高等学校教材

Linear Algebra

线性代数

第二版

王长群 李梦如 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

线性代数

Xianxing Daishu

第二版

王长群　李梦如　编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书是一本颇具特色的线性代数教材，先从向量空间入手，将矩阵作为工具贯穿全书，论及线性代数的基本内容，并简要介绍抽象代数的基本概念，强调基础，侧重计算，由浅入深，便于教学。

本书内容包括：预备知识，向量代数，空间中直线与平面，行列式与克拉默法则，矩阵，线性方程组，特征值，二次型，线性空间，线性变换，抽象代数简介等，其中附录内容是对各章基本内容的补充和深化，用以扩大学生视野。书后还给出了部分习题答案、提示。

本书可作为高等学校理工科各专业线性代数课程教材，也可作为学生的自学用书。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/王长群，李梦如编. --2版. --北京：高等教育出版社，2012.6

ISBN 978-7-04-034843-9

Ⅰ.①线… Ⅱ.①王… ②李… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第081633号

策划编辑	张长虹	责任编辑	张晓丽	封面设计	王凌波	版式设计	余 杨
插图绘制	黄建英	责任校对	金 辉	责任印制	田 甜		

出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landraco.com
印　刷	北京嘉实印刷有限公司		http://www.landraco.com.cn
开　本	787 mm × 960 mm 1/16		
印　张	16	版　次	2001年9月第1版
字　数	290千字		2012年6月第2版
购书热线	010-58581118	印　次	2012年6月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　价	23.70元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物 料 号 34843-00

第二版前言

线性代数是高等学校理工科各专业的一门重要的基础理论课。学生对该课程的掌握程度不仅直接影响到后续课程的学习,而且对以后的工作也会产生重要的影响。学生通过学习该课程,需力求做到理解线性代数的基本概念,掌握基本理论和方法,逐步提高自己的逻辑推理能力、抽象思维能力、运算能力和综合运用能力。

第二版教材是在原有教材的基础上,根据教育部最新的线性代数课程基本要求修订的。具体地讲,除了增添一些习题和例题外,还增加了复数的相关知识、线性方程组解的理论的应用、二次型理论在平面曲线及空间曲面的方程标准化方面的应用等内容,以增强代数与几何的密切联系,加深对线性代数基本内容的理解,开阔学生的视野。

本次修订工作得到了郑州大学教务处和数学系领导的大力支持,也得到了数学系许多老师的热情帮助。在此,我们深表谢意。由于作者水平有限,书中难免会有错误和不足之处,敬请读者与同仁不吝赐教。

王长群

2012 年 3 月

第一版前言

本书是为大学非数学类理工科各专业和文科部分专业编写的教材。主要内容如下:第1章介绍了向量代数及向量在3维几何空间中直线、平面方程上的应用,并且为下面的n维向量空间P^n中的讨论做了一些铺垫;第2、3、4、5、6章是线性代数的基本内容,分别讨论了行列式的计算、矩阵的运算、求解线性方程组以及n维向量空间P^n的性质、二次型、特征值理论。矩阵作为一个重要的研究对象和研究工具一直贯穿全书,同学们必须熟练掌握,尤其是对矩阵的三个标准形:等价标准形、相似标准形和合同标准形;第7章和第8章介绍了线性空间和线性变换,这也是线性代数的基本研究对象,通过对这两章的学习,同学们会对矩阵的相似有更深刻的理解;最后第9章简要介绍了抽象代数中群、环、域的基本概念,进一步开拓同学们的视野,作为选学内容。

讲授本书大约需要60多个学时(不包括第9章)。考虑到双休日以及新生军训的因素,如果学时不够,教师可以根据情况适当取舍,但是我们认为至少要学完前六章,并且要了解线性空间和线性变换的基本概念。书中附录的内容可以让同学们自己阅读,本书最后有部分习题答案、提示,供大家参考。我们强调指出,同学们在做习题时必须独立解答而不能先看答案,这样才能达到巩固所学知识的目的。

在本书的编写过程中,得到了郑州大学教务处和数学系领导的鼓励和支持,也得到了数学系众多老师的帮助。在本书初稿试用的几年中,许多教师都对其中的错误加以指正,并提出了宝贵的修改意见。在此,我们对他们的支持和帮助表示衷心的感谢。本书可能还会有错误和不足之处,恳请各位专家和使用本书作为教材的教师们指正。

王长群

2001年8月20日

试读结束,需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010)58581897　58582371　58581879
反盗版举报传真 (010)82086060
反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn
通信地址 北京市西城区德外大街 4 号　高等教育出版社法务部
邮政编码 100120

目　　录

第 0 章

预备知识

§0.1 复数 数域

人们在认识自然界的过程中，最先接触到的数是正整数. 随后，人们又认识了零和负整数，建立了整数系的概念. 整数系对于数的加法、减法、乘法都是封闭的，即任意两个整数的和、差、积仍然是一个整数. 但是两个整数的商(除数不为0)却未必是整数. 于是人们引入了分数，建立了有理数系. 任意两个有理数的和、差、积、商(除数不为0)仍然是一个有理数. 后来，人们通过小数引入无理数的概念，进而建立了实数系. 任意两个实数的和、差、积、商(除数不为0)仍然是一个实数，并且实数集与数轴上的点集一一对应. 实数集具有稠密性、连续性.

