.50	0.40	0.30		
售价(元/kg)	3.40	2.85	2.25		

问该厂每月应当生产这三种牌号糖果各多少千克，使该厂获利最大？建立这个问题的线性规划数学模型。

1.11 某厂生产三种产品Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ。每种产品需经过 A、B 两道加工程序，该厂有两种设备能完成 A 工序，以 A_1，A_2 表示；有三种设备完成 B 工序，分别为 B_1，B_2，B_3；产品Ⅰ可以在 A、B 任何一种设备上加工，产品Ⅱ可以在任何规格的 A 设备上加工，但完成 B 工序时，只能在 B_1 设备上加工；产品Ⅲ只能在 A_2，B_2 上加工。已知在各种机床设备的单件工时，原材料费，产品销售价格，各种设备有效台时以及满负荷操作时机床设备的费用如下表 1-4，要求安排最优生产计划，使该厂利润最大化。

表 1-4

设备	产品			设备有效台时	满负荷时的设备费用/元
	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ		
A_1	5	10		6000	300
A_2	7	9	12	10000	321
B_1	6	8		4000	250
B_2	4		11	7000	783
B_3	7			4000	200
原料费/(元/件)	0.25	0.35	0.50		
单价/(元/件)	1.25	2.00	2.80		

考研典型题精解

设某种动物每天至少需要 700g 蛋白质、30g 矿物质、100mg 维生素。现有 5 种饲料可供选择，每种饲料每公克营养成分的含量及单价如表 1-5 所示：

试建立既满足动物生长需要，又使费用最省的选用饲料方案的线性规划模型。

表 1-5

饲料	蛋白质/g	矿物质/g	维生素/mg	价格/(元/kg)	饲料	蛋白质/g	矿物质/g	维生素/mg	价格/(元/kg)
1	3	1	0.5	0.2	4	6	2	2	0.3
2	2	0.5	1	0.7	5	18	0.5	0.8	0.8
3	1	0.2	0.2	0.4					

答案

1.1 【解】

(1)（图略）有唯一最优解，max $z=14$；

(2)（图略）有唯一最优解，min $z=9/4$；

(3)（图略）无界解；

(4)（图略）无可行解。

1.2 【解】

(1) 设 $z=-z'$，$x_4=x_5-x_6$，　$x_5,x_6\geqslant 0$，

标准型：$\max z'=3x_1-4x_2+2x_3-5(x_5-x_6)+0x_7+0x_8-Mx_9-Mx_{10}$

$$\text{s.t.}\begin{cases}-4x_1+x_2-2x_3+x_5-x_6+x_{10}=2\\ x_1+x_2+3x_3-x_5+x_6+x_7=14\\ -2x_1+3x_2-x_3+2x_5-2x_6-x_8+x_9=2\\ x_1,x_2,x_3,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10}\geqslant 0\end{cases}$$

初始单纯形表：

$c_j\to$			3	−4	2	−5	5	0	0	$-M$	$-M$	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	
$-M$	x_{10}	2	−4	1	−2	1	−1	0	0	0	1	2
0	x_7	14	1	1	3	−1	1	1	0	0	0	14
$-M$	x_9	2	−2	[3]	−1	2	−2	0	−1	1	0	2/3
$-z'$		$4M$	$3-6M$	$4M-4$	$2-3M$	$3M-5$	$5-3M$	0	$-M$	0	0	

(2) 加入人工变量 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$，得到：

$$\max s=(1/p_k)\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ik}x_{ik}-Mx_1-Mx_2-\cdots-Mx_n$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_i+\sum\limits_{k=1}^{m}x_{ik}=1 \quad (i=1,2,3,\cdots,n)\\ x_{ik}\geqslant 0,x_i\geqslant 0,\quad (i=1,2,3,\cdots,n;k=1,2,\cdots,m)\end{cases}$$

这里 M 是任意大的正整数。

初始单纯形表：

c_j			$-M$	$-M$	…	$-M$	a_{11}/p_k	a_{12}/p_k	…	a_{1m}/p_k	…	a_{n1}/p_k	a_{n2}/p_k	…	a_{mn}/p_k	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	…	x_n	x_{11}	x_{12}	…	x_{1m}	…	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{mn}	
$-M$	x_1	1	1	0	…	0	1	1	…		…	0	0	…	0	
$-M$	x_2	1	0	1	…	0		0	…		…	0	0	…	0	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
$-M$	x_n	1	0	0	…	1	0	0	…	0	…	1	1	…	1	
$-s$		M	0	0	…	0	a_{11}/p_k+M	a_{12}/p_k+M	…	a_{1m}/p_k+M	…	a_{n1}/p_k+M	a_{n2}/p_k+M	…	a_{mn}/p_k+M	

