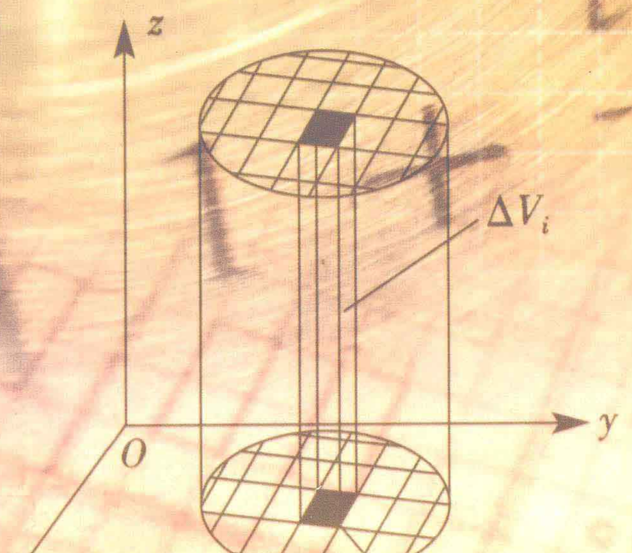
21世纪高职高专规划教材

高等数学

GAODENGSHUXUE

主编　葛文侠



内蒙古大学出版社

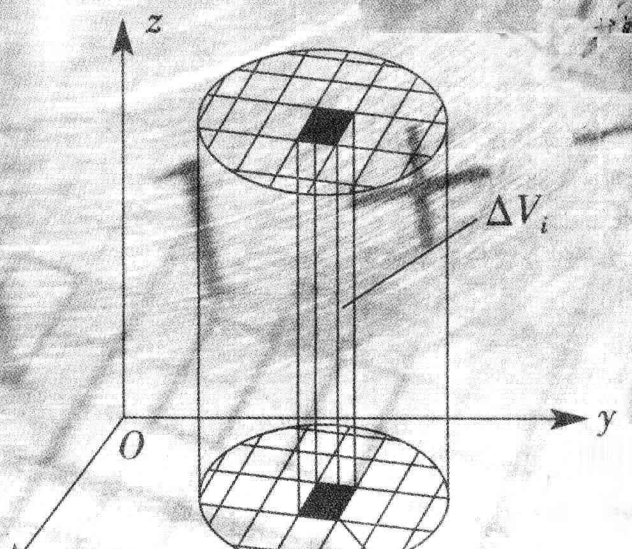
21世纪高职高专规划教材

高等数学

GAODENGSHUXUE

主编　葛文侠

主审　安　奇



内蒙古大学出版社

图书在版编目(CIP)数据
高等数学/葛文侠主编. －呼和浩特:内蒙古大学出版社,2006.8
ISBN 7－81115－001－8

Ⅰ.高… Ⅱ.葛… Ⅲ.高等数学－高等学校－教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 106330 号

书名	高等数学
主编	葛文侠
责任编辑	张国柱
封面设计	张燕红
责任校对	李敬明
出版	内蒙古大学出版社 呼和浩特市昭乌达路 88 号(010010)
发行	内蒙古新华书店
印刷	内蒙古瑞德教育印务股份有限公司
开本	787×1092/16
印张	8.75
字数	212 千
版期	2006 年 8 月第 1 版 2006 年 8 月第 1 次印刷
标准书号	ISBN 7－81115－001－8/O·1
定价	12.00 元

前　言

为深化教育教学改革，培养应用型和创新型人才，适应高职教育大众化的发展趋势，内蒙古大学出版社组织了内蒙古自治区部分高职院校的一线专家学者，依据《高职高专高等数学课程教学基本要求》，针对数学课程少学时改革情况编写了《高等数学》，该教材的编写本着“适度、够用”的原则，立足于体现高职高专教学改革的指导方针，力求做到结合专业的特点，强化技能培养。

教材充分考虑了高职学生的数学基础，淡化逻辑论证；避免怪题和难度较大题型的解析；例题与习题尽量贴近专业；为便于学生巩固所学知识、提高基本技能，教材配备了较多的课后练习题，每章后配有自测题，为不同层次的学生提供更多的选择空间。