人们发现，有些实系数多项式(例如 x^2+1)没有实数根. 人们希望寻找一个数系，使该数系上的任意次数大于0的多项式都有根. 这就需要把实数系加以扩充.

定义 设 a,b 为实数，则称表达式 $z=a+b\mathrm{i}$ 为一个复数，其中 a,b 分别称为复数 z 的实部、虚部，i 称为虚数单位.

设 a,b,c,d 为实数，复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 和 $w=c+d\mathrm{i}$ 的和、差、积、商分别定义为

$$z\pm w=(a+b\mathrm{i})\pm(c+d\mathrm{i})=(a\pm c)+(b\pm d)\mathrm{i},$$

$$zw=(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})=(ac-bd)+(bc+ad)\mathrm{i}.$$

如果 $c+d\mathrm{i}\neq 0$，即 $c^2+d^2\neq 0$，则

$$\frac{z}{w}=\frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}=\frac{(a+b\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})}{(c+d\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)\mathrm{i}}{c^2+d^2}.$$

根据定义，实数 a 可看成复数 $a+0\mathrm{i}$，并且，如果 a,b 为实数，则 $(a+0\mathrm{i})\pm(b+0\mathrm{i})=(a\pm b)+0\mathrm{i}$，$(a+0\mathrm{i})(b+0\mathrm{i})=ab+0\mathrm{i}$，$\dfrac{a+0\mathrm{i}}{b+0\mathrm{i}}=\dfrac{a}{b}+0\mathrm{i}(b\neq 0)$.

我们把形如 bi(b 为非零实数)的复数叫纯虚数. 容易看出,$i^2=-1$. 这样,复数乘法的定义可以理解为

$$(a+bi)(c+di)=ac+(bc+ad)i+bdi^2=(ac-bd)+(bc+ad)i.$$

可以看出,任意两个复数的和、差、积、商(除数不为 0)仍然是一个复数. 我们还可以引入共轭复数的概念. 我们称复数 $a-bi$ 为复数 $a+bi$ 的共轭复数,其中 a,b 为实数. 我们把复数 z 的共轭复数记为 $\bar{z}$.

共轭复数具有如下性质.

设 z、w 为复数,则

(1) $\bar{\bar{z}}=z$;

(2) $\overline{(z\pm w)}=\bar{z}\pm\bar{w}$;

(3) $\overline{zw}=\bar{z}\,\bar{w}$;

(4) $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)}=\dfrac{\bar{z}}{\bar{w}}(w\neq 0)$;

(5) z 为实数当且仅当 $\bar{z}=z$,z 为纯虚数当且仅当 $\bar{z}=-z$.

我们定义复数 $z=a+bi$(a,b 为实数)的模为 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$. 显然,$|z|^2=z\bar{z}$,$|\bar{z}|=|z|$. 容易证明,复数的模还具有下列性质:

(1) $|zw|=|z||w|$;

(2) $\left|\dfrac{z}{w}\right|=\dfrac{|z|}{|w|}(w\neq 0)$;

(3) $|z|-|w|\leqslant|z+w|\leqslant|z|+|w|$.

设复数 $z=a+bi$,a,b 为实数. 在平面 $\mathbf{R}^2$ 上建立一个平面直角坐标系 Oxy,分别把两个坐标轴 x 轴、y 轴叫实轴、虚轴,用向量(a,b)表示复数 $z=a+bi$,就得到了复平面,如图 0.1 所示. 这样,复数 z 的实部、虚部分别为它对应向量的第一、第二个坐标,复数 z 的模就是这个向量的长度,复数的加法可以按平行四边形法则进行. 我们用 $e^{i\theta}$表示 $\cos\theta+i\sin\theta$,它是一个与正实轴方向成 θ 角的单位向量,那么任意一个非零复数总可以表示为$z=|z|e^{i\theta}$,其中 θ 为向量 z 与正实轴方向所成的角(z 的辐角). 这样,两个复数的乘法可以按如下方式理解:如果 $z=|z|e^{i\theta}$,$w=|w|e^{i\phi}$是两个非零复数,则