1.3 【解】

(1) 约束方程的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是：

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -4 \\ 1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix}$$

令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3,\boldsymbol{P}_4)$

$\boldsymbol{P}_1$ 与 $\boldsymbol{P}_2$ 线形无关，以 $(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2)$ 为基，x_1,x_2 为基变量。

有 $\begin{cases} 2x_1+3x_2=8+x_3+4x_4 \\ x_1-2x_2=-3-6x_3+7x_4 \end{cases}$

令非基变量 $x_3=x_4=0$，解得：$x_1=1,x_2=2$，并得到 $z_1=8$，基解 $\boldsymbol{X}^{(1)}=(1,2,0,0)^{\mathrm{T}}$ 为可行解。

同理，以 $(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_3)$ 为基，基解 $\boldsymbol{X}^{(2)}=(45/13,0,-14/13,0)^{\mathrm{T}}$ 是非可行解；

以 $(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_4)$ 为基，基解 $\boldsymbol{X}^{(3)}=(34/5,0,0,7/5)^{\mathrm{T}}$ 是可行解，$z_3=117/5$；

以 $(\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3)$ 为基，基解 $\boldsymbol{X}^{(4)}=(0,45/16,7/16,0)^{\mathrm{T}}$ 是可行解，$z_4=163/16$；

以 $(\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_4)$ 为基，基解 $\boldsymbol{X}^{(5)}=(0,68/29,0,-7/29)^{\mathrm{T}}$ 是非可行解；

以 $(\boldsymbol{P}_4,\boldsymbol{P}_3)$ 为基，基解 $\boldsymbol{X}^{(6)}=(0,0,-68/31,-45/31)^{\mathrm{T}}$ 是非可行解；

最大值为 $z_3=117/5$；最优解 $\boldsymbol{X}^{(3)}=(34/5,0,0,7/5)^{\mathrm{T}}$。

(2) 约束方程的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3,\boldsymbol{P}_4)$

$\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2$ 线性无关，以 $(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2)$ 为基，有：

$$\begin{cases} x_1+2x_2=7-3x_3-4x_4 \\ 2x_1+x_2=3-x_3-2x_4 \end{cases}$$

令 $x_3,x_4=0$，解得：$x_1=-1/3,x_2=11/3$

基解 $\boldsymbol{X}^{(1)}=(-1/3,11/3,0,0)^{\mathrm{T}}$ 为非可行解；

同理，以 $(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_3)$ 为基，基解 $\boldsymbol{X}^{(2)}=(2/5,0,11/5,0)^{\mathrm{T}}$ 是可行解，$z_2=43/5$；

以 $(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_4)$ 为基，基解 $\boldsymbol{X}^{(3)}=(-1/3,0,0,11/6)^{\mathrm{T}}$ 是非可行解；

以 $(\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3)$ 为基，基解 $\boldsymbol{X}^{(4)}=(0,2,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是可行解，$z_4=-1$；

以 $(\boldsymbol{P}_4,\boldsymbol{P}_3)$ 为基，基解 $\boldsymbol{X}^{(6)}=(0,0,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是可行解，$z_6=-3$；

最大值为 $z_2=43/5$；最优解为 $\boldsymbol{X}^{(2)}=(2/5,0,11/5,0)^{\mathrm{T}}$。

1.4 【解】 (1)(图略)

$\max z=33/4$　最优解是 $X^*=(15/4,3/4)$

单纯形法，标准型是

$$\max z=2x_1+x_2+0x_3+0x_4$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} 3x_1+5x_2+x_3=15 \\ 6x_1+2x_2+x_4=24 \\ x_1,x_2,x_3,x_4\geqslant 0 \end{cases}$$