本教材适用于高职院校工科专业少学时的数学教学，约用 84 学时。

该教材由内蒙古建筑职业技术学院基础部编写，主编葛文侠，主审安奇。其中，第一章由张爱华编写，第二章、第五章由葛文侠编写，第三章由于宏坤编写，第四章由朱学荣编写。由于我们水平有限，编写过程中难免有不妥之处，诚恳地希望专家、同行及读者批评指正。

编者

2006 年 8 月

目　　录

第一章　函数、极限与连续

函数是客观世界中量与量之间相依关系的一种数学抽象. 高等数学的主要研究对象是函数,研究问题的基本工具是极限. 本章将介绍函数、极限与连续的基本概念以及它们的一些主要性质.

§1.1　函数

1.1.1　区间

区间是高等数学中经常用到的实数集,是指介于两个实数之间的全体实数的集合. 包括四种有限区间和五种无限区间,它们的名称、记号和定义如下:

1. 有限区间

设 a 与 b 都是实数,且 $a < b$,分别称为区间的左端点和右端点.

开区间　$(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$;

闭区间　$[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$;

半开区间　$[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$;

$(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$.

2. 无限区间

$$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\};$$

$$[a, +\infty) = \{x \mid x \geqslant a\};$$

$$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\};$$

$$(-\infty, b] = \{x \mid x \leqslant b\};$$

$$(-\infty, +\infty) = \{x \mid x \in R\}.$$

区间在数轴上表示如图 1 - 1

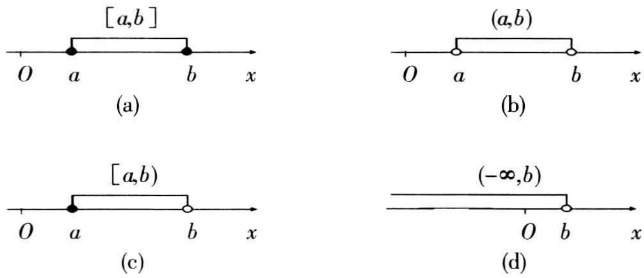


图 1－1

1.1.2 函数的概念

1. 函数的定义

定义 1.1.1 设有两个变量 x 和 y,如果变量 x 在数集 D 内每取定一个值时,按照对应规律 f,都有唯一确定的数值 y 和它对应,则称 y 为定义在数集 D 上的 x 的函数,记作 $y=f(x)$. 其中 x 叫做自变量,y 叫做因变量,D 叫做函数的定义域.

当 x 在 D 内取数值 x_0 时,对应的有 $y_0=f(x_0)$ 称为函数在 $x=x_0$ 处的函数值,函数值的全体组成的数集

$$W=\{y \mid y=f(x), x\in D\}$$

称为函数的值域.

构成函数的要素有两个:定义域与对应关系. 如果函数的两个要素相同,那么它们就是相同的函数,否则就是不同的函数.

在我们研究函数时,必须注意函数的定义域. 对于用解析式表示的函数,它的定义域可由函数表达式本身来确定,即要使运算有意义.

通常求函数的定义域应注意以下几点:

(1) 当函数是多项式时,定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

(2) 在分式中,分母不能为零.

(3) 偶次根式的被开方式必须非负.

(4) 在对数式中,真数必须大于零.

(5) 反正弦函数与反余弦函数的定义域为 $[-1,1]$.

(6) 如果函数表达式中含有上述几种函数,则应取各部分定义域的交集.

例 1 判断下列函数是否是相同的函数.

(1) $y=1$ 与 $=y=\dfrac{x}{x}$

(2) $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$

(3) $y=\ln 2x$ 与 $y=\ln 2\cdot\ln x$

解 (1) 函数 $y=1$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$，而函数 $y=\frac{x}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，故不是同一函数.

(2) 两个函数的定义域与对应规律都相同，故是同一函数.

(3) 函数 $y=\ln 2x$ 与 $y=\ln 2\cdot\ln x$ 的定义域都是 $(0,+\infty)$，但对应规律不同，故不是同一函数.