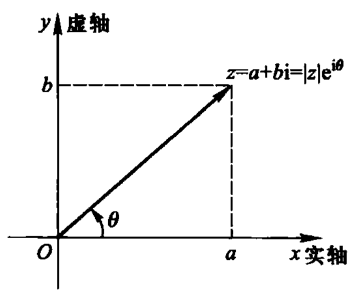

图 0.1

$$zw=|z|e^{i\theta}|w|e^{i\phi}=(|z||w|)e^{i(\theta+\phi)},$$

即,乘积的模等于它们模的乘积,乘积的辐角等于它们辐角的和. 特别地,设 $z=$

$|z|e^{i\theta}$为复数，θ 为辐角，n 为正整数，则 $z^n=|z|^n e^{in\theta}$.

我们不加证明地给出代数学基本定理：

代数学基本定理 任意一个正次数的复系数多项式都至少有一个复数根.

推论 设 $f(x)$为一个正次数的复系数多项式，则存在复数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 使 $f(x)=k(x-c_1)(x-c_2)\cdots(x-c_n)$，其中 n 为 $f(x)$的次数，k 为 $f(x)$表示式中 x^n 的系数(最高次项系数).

通常，我们分别用 $\mathbf{N},\mathbf{Z},\mathbf{Q},\mathbf{R},\mathbf{C}$ 表示自然数集、整数集、有理数集、实数集、复数集.

设 P 为复数集 $\mathbf{C}$ 的一个子集合，如果对 P 中任意两个数作某种运算，其结果仍在 P 中，则称 P 对该运算**封闭**. 显然，有理数集 $\mathbf{Q}$，实数域 $\mathbf{R}$，复数集 $\mathbf{C}$ 对加、减、乘、除(除数不为 0)都是封闭的；整数集 $\mathbf{Z}$ 对加、减、乘法运算封闭，但对除法(除数不为 0)却不封闭.

下面我们引入数域的概念.

设 P 为复数集 $\mathbf{C}$ 的子集，且 $0,1\in P$. 如果 P 对加法、减法、乘法、除法(除数不为 0)都是封闭的，则称 P 为一个**数域**.

显然，有理数集 $\mathbf{Q}$、实数集 $\mathbf{R}$、复数集 $\mathbf{C}$ 都是数域，而整数集、无理数集则不构成数域.(为什么?)

例 1 证明 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$是一个数域.

证明 因为 $1=1+0\cdot\sqrt{2}$，$0=0+0\cdot\sqrt{2}$，所以 $0,1\in\mathbf{Q}(\sqrt{2})$. 容易看出，$\mathbf{Q}(\sqrt{2})$对于加法、减法是封闭的.

设 $a,b,c,d\in\mathbf{Q}$，则

$$\begin{aligned}&(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})\\=&(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}\in\mathbf{Q}(\sqrt{2}),\end{aligned}$$

所以 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$对于乘法是封闭的.

又设 $a+b\sqrt{2}\neq 0$，则 $a-b\sqrt{2}\neq 0$(为什么?)，于是

$$\begin{aligned}\frac{c+d\sqrt{2}}{a+b\sqrt{2}}&=\frac{(c+d\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}{(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}\\&=\frac{ac-2bd}{a^2-2b^2}+\frac{ad-bc}{a^2-2b^2}\cdot\sqrt{2}\in\mathbf{Q}(\sqrt{2}).\end{aligned}$$

即 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$对于除法(除数不等于 0)也是封闭的，所以它是一个数域. □

定理 任意一个数域 P 都包含有理数域 $\mathbf{Q}$，因此有理数域 $\mathbf{Q}$ 是最小的数域.

证明 设 P 为任意数域，则 $0,1\in P$. 因为 P 对加法运算封闭，所以有任意

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

正整数 n，有

$$n = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{个}} \in P.$$

又因为 P 对减法封闭，所以 $-n=0-n\in P$. 因此 P 包含整数集 $\mathbf{Z}$. 由于任意一个有理数 $a\in\mathbf{Q}$ 都可以写成 $\frac{m}{n}(m,n\in\mathbf{Z},n\neq0)$ 的形式，依数域 P 对除法（除数不为0）的封闭性可知 $a\in P$，所以 $\mathbf{Q}\subseteq P$. □

习题0.1

1. 计算：

(1) $(2+3\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})$；　　(2) $(1+\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})$；

(3) $(1+\mathrm{i})^n$（n 为正整数）；　　(4) $\dfrac{3-2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}-\dfrac{3+2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$.

2. 证明：(1) 设 $z=|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, w=|w|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$，其中 θ,ϕ 分别为 z,w 的辐角，则 $zw=|z||w|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}, \dfrac{z}{w}=\dfrac{|z|}{|w|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\phi)}$；

(2) 设 $z=|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$\theta$ 为 z 的辐角，则对任意整数 n，有 $z^n=|z|^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$.