单纯形表计算：

c_j			2	1	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	15	3	5	1	0	5
0	x_4	24	[6]	2	0	1	4
$-z$		0	2	1	0	0	
0	x_3	3	0	[4]	1	$-1/2$	3/4
2	x_1	4	1	1/3	0	1/6	12
$-z$		-8	0	1/3	0	$-1/3$	
1	x_2	3/4	0	1	1/4	$-1/8$	
2	x_1	15/4	1	0	$-1/12$	5/24	
$-z$		$-33/4$	0	0	$-1/12$	$-7/24$	

$\boldsymbol{X}^* = (15/4, 3/4, 0, 0)^{\mathrm{T}}$

$\max z = 33/4$

迭代第一步表示原点；第二步代表 C 点$(4,0,3,0)^{\mathrm{T}}$；第三步代表 B 点$(15/4,3/4,0,0)^{\mathrm{T}}$。

(2)（图略）

$\max z = 34$ 此时坐标点为 $x^* = (2,6)$

单纯形法，标准型是：

$\max z = 2x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$

$$\text{s. t.}\begin{cases} x_1 + x_3 = 4 \\ 2x_2 + x_4 = 12 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

（表略）

$\boldsymbol{X}^* = (2,6,2,0,0)^{\mathrm{T}}$

$\max z = 34$

迭代第一步得 $\boldsymbol{X}^{(1)} = (0,0,4,12,18)^{\mathrm{T}}$表示原点，迭代第二步得 $\boldsymbol{X}^{(2)} = (0,6,4,0,6)^{\mathrm{T}}$，第三步迭代得到最优解的点 $\boldsymbol{X}^* = (2,6,2,0,0)^{\mathrm{T}}$。

1.5 【解】 目标函数：$\max z = c_1x_1 + c_2x_2$

(1) 当 $c_2 \neq 0$ 时

$x_2 = kx_1 + z/c_2$ 其中，$k = -c_1/c_2$

$k_{AB} = -3/5, k_{BC} = -3$

• $k < k_{BC}$时，c_1, c_2 同号。

当 $c_2 > 0$ 时，目标函数在 C 点有最大值；

当 $c_2 < 0$ 时，目标函数在原点有最大值。

• $k_{BC} < k < k_{AB}$时，c_1, c_2 同号。

当 $c_2 > 0$ 时，目标函数在 B 点有最大值；

当 $c_2 < 0$ 时，目标函数在原点有最大值。

• $k_{AB} < k < 0$ 时，c_1, c_2 同号。

当 $c_2>0$ 时，目标函数在 A 点有最大值；

当 $c_2<0$ 时，目标函数在原点有最大值。

• $k>0$ 时，c_1,c_2 异号。

当 $c_2>0,c_1<0$ 时，目标函数在 A 点有最大值；

当 $c_2<0,c_1>0$ 时，目标函数在 C 点有最大值。

• $k=k_{AB}$ 时，c_1,c_2 同号。

当 $c_2>0$ 时，目标函数在 AB 线段上任一点有最大值；

当 $c_2<0$，目标函数在原点有最大值。

• $k=k_{BC}$ 时，c_1,c_2 同号。

当 $c_2>0$ 时，目标函数在 BC 线段上任一点有最大值；

当 $c_2<0$ 时，目标函数在原点有最大值。

• $k=0$ 时，$c_1=0$。

当 $c_2>0$ 时，目标函数在 A 点有最大值；

当 $c_2<0$，目标函数在 OC 线段上任一点有最大值。

(2) 当 $c_2=0$ 时，$\max z=c_1x_1$

• $c_1>0$ 时，目标函数在 C 点有最大值；

• $c_1<0$ 时，目标函数在 OA 线段上任一点有最大值；

• $c_1=0$ 时，在可行域任何一点取最大值。

1.6 【解】

(1) 解法一：大 M 法

化为标准型：

$$\max z=2x_1+3x_2-5x_3-Mx_4+0x_5-Mx_6$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=7\\2x_1-5x_2+x_3-x_5+x_6=10\\x_1,x_2,x_3,x_5,x_4,x_6\geqslant 0\end{cases}$$