例 2 求下列函数的定义域.

(1) $y=x^2-2x+3$　　(2) $y=\sqrt{x+3}-\frac{1}{x^2-1}$

(3) $y=\frac{1}{\ln(1-x)}$　　(4) $y=\sqrt{x^2-4}+\arcsin\frac{x}{2}$

解 (1) 函数 $y=x^2-2x+3$ 为多项式函数，当 x 取任何实数时，y 都有唯一确定的值与之对应，所以函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

(2) 若使 $\sqrt{x+3}$ 有意义，需 $x+3\geqslant 0$，即 $x\geqslant -3$，若使 $\frac{1}{x^2-1}$ 有意义，需 $x^2-1\neq 0$，即 $x\neq\pm 1$，所以函数的定义域为 $[-3,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(3) 若使 $\frac{1}{\ln(1-x)}$ 有意义，需 $1-x>0$，且 $\ln(1-x)\neq 0$，即 $x<1$ 且 $x\neq 0$，所以函数的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,1)$.

(4) 若使 $\sqrt{x^2-4}$ 有意义，需 $x^2-4\geqslant 0$，即 $x\geqslant 2$ 或 $x\leqslant -2$；若使 $\arcsin\frac{x}{2}$ 有意义，需 $\left|\frac{x}{2}\right|\leqslant 1$，即 $-2\leqslant x\leqslant 2$，所以函数的定义域为 $\{x\mid x=\pm 2\}$.

2. 函数的表示法

函数的表示法常用的有解析法、图示法以及表格法等.

有时，我们会遇到一个函数在自变量不同的取值范围内用不同的式子来表示的情况.

例如：函数

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$$

是定义在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内的一个函数. 当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=\sqrt{x}$；当 $x<0$ 时，$f(x)=-x$. 它的图像如图 1－2 所示.

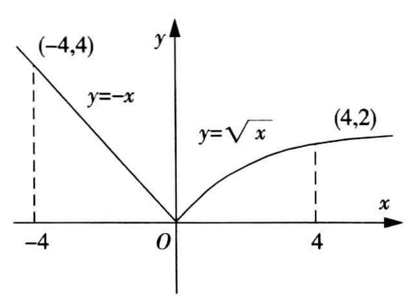


图 1－2

像这样在自变量的不同变化范围内，对应规律用不同式子来表示的函数，叫做分段函

数.

例 3 设分段函数

$$f(x)=\begin{cases}x-1 & -1<x\leqslant 0\\ x^2 & 0<x\leqslant 1\\ 3-x & 1<x\leqslant 2\end{cases}$$

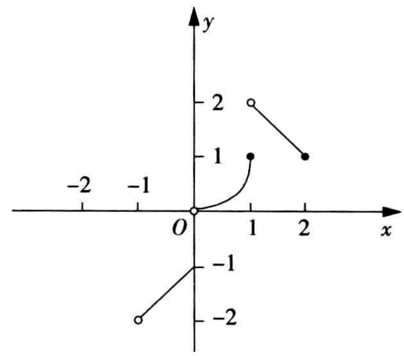


图 1-3

(1) 画出函数的图像;(2) 求此函数的定义域;

(3) 求$f\left(-\frac{1}{2}\right),f\left(\frac{1}{2}\right),f\left(\frac{3}{2}\right)$的值.

解 (1) 函数图像如图 1-3 所示.

(2) 函数的定义域为$(-1,2]$.

(3) $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2},f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4},f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}$.

1.1.3 函数的特性

1. 奇偶性

设I为关于原点对称的区间,若对于任意的$x\in I$,都有$f(-x)=f(x)$,则$f(x)$叫做偶函数;若$f(-x)=-f(x)$,则$f(x)$叫做奇函数. 奇函数的图像关于原点对称,如图1-4;偶函数的图像关于y轴对称,如图 1-5.