3. 讨论 $P_1=\{$全体奇数$\}$，$P_2=\{n\pi\mid n\in\mathbf{Z}\}$，$P_3=\{n\mathrm{i}\mid n\in\mathbf{Z}$，i 为虚数单位$\}$，$P_4=\{a\mathrm{i}\mid a\in\mathbf{Q}$，i 为虚数单位$\}$是否构成数域？为什么？

4. 证明：$\mathbf{Q}(\mathrm{i})=\{a+b\mathrm{i},a,b\in\mathbf{Q}\}$ 构成一个数域.

5. 证明：数域 $\mathbf{Q}(\mathrm{i})=\{a+b\mathrm{i},a,b\in\mathbf{Q}\}$ 不包含除 $\mathbf{Q}$ 和 $\mathbf{Q}(\mathrm{i})$ 以外的其他数域.（提示：设 P 为包含在 $\mathbf{Q}(\mathrm{i})$ 中的一个数域，$P\neq\mathbf{Q}$，证明 $P=\mathbf{Q}(\mathrm{i})$.）

§0.2　二、三阶行列式

中学已经学过二元、三元线性方程组. 设

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq0$ 时，其一般解为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \\ x_2=\dfrac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \end{cases}$$

引入符号 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称为**二阶行列式**，并令

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-b_2a_{12}, D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-a_{21}b_1,$$

于是其解可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}.$$

同样,在解三元一次线方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

中,引入符号

$$\begin{aligned} D=&\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ =&a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ &-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}, \end{aligned}$$

称为三阶行列式,并令

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

当 $D\neq0$,则其解可表示为:$x_1=\frac{D_1}{D}$,$x_2=\frac{D_2}{D}$,$x_3=\frac{D_3}{D}$(证明留作习题).

例 1 求解二元一次方程组

$$\begin{cases} 2x_1-x_2=5, \\ 3x_1+2x_2=11. \end{cases}$$

解

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=4+3=7\neq0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 11 & 2 \end{vmatrix}=10+11=21,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 11 \end{vmatrix}=22-15=7,$$

于是

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{21}{7}=3,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{7}{7}=1.$$ □

例 2 求解三元一次方程组

$$\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=9,\\ x_1-2x_2-x_3=-6,\\ 4x_1+x_2+2x_3=12.\end{cases}$$

解 $D=\begin{vmatrix}2&-1&3\\1&-2&-1\\4&1&2\end{vmatrix}=27,\quad D_1=\begin{vmatrix}9&-1&3\\-6&-2&-1\\12&1&2\end{vmatrix}=27,$

$$D_2=\begin{vmatrix}2&9&3\\1&-6&-1\\4&12&2\end{vmatrix}=54,\quad D_3=\begin{vmatrix}2&-1&9\\1&-2&-6\\4&1&12\end{vmatrix}=81,$$

于是

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{27}{27}=1,$$

$$x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{54}{27}=2,$$

$$x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{81}{27}=3.$$

□

通过二元、三元线性方程组的求解公式可以看出：x_i 是两个行列式的商$\frac{D_i}{D}$，其中 D 是由方程组未知量的系数组成的行列式，D_i 是把 D 的第 i 列换成常数列而得到的行列式. 在第 2 章中，我们将把这个结论推广到一般 n 元线性方程组.

习题0.2

1. 对于三元一次方程组，当 $D\neq0$ 时，证明课文中的求解公式.

2. 证明

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{22}&a_{23}\end{vmatrix}.$$

3. 证明

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{31}\\a_{12}&a_{22}&a_{32}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{vmatrix}.$$

第 1 章

向量代数、空间中直线与平面

物理学、力学、工程学、经济理论等学科以及数学本身都要用到向量的思想方法. 本章将介绍向量的基本概念及其代数运算，并用向量来讨论空间中的平面与直线. §1.1～§1.5 是向量代数的基本内容，包括了向量的概念及其代数运算；§1.6 和 §1.7 应用向量的方法去研究空间的平面与直线的方程.

§1.1 空间直角坐标系

我们由高中平面解析几何知道，建立平面直角坐标系后，平面中的点 P 可以与二元有序实数组(x,y)建立一一对应. 于是我们可以用代数的方法去研究直线、曲线等平面几何问题. 类似地我们可以在空间中建立直角坐标系，用同样的方法去研究空间中平面、直线、曲面、曲线等问题.

在空间中任意取定一点 O，过 O 作三条两两互相垂直且取定方向的直线 Ox，Oy，Oz，并取一个线段作为长度单位. 这样三条有向直线 Ox，Oy，Oz 在取 O 为坐标原点后都成为数轴(即