高等学校教材

线性代数

王秀丽　编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

线性代数

Xianxing Daishu

王秀丽 编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书根据教育部高等学校数学基础课程教学指导分委员会制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”编写而成。全书包括行列式、矩阵、向量空间、线性方程组、二次型、线性空间与线性变换六章。

本教材参考了国内外线性代数的同类教材和参考资料，力求由浅入深、循序渐进地阐述线性代数的观点和方法。对于学生较难理解的概念，在该概念出现前都尽可能地分梯度分解难点，降低学习难度。本书强调计算和概念同等重要，配备有各层次的例题、习题，并配备了一定数量的近年全国硕士研究生入学统一考试数学试题。

本书可供普通高等农林院校及其他相关院校本科生学习使用，也可作为理工类、管理类学生参加全国硕士研究生入学统一考试的数学复习参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数 / 王秀丽编. —北京：高等教育出版社，2010.8

ISBN 978-7-04-030193-9

Ⅰ.①线… Ⅱ.①王… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 124297 号

策划编辑 杨 帆 **责任编辑** 杨 帆 **封面设计** 张 志
版式设计 余 杨 **责任校对** 金 辉 **责任印制** 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www hep. edu cn
			http://www. hep. com cn
		网上订购	http://www. landraco. com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www landraco com. cn
印 刷	国防工业出版社印刷厂	畅想教育	http://www widedu com
开 本	787×960 1/16	版 次	2010年8月第1版
印 张	15 25	印 次	2010年8月第1次印刷
字 数	280 000	定 价	21.90元

物料号 30193-00

前　言

"线性代数"作为高等院校理工类、农类、经济管理类等专业的一门重要的公共基础课,培养学生具有一定的逻辑推理能力、空间想象能力、抽象思维能力,并为学生所学专业提供所需的基础知识和基本技能,为学生学习后继专业课程和进一步获取知识提供必要的数学基础。

"线性代数"属于近代数学范畴,是由解线性方程组而发展起来的一门学科,主要讨论有限维空间的线性理论。线性问题广泛存在于自然科学和技术科学的各个领域,且某些非线性问题在一定条件下也可转化为线性问题来处理,它的思想、方法和结论在科学技术、工程技术、管理科学等众多领域都有着广泛的应用。现代科学技术和管理科学,尤其是计算机技术和网络技术的飞速发展,都需要这个基础;而它的集成化思维方式,对训练和提高学生的计算能力、抽象思维、逻辑推理、数学表达等也都非常有益。它的基本概念有行列式、向量、矩阵、特征值、线性空间等。使用它的基本概念,许多学科和数学的许多分支中的问题有了几何意义,或者几何意义更加丰富凸显,不少复杂的问题可以用简洁的形式来表述。线性代数的重要性比过去任何时候都更加突出,它在数学课程中的角色已经上升到了可以与微积分相提并论。线性代数的这种发展首先是人们所研究问题的规模越来越大,越来越复杂,涉及的变量成百上千,这样复杂的问题,目前只可能把变量之间的关系化为线性的才有可能求解;其次,计算机技术的飞速发展给线性代数的研究和应用提供了前所未有的空间和机遇。例如,哈佛大学教授列昂惕夫(Wassily Leontief)把美国经济分解为500个部门,对每个部门,他列出一个描述该部门的产出如何分配给其他经济部门的线性方程。由于当时的计算机还不能处理500个未知数的500个方程组,列昂惕夫只好把问题简化为42个未知数的42个方程组。当时是1949年,列昂惕夫编写计算机程序用了几个月时间,而当时最大的计算机运算了56个小时,才得到最后的答案。他打开了研究经济数学模型的新时代的大门,并于1973年获得了诺贝尔经济学奖。如今,有了高性能的计算机,处理这些问题已经是轻而易举的事情了。不仅如此,线性代数的应用可以说已经渗透到了社会生活的各个领域。

本书编者结合多年来从事线性代数课程教学和研究的体会,参考了国内外许多同类教材,编成此书。在本书的编写过程中,得到了宁正元教授的热情鼓励

和大力支持，同行专家温永仙、尤添革、李德新等老师对本书的编写曾提出过许多宝贵的意见和建议，在此谨表谢意。

由于编者水平有限，虽经多次修改，书中内容不当甚至错误在所难免，敬请读者批评指正。

王秀丽

2010年春

目　　录

第一章　行　列　式

解方程是代数中一个基本的问题. 在中学的代数和解析几何里，我们用消元法解过一元、二元、三元以及四元一次方程组. 但是从理论和实际问题里导出的线性方程组常常含有相当多的未知量，并且未知量的个数与方程的个数也不一定相等. 在第一章和第四章，我们将讨论一般的多元一次方程组，即线性方程组. 为此，首先介绍在讨论线性方程组时要用到的一个有力工具——行列式.