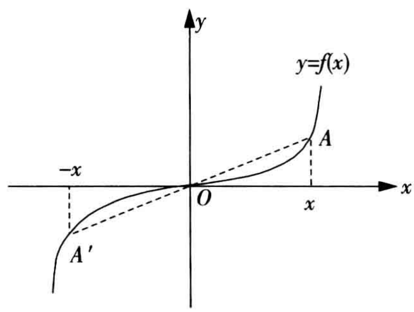


图 1-4

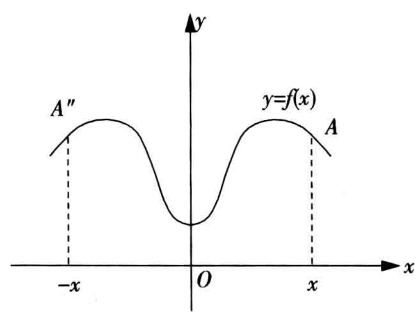


图 1-5

例如,$y=x^3$在区间$(-\infty,+\infty)$内是奇函数,$y=x^4$在区间$(-\infty,+\infty)$内是偶函数. 函数$y=\sin x+\cos x$在区间$(-\infty,+\infty)$内既不是奇函数也不是偶函数,这样的函数称为非奇非偶函数.

例 4 判断函数$f(x)=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$和$g(x)=\frac{a^x-a^{-x}}{2}(a>0,a\neq 1)$的奇偶性.

解 函数$f(x)$和$g(x)$都定义在$(-\infty,+\infty)$内,而

$$f(-x)=\frac{a^{-x}+a^x}{2}=\frac{a^x+a^{-x}}{2}=f(x)$$

$$g(-x) = \frac{a^{-x} - a^{x}}{2} = -\frac{a^{x} - a^{-x}}{2} = -g(x)$$

因此$f(x)$是偶函数,$g(x)$是奇函数.

2. **单调性**

若对于区间I内任意两点x_1, x_2,当$x_1 < x_2$时,有$f(x_1) < f(x_2)$,则称$f(x)$在I上单调增加,区间I称为单调递增区间(简称单增区间);若$f(x_1) > f(x_2)$,则称$f(x)$在I上单调减少,区间I称为单调减少区间(简称单减区间).单调增区间和单调减区间统称为单调区间.在单增区间内,函数图像随着x的增大而上升,如图1-6;在单减区间内,函数图像随着x的增大而下降,如图1-7.

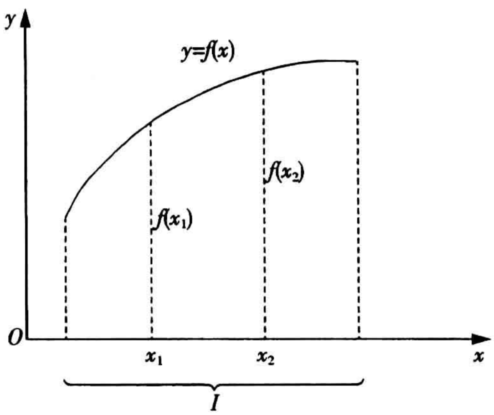


图1-6

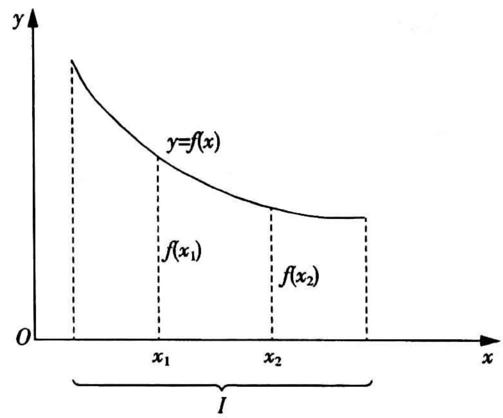


图1-7

例如,函数$y = x^2$在区间$(0, +\infty)$内是单调增加的,在区间$(-\infty, 0)$内是单调减少的,但在区间$(-\infty, +\infty)$内$y = x^2$不是单调函数,如图1-8.