这里 M 是一个任意大的正数。

单纯形表：

		c_j	2	3	-5	$-M$	0	$-M$	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$-M$	x_4	7	1	1	1	1	0	0	7
$-M$	x_6	10	[2]	-5	1	0	-1	1	5
$-z$		$17M$	$3M+2$	$3-4M$	$2M-5$	0	$-M$	0	
$-M$	x_4	2	0	[7/2]	1/2	1	1/2	$-1/2$	4/7
2	x_1	5	1	$-5/2$	1/2	0	$-1/2$	1/2	—
$-z$		$2M-10$	0	$(7/2)M+8$	$0.5M-6$	0	$0.5M+1$	$-1.5M-1$	
3	x_2	4/7	0	1	1/7	2/7	1/7	$-1/7$	
2	x_1	45/7	1	0	6/7	5/7	$-1/7$	1/7	
$-z$		$-102/7$	0	0	$-50/7$	$-M-16/7$	$-1/7$	$-M+1/7$	

最优解是：$\boldsymbol{X}^*=(45/7,4/7,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$

目标函数最优值 $\max z=102/7$ 有唯一最优解。

解法二：两阶段法

第一阶段数学模型为 $\min w=x_4+x_6$

$$\text{s. t.}\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=7\\2x_1-5x_2+x_3-x_5+x_6=10\\x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\geqslant 0\end{cases}$$

（单纯形表略）

最优解是：$\boldsymbol{X}^*=(0,0,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$

目标函数最优值 $\min w=0$

第二阶段单纯形表：

		c_j	2	3	-5	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_5	
3	x_2	4/7	0	1	1/7	1/7	
2	x_1	45/7	1	0	6/7	$-1/7$	
$-z$		$-102/7$	0	0	$-50/7$	$-1/7$	

最优解是：$\boldsymbol{X}^*=(45/7,4/7,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$

$\max z=102/7$

(2) 解法一：大 M 法

$z'=-z$ 有 $\max z'=-\min(-z')=-\min z$

化成标准形：

$\max z'=-2x_1-3x_2-x_3+0x_4+0x_5-Mx_6-Mx_7$

$$\text{s. t.}\begin{cases}x_1+4x_2+2x_3-x_4+x_6=4\\3x_1+2x_2-x_5+x_7=6\\x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\geqslant 0\end{cases}$$

（单纯性表计算略）

线性规划最优解是：$\boldsymbol{X}^*=(4/5,9/5,0,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$，目标函数最优值 $\min z=7$

非基变量 x_3 的检验数 $\sigma_3=0$，所以有无穷多最优解。

解法二：两阶段法

第一阶段最优解 $\boldsymbol{X}^*=(0,0,0,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$ 是基本可行解，$\min w=0$；

第二阶段最优解 $\boldsymbol{X}^*=(4/5,9/5,0,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}\min z=7$；

非基变量 x_3 的检验数 $\sigma_3=0$，所以有无穷多最优解。

(3) 解法一：大 M 法

加入人工变量，化成标准型：

$\max z=10x_1+15x_2+12x_3+0x_4+0x_5+0x_6-Mx_7$

$$\text{s. t.}\begin{cases}5x_1+3x_2+x_3+x_4=9\\-5x_1+6x_2+15x_3+x_5=15\\2x_1+x_2+x_3-x_6+x_7=5\\x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\geqslant 0\end{cases}$$

（单纯形表计算略）

当所有非基变量为负数，人工变量 $x_7=0.5$，所以原问题无可行解。

解法二：两阶段法（略）

(4) 解法一：大 M 法

单纯形法，(表略)非基变量 x_4 的检验数大于零，此线性规划问题有无界解。

解法二：两阶段法(略)。

1.7 【解】

(1) 求 z 的上界

$\max z=3x_1+6x_2$

$$\text{s.t.}\begin{cases}-x_1+2x_2\leqslant 12\\2x_1+4x_2\leqslant 14\\x_2,x_1\geqslant 0\end{cases}$$

加入松弛变量，化成标准型，用单纯形法解得最优解 $\boldsymbol{X}^*=(0,7/2,5,0)^{\mathrm{T}}$

目标函数上界为 $z=21$。

存在非基变量检验数等于零，所以有无穷多最优解。

(2) 求 z 的下界

线性规划模型：

$\max z=x_1+4x_2$

$$\text{s.t.}\begin{cases}3x_1+5x_2\leqslant 8\\4x_1+6x_2\leqslant 10\\x_2,x_1\geqslant 0\end{cases}$$