§1.1　排列　逆序

我们已经学过，由 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数组成的一个有序数组称为一个 n 级（阶）排列，并且这样的 n 个数共可以组成 $A_n^n=n!$ 个不同的排列.

在数学中把考察的对象，例如上面的 $1,2,\cdots,n$ 叫做元素. 对于 n 个不同的元素，我们规定各个元素之间有一个标准次序，特别地我们把 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个自然数由小到大的标准次序称为自然排列（一般也称作标准排列）.

定义(1.1.1)　在一个 n 阶排列中，如果一个较大的数排在一个较小的数的前面，则称这两个数构成一个**逆序**. 一个排列中所有逆序的总和叫做这个排列的**逆序数**.

逆序数为奇数的排列叫做奇排列，逆序数为偶数的排列叫做偶排列.

例如，由数字 1,2,3,4,5 共可以组成 $A_5^5=5!=120$ 种不同的排列，45321 和 23514 是其中的两个排列. 在 45321 中 43,42,41,53,52,51,32,31,21 是逆序，逆序数为 9，该排列为奇排列. 23514 的逆序为 21,31,51,54 为偶排列. 显然，12345 也为其中的一个排列，它是自然排列，其逆序数为 0，也算作偶排列.

我们把一个排列的逆序数记为 τ，如 $\tau(45321)=9$.

把一个排列中某两个数的位置交换，而其余的数不动，就得到另一个排列. 这样的一个变换称为一个对换. 例如，经过 1,2 对换，排列 2431 就变成了 1432，排列 2134 就变成了 1234. 显然，如果连续施行两次相同的对换，排列就还原了.

定理(1.1.1)　对换改变排列的奇偶性.

这就是说，经过一次对换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列.

证 （Ⅰ）先看一个特殊的情形，对换的两个数在排列中是相邻的情形. 排列$\cdots ab\cdots$经过a,b对换变成$\cdots ba\cdots$

这里"$\cdots$"表示那些不动的数，显然，它们的逆序数经过a,b对换后并不改变，而a,b两元素的逆序数改变为：当$a<b$时，经对换后，a的逆序数增加1，而b的逆序数不变；当$a>b$，经对换后，a的逆序数不变而b的逆序数减小1. 所以不论增加1还是减少1，其逆序数的奇偶性都改变，定理得证.

（Ⅱ）再看一般情形.

设排列为

$$\cdots a i_1 i_2 \cdots i_s b \cdots \tag{1.1.1}$$

经a,b对换后，排列(1.1.1)变为

$$\cdots b i_1 i_2 \cdots i_s a \cdots \tag{1.1.2}$$

不难看出，这样一个对换可以经过一系列的相邻对换来实现. 从(1.1.1)出发，把b与i_s对换，再与i_{s-1}对换，$\cdots$，即把b做$s+1$次相邻位置的对换，(1.1.1)式变为

$$\cdots b a i_1 \cdots i_s \cdots \tag{1.1.3}$$

再把(1.1.3)中a一位一位向右做s次相邻对换，即得(1.1.2). 这样，从(1.1.1)变到(1.1.2)共经过了$2s+1$次相邻对换，而$2s+1$为奇数，故这样对换的最终结果还是改变奇偶性.

推论(1.1.1) 奇排列调成标准排列的对换次数为奇数，偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

证 由定理(1.1.1)知对换次数就是排列奇偶数的变化次数，而标准排列为偶排列（逆序数为0），推论成立.

推论(1.1.2) 由$1,2,\cdots,n$这n个数构成的所有排列中（共$n!$个），奇偶排列各占一半，即各为$\frac{n!}{2}$个.

证明留作练习，请读者自证.

习题 1.1

1. 按照顺序从小到大为标准顺序，求下列各排列的逆序数，并指出它们是奇排列还是偶排列.

(1) 41325；

(2) 24531876；

(3) $(n)(n-1)(n-2)\cdots321$；

(4) $(n-1)(n-2)\cdots 321n$;

(5) $13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$;

(6) $13\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots 2$.