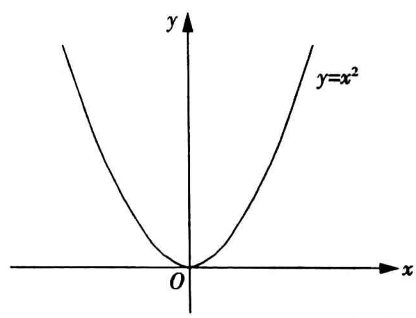


图1-8

3. **有界性**

若存在正数M,使得区间I内所有的x,恒有

$$|f(x)| \leqslant M$$

则称$f(x)$在I上有界,否则称$f(x)$在I上无界.有界函数的图形介于两条水平直线$y = -M$和$y = M$之间(或$m \leqslant f(x) \leqslant M$),如图1-9所示.

例如,函数$y = \frac{1}{x}$在区间$(0,1)$内无界,但在区间$(1,2)$内有界,如图1-10.

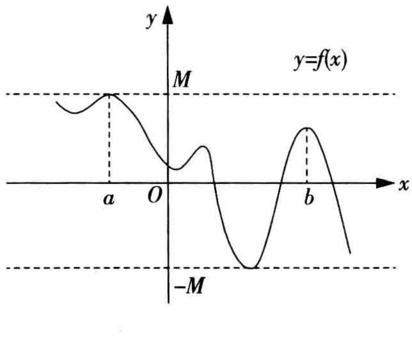


图 1 - 9

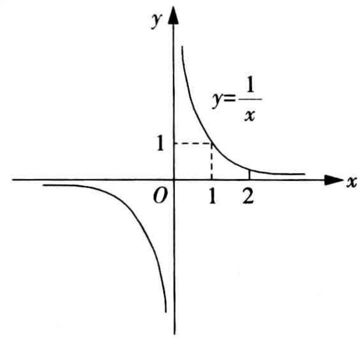


图 1 - 10

4. 周期性

若存在不为零的数l,使得对于任意的$x \in I$,都有$x+l \in I$,且$f(x+l)=f(x)$,则称$f(x)$为周期函数,其中l叫做函数的周期,通常周期函数的周期是指它的最小正周期. 一个以l为周期的周期函数,它的图像在每隔长度为l的相邻区间上,有相同的形状,如图 1 - 11 所示.

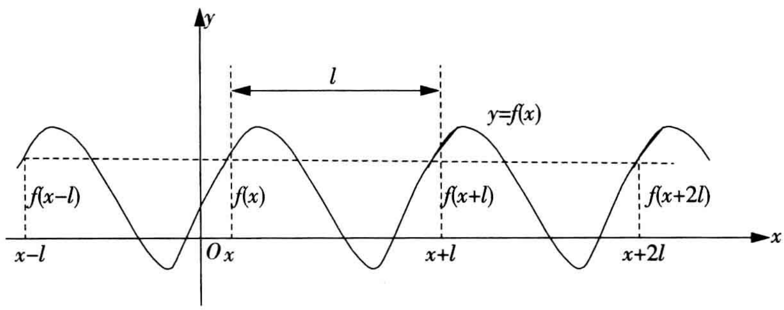


图 1 - 11

例如,$y=\sin x$,$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数;$y=\tan x$,$y=\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

1.1.4　反函数

定义 1.1.2　设函数$y=f(x)$的定义域为D,值域为W. 如果对于任意数值$y \in W$,都可以通过关系式$y=f(x)$在D中找到唯一确定的值x与之对应,则得到一个以y为自变量,x为因变量的新的函数$x=\varphi(y)$,这个新的函数叫做函数$y=f(x)$的反函数. 记作$x=\varphi(y)$或$(x=f^{-1}(y))$,其定义域为W,值域为D.

由于人们习惯于用x表示自变量,用y表示因变量,因此我们将函数$y=f(x)$的反函数用$y=f^{-1}(x)$表示. 相对于反函数,原来的函数$y=f(x)(x \in D)$,称为直接函数. 互为反函数的图像关于直线$y=x$对称,如图 1 - 12 所示.

在函数定义域内,并非任何函数都存在反函数.