加入松弛变量，化成标准型，解得：

最优解为 $\boldsymbol{X}^*=(0,8/5,0,1/5)^{\mathrm{T}}$

目标函数下界是 $\underline{z}=32/5$。

1.8 【解】

(1) 有唯一最优解时，$d\geqslant 0,c_1<0,c_2<0$；

(2) 存在无穷多最优解时，$d\geqslant 0,c_1\leqslant 0,c_2=0$ 或 $d\geqslant 0,c_1=0,c_2\leqslant 0$；

(3) 有无界解时，$d\geqslant 0,c_1\leqslant 0,c_2>0$ 且 $a_1\leqslant 0$；

(4) 此时，有 $d\geqslant 0,c_1>0$ 并且 $c_1\geqslant c_2,a_3>0,3/a_3<d/4$。

1.9 【解】

设 $x_k(k=1,2,3,4,5,6)$ 为 x_k 个司机和乘务人员第 k 班次开始上班。

建立模型：

$\min z=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1+x_6\geqslant 60\\x_1+x_2\geqslant 70\\x_2+x_3\geqslant 60\\x_3+x_4\geqslant 50\\x_4+x_5\geqslant 20\\x_5+x_6\geqslant 30\\x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\geqslant 0\end{cases}$$

1.10 【解】

设 x_1,x_2,x_3 是甲糖果中的 A、B、C 成分，x_4,x_5,x_6 是乙糖果的 A、B、C 成分，x_7,x_8,x_9 是丙糖果的 A、B、C 成分。

线性规划模型：

$$\max z=0.9x_1+1.4x_2+1.9x_3+0.45x_4+0.95x_5+1.45x_6-0.05x_7+0.45x_8+0.95x_9$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}-0.4x_1+0.6x_2+0.6x_3\leqslant 0\\-0.2x_1-0.2x_2+0.8x_3\leqslant 0\\-0.85x_4+0.15x_5+0.15x_6\leqslant 0\\-0.6x_4-0.6x_5+0.4x_6\leqslant 0\\-0.7x_7-0.5x_8+0.5x_9\leqslant 0\\x_1+x_4+x_7\leqslant 2000\\x_2+x_5+x_8\leqslant 2500\\x_3+x_6+x_9\leqslant 1200\\x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9\geqslant 0\end{cases}$$

1.11 【解】

产品Ⅰ,设 A_1,A_2完成 A 工序的产品 x_1,x_2件;B 工序时,B_1,B_2,B_3完成 B 工序的 x_3,x_4,x_5件,产品Ⅱ,设 A_1,A_2完成 A 工序的产品 x_6,x_7件;B 工序时,B_1 完成 B 的产品为 x_8件;产品Ⅲ,A_2 完成 A 工序的 x_9 件,B_2 完成 B 工序的 x_9 件;

$$\begin{cases}x_1+x_2=x_3+x_4+x_5\\x_6+x_7=x_8\end{cases}$$

建立数学模型:

$$\max z=(1.25-0.25)\times(x_1+x_2)+(2-0.35)\times(x_6+x_7)+(2.8-0.5)x_9-(5x_1+10x_6)300/6000-(7x_2+9x_7+12x_9)321/10000-(6x_3+8x_8)250/4000-(4x_4+11x_9)783/7000-7x_5\times 200/4000$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}5x_1+10x_6\leqslant 6000\\7x_2+9x_7+12x_9\leqslant 10000\\6x_3+8x_8\leqslant 4000\\4x_4+11x_9\leqslant 7000\\7x_5\leqslant 4000\\x_1+x_2=x_3+x_4+x_5\\x_6+x_7=x_8\\x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9\geqslant 0\end{cases}$$

最优解为 $\boldsymbol{X}^*=(1200,230,0,859,571,0,500,500,324)^{\mathrm{T}}$

最优值为 1147。

考研典型题精解

【解】

这是一道较简单的数学规划模型问题,根据题意写出约束即可。

设:现有的 5 种饲料,每种饲料各选用 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,则建立该问题的线性规划模型为:

$$\min z=0.2x_1+0.7x_2+0.4x_3+0.3x_4+0.8x_5,$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3+6x_4+18x_5\geqslant 700\\x_1+0.5x_2+0.2x_3+2x_4+0.5x_5\geqslant 30\\0.5x_1+x_2+0.2x_3+2x_4+0.8x_5\geqslant 100\\x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geqslant 0\end{cases}$$