2. 证明:由 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数构成的 $n!$ 个排列中,奇偶排列各半.

3. 假设 n 个数字的排列 $i_1 i_2\cdots i_n$ 的逆序数为 k,求排列 $i_n i_{n-1}\cdots i_2 i_1$ 的逆序数.

§1.2 n阶行列式

先看两个简单的例子.

解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.2.1}$$

a_{ij}叫做 x_j 的系数,它有两个下脚标(指标),前一个脚标 i 表示它在第 i 个方程,后一个脚标 j 表示它是第 j 个未知量的系数. 如 a_{21} 即是第二个方程中第一个未知量的系数. 用消元法消去(1.2.1)中 x_2,得 $(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}$.

同样,消去 x_1,得 $(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}$.

因此,当 $D=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,

$$x_1 = \frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

为了便于记忆,我们引进记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$,叫做二阶行列式,它含有两行、两列. 二阶行列式是这样的两个项的代数和:一个是在从左上角到右下角的对角线(主对角线)上两个数的乘积,取正号;另一个是从右上角到左下角的对角线(次对角线)上两个数的乘积,取负号. 譬如

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2\times 5-(-3)\times 1 = 13.$$

根据以上记法,

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, a_{11}b_2-b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

如果记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则方程组(1.2.1)的解就可以写成

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}=\frac{D_2}{D}.$$

像这样用行列式来表示解,形式规律性强,容易记忆.

例(1.2.1)　解线性方程组

$$\begin{cases}2x+y=7,\\ x-3y=-2.\end{cases}$$

解　这时

$$D=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-7,D_1=\begin{vmatrix}7 & 1\\ -2 & -3\end{vmatrix}=-19,D_2=\begin{vmatrix}2 & 7\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-11,$$

因此,所给方程组的唯一解是

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{-19}{-7}=\frac{19}{7},y=\frac{D_2}{D}=\frac{-11}{-7}=\frac{11}{7}.$$

我们再来解三元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3.\end{cases}\tag{1.2.2}$$

看看如何用三阶行列式表示它的解.

同上面一样,用消元法,先从前面两式消去 x_3,后两式消去 x_3,得到只含 x_1,x_2 的二元线性方程组,再消去 x_2,就得到

$$\begin{aligned}&(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_1\\ &=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3.\end{aligned}$$

当 x_1 系数不为零,即

$D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0$ 时,得

$$x_1=\frac{1}{D}(b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3).$$

同理,可得

$$x_2=\frac{1}{D}(a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}).$$

$$x_3=\frac{1}{D}(a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}).$$

这样的式子很繁,为了便于记忆,我们引进三阶行列式记号

$$\begin{aligned}D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\\&=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-\\&\quad a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.\end{aligned}\tag{1.2.3}$$

三阶行列式,它含有三行、三列,共有 $3^2=9$ 个数. 三阶行列式的值为如上所示的六个项的代数和. 下面两种方法(图 1.2.1、图 1.2.2)可以帮助记忆三阶行列式值的计算.

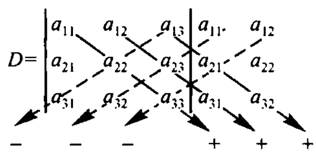

图 1.2.1　沙路法

或

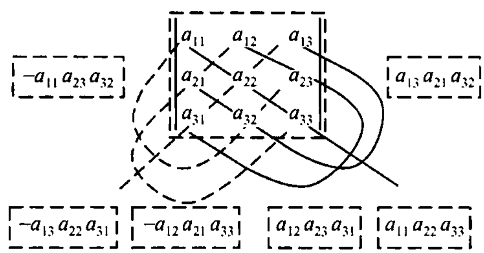

图 1.2.2　对角线法

实线上三个数的乘积构成的三项取正号,虚线上三个数乘积构成的三项都取负号. 于是,上面三元线性方程组的解 x_1,x_2,x_3 就可以表示成

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},x_3=\frac{D_3}{D},$$

其中

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},D_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

这种解的结构与前面二阶行列式的解的结构类似.