例如,函数 $y = x^2$ 在 $x \in (-\infty, +\infty)$ 内不存在反函数. 因为对于值域中的每一个 $y > 0$,x 都有两个不同的值 $\pm\sqrt{y}$ 适合 $y = x^2$. 若对于函数 $y = x^2$,当 $x \in [0, +\infty)$ 时,则有反函数 $x = \sqrt{y}$,$y \in [0, +\infty)$ 与之对应,其反函数改写为 $y = \sqrt{x}$,$x \in [0, +\infty)$;同理,若对于函数 $y = x^2$,当 $x \in (-\infty, 0]$ 时,则有反函数 $x = -\sqrt{y}$,$y \in [0, +\infty)$ 与之对应,其反函数改写为 $y = -\sqrt{x}$,$x \in [0, +\infty)$.

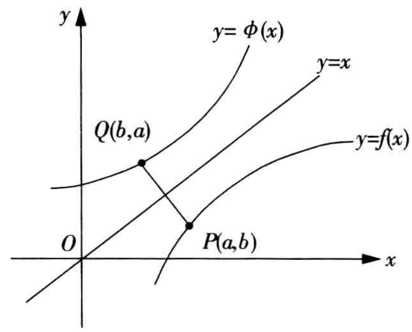


图 1 - 12

一般地,如果定义在某区间上的函数是单调函数,那么它存在反函数,并且它的反函数也具有相同的单调性.

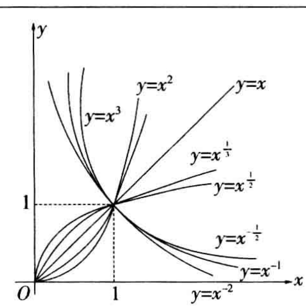
1.1.5 初等函数

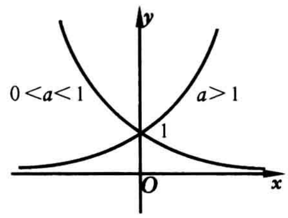
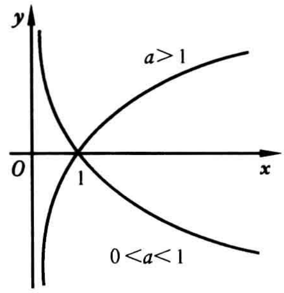
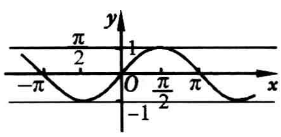
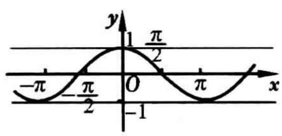
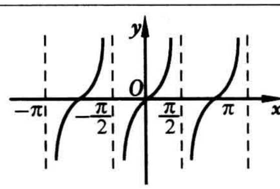
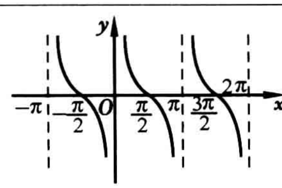
1. 基本初等函数及其性质

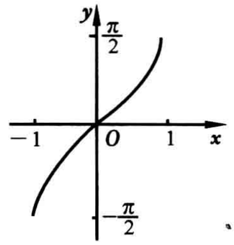
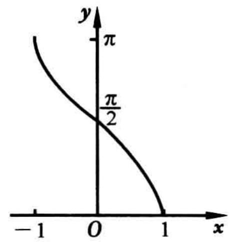
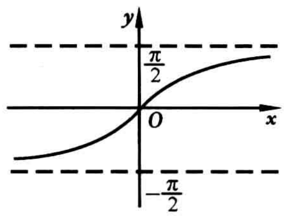
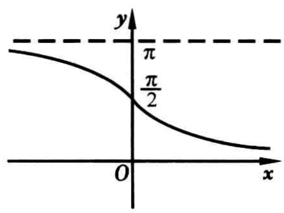
基本初等函数是指下列五种函数:幂函数 $y = x^\alpha$(α 为实数)、指数函数 $y = a^x$($a > 0$, $a \neq 1$)、对数函数 $y = \log_a x$($a > 0, a \neq 1$)、三角函数(包括正弦函数 $y = \sin x$,余弦函数 $y = \cos x$,正切函数 $y = \tan x$,余切 $y = \cot x$,正割函数 $y = \sec x$ 与余割函数 $y = \csc x$)和反三角函数(包括反正弦函数 $y = \arcsin x$,反余弦函数 $y = \arccos x$,反正切函数 $y = \arctan x$ 及反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$).

以上五类函数的定义域、值域、图像和性质见表 1.1,基本初等函数是我们今后学习各类函数的基础,请同学们记住它们的图像与主要性质.

表 1.1 **基本初等函数的图形及其主要性质**

名称	解析式	定义域和值域	图　　像	主要特性
幂函数	$y = x^\alpha$ $(\alpha \in R)$	依 α 不同而异. 但在 $(0, +\infty)$ 内都有定义		经过点(1,1). 在第一象限内,若 $\alpha > 0$ 时,x^α 为增函数;当 $\alpha < 0$,x^α 为减函数.

名称	解析式	定义域和值域	图　　像	主要特性
指数函数	$y=a^x$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		图像在 y 轴上方，都通过点$(0,1)$. 当$0<a<1$时，a^x 是减函数； 当 $a>1$ 时，a^x 是增函数.
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		图像在 y 轴右侧，都通过点$(1,0)$. 当$0<a<1$时，$\log_a x$ 是减函数； 当 $a>1$ 时，$\log_a x$ 是增函数.
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数，周期 2π，图形在两直线 $y=1$ 与 $y=-1$ 之间.
	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数，周期 2π，图形在两直线 $y=1$ 与 $y=-1$ 之间.
	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k\in Z)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期 π，在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加.
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi(k\in Z)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期 π，在 $(0,\pi)$ 内单调减少.

名称	解析式	定义域和值域	图　　像	主要特性
反三角函数	$y = \arcsin x$	$x \in [-1,1]$ $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$		奇函数，单调增加，有界
	$y = \arccos x$	$x \in [-1,1]$ $y \in [0,\pi]$		单调减少，有界
	$y = \arctan x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$		奇函数，单调增加，有界
	$y = \text{arccot}\, x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (0,\pi)$		单调减少，有界

2. 复合函数

先看一个例子，设 $y = \sqrt{u}$，而 $u = 1 + x^2$，以 $1 + x^2$ 代替 $\sqrt{u}$ 中的 u，得 $y = \sqrt{1 + x^2}$，我们称它为由 $y = \sqrt{u}$ 与 $u = 1 + x^2$ 复合而成的复合函数.

定义 1.1.3　设 $y = f(u)$，而 $u = \varphi(x)$，且函数 $\varphi(x)$ 的值域与函数 $f(u)$ 的定义域的交集非空，则 $y = f[\varphi(x)]$ 叫做 x 的复合函数，其中 u 叫做中间变量.

例 5　试求由函数 $y = u^3$，$u = \tan x$ 复合而成的函数.

解　将 $u = \tan x$ 代入 $y = u^3$ 中，即得所求复合函数 $y = \tan^3 x$.

有时，一个复合函数可能由三个或更多的函数复合而成. 例如，由函数 $y = 2^u$，$u = \sin v$，$v = x + 1$，可以复合成函数 $y = 2^{\sin(x+1)}$，其中 u 和 v 都是中间变量. 一个复合函数可以有有限个中间变量.

例 6　指出下列复合函数的复合过程.

(1) $y = \cos^2 x$　　(2) $y = \sqrt{\cot\frac{x}{2}}$　　(3) $y = e^{\sin\sqrt{x+1}}$

解　(1) $y = u^2, u = \cos x$;

(2) $y = \sqrt{u}, u = \cot v, v = \frac{x}{2}$;

(3) $y = e^u, u = \sin v, v = \sqrt{w}, w = x + 1$.

3. 初等函数

由基本初等函数及常数经过有限次四则运算和有限次复合运算构成的,并且可用一个数学式子表示的函数,称为初等函数.