例(1.2.2) 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x-y+z=0, \\ 3x+2y-5z=1, \\ x+3y-2z=4. \end{cases}$$

解 此时

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=2\times2\times(-2)+(-1)\times(-5)\times1+1\times3\times3-1\times2\times1-(-5)\times3\times2-(-2)\times3\times(-1)=28,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}=13,\qquad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}=47,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}=21,$$

所以

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{13}{28},y=\frac{D_2}{D}=\frac{47}{28},z=\frac{D_3}{D}=\frac{21}{28}=\frac{3}{4}.$$

从上面二阶、三阶行列式的记法中可以看出行列式是一个数,它们都是一些乘积的代数和.每一项乘积都是由行列式中位于不同行和不同列的数构成(二阶行列式每一乘积项有2个因子,三阶行列式每一乘积项有3个因子),展开式恰恰就是由所有这种可能的乘积组成(二阶行列式有2!项乘积,三阶行列式有3!项乘积);另一方面,每一项乘积都带有符号,这个符号的确定需要用到逆序数,在三阶行列式(1.2.3)中,项的一般形式可以写成

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中 $j_1j_2j_3$ 是 1,2,3 的一个排列.可以看出,当 $j_1j_2j_3$ 是偶排列时,对应的项在

(1.2.3)中取正号；当 $j_1j_2j_3$ 是奇排列时，则带有负号. 于是三阶行列式(1.2.3)可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} \pm a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

用以上记法表示二阶行列式也成立

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2} \pm a_{1j_1}a_{2j_2},$$

现在，我们就根据这些规律定义 n 阶行列式.

定义(1.2.1)　设有 n^2 个数，排成 n 行 n 列

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}, \end{matrix}$$

作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积，并冠以符号 $(-1)^\tau$，得到形如 $(-1)^\tau a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的项，其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的排列，τ 为这个排列的逆序数. 由于这样的排列共有 $n!$ 个，因而形如 $(-1)^\tau a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的项共有 $n!$ 个，所有这 $n!$ 项的代数和 $\sum(-1)^\tau a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 称为 **n 阶行列式**，记作

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^\tau a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

简记作 $D=\Delta(a_{ij})$（或记为 $D=\det(a_{ij})$）. 数 a_{ij} 称为行列式 $\Delta(a_{ij})$ 中的元素，简称为元. 这里，$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和.

当 $n=1$ 时，规定 $|a|=a$. 当 $n=2,3$ 时，按此定义与前面用对角线法则定义的二、三阶行列式比较，显然是一致的.

注意：四阶或四阶以上的行列式值的计算不能像二、三阶行列式那样直接用对角线法则计算.

例(1.2.3)　计算行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 这是一个四阶行列式.计算的结果应该为 $4!=24$ 项的代数和,但是这个行列式的零元素较多,所以不为零的项就不多了.第一行能取 $a_{11}=3$ 和 $a_{13}=-1$,第二行仅能取 $a_{22}=2$ 和 $a_{24}=-1$.当取 $a_{11}=3, a_{22}=2$ 时,第三行必取 $a_{33}=3$.第四行也仅有一种取法 $a_{44}=1$.故而,这个行列式有

$$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} = 3\times 2\times 3\times 1 = 18,$$

$$a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} = (-1)\times(-1)\times 1\times(-3) = -3.$$

第一项的列标排列为 1234,逆序数为 0,为偶排列,取正号;第二项的列标排列为 3421,逆序数为 5,为奇排列,取负号.

所以原行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + (-1)^5 a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}$$

$$= 18 - (-3) = 21.$$

例(1.2.4) 主对角线左下方的元素全为零的行列式,称之为上三角形行列式.计算上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 在这个行列式中,第 n 行仅有一个不为零的元素 a_{nn},故这一行只能取 a_{nn} 项;在第 $n-1$ 行中有两个不为零的元素 $a_{n-1,n-1}$ 和 $a_{n-1,n}$,由于已经取了第 n 列的 a_{nn},故此时就不能再取第 n 列的元素 $a_{n-1,n}$ 了,而只能取 $a_{n-1,n-1}$,依此类推,第一行也仅有一种取法 a_{11},故而,这个行列式除了 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 项外,其余项全为零,而这一项的列指标排列是个偶排列.

于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

换句话说,这个行列式就等于主对角线(从左上角到右下角这条对角线)上元素的乘积.同理,对于主对角线右上方的元素全为零的下三角形行列式有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地,有

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_3 \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n, E = \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

这种除主对角线以外的元素全为零的行列式称为对角行列式.

例(1.2.5) 证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

证 同例(1.2.4)一样,此行列式也仅有一项 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$,而它的符号由列指标的逆序数而定,其列指标排列为 $n(n-1)\cdots 21$,逆序数为 $\tau = 1+2+\cdots+(n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$,所以

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$