例如,$y = \sqrt{\ln 5x - 3^x}$,$y = \frac{\sqrt[3]{3x} + \tan 5x}{x^3\sin x - 2^{-x}}$都是初等函数. 今后我们所讨论的函数,绝大多数都是初等函数.

习题 1－1

一、选择题

1. 与 $y = x$ 是相同函数的是(　　).

A. $y = \sqrt{x^2}$　　B. $y = (\sqrt{x})^2$　　C. $y = (\sqrt[3]{x})^3$　　D. $y = \frac{x}{x}$

2. 下列函数为偶函数的是(　　).

A. $y = x\sin x$　　B. $y = 1 + \sin x$　　C. $y = x\cos x$　　D. $y = e^x$

3. $y = \frac{1-x}{1+x}$ 的反函数是(　　).

A. $y = \frac{1-x}{1+x}$　　B. $y = \frac{1+x}{1-x}$　　C. $y = \frac{x+1}{x-1}$　　D. $y = \frac{x-1}{x+1}$

4. 函数 $y = \cos\sqrt{1+x^2}$ 的复合过程为(　　).

A. $y = \cos u$　$u = \sqrt{v}$　$v = 1 + x^2$　　B. $y = \cos u$　$u = \sqrt{1+x^2}$

C. $y = \cos\sqrt{u}$　$u = 1 + x^2$　　D. $y = u$　$u = \cos\sqrt{v}$　$v = 1 + x^2$

5. $y = \frac{1}{\sqrt{4+x}}$ 的定义域为(　　).

A. $(-\infty, -4)$　　B. $(-4, +\infty)$　　C. $[4, +\infty)$　　D. $(4, +\infty)$

6. 函数 $y = \ln x$ 在区间(　　)上有界.

A. $(0,2)$　　B. $(1,2)$　　C. $[2, +\infty)$　　D. $(0, +\infty)$

7. 在区间$(0, +\infty)$内单调增加的函数是(　　).

A. $\sin x$　　B. $\tan x$　　C. x^2　　D. $\frac{1}{x}$

二、填空题

1. 设$f(x)=\frac{\sin x}{\ln(x-1)}$,则$f(x)$的定义域为__________.

2. 设$f(x)=\frac{1}{1+x}$,则$f\left(\frac{1}{x}\right)=$__________.

3. $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x\leqslant 0\\ \sin x & x>0\end{cases}$,在$x=\frac{\pi}{2}$时的函数值为__________.

4. 函数$y=5(3x+1)^2$的复合过程为____________________.

5. 函数$y=2x^3+1$的反函数为__________.

三、求函数的定义域

1. $y=\frac{1}{1-x^2}$　　2. $y=\frac{\sqrt{10-2x}}{3-x}$.　　3. $y=\frac{2}{\lg(3-x)}$

4. $y=\arcsin\frac{x-1}{5}+\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}$　　5. $y=\frac{2x}{x^2-3x+2}$　　6. $y=\sqrt{2+x}+\frac{1}{\lg(1-x)}$

7. $y=\begin{cases}x & 0\leqslant x<1\\ 1-x & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$

四、确定下列函数的定义域,求函数值并作出函数的图像

1. $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x} & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1+x & x>1\end{cases}$,求$f(0)$,$f\left(\frac{1}{2}\right)$,$f(1)$,$f(2)$.

2. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x<0\\ x & 0\leqslant x<1\\ 2 & 1\leqslant x<2\end{cases}$,求$f\left(-\frac{1}{3}\right)$,$f(0)$,$f\left(\frac{3}{4}\right)$,$f(1)$.

五、写出下列函数的复合过程

1. $y=e^{x^2}$　　2. $y=\sin x^3$

3. $y=\tan x^{\frac{1}{2}}$　　4. $y=\sqrt{1-x^2}$

5. $y=(\tan x)^{\frac{1}{2}}$　　6. $y=5^{\ln\sin x}$

7. $y=(1+\lg x)^7$　　8. $y=\sin^2(2x^2+3)$

9. $y=\arcsin\frac{x^2-1}{2}$　　10. $y=\ln(\cos 3x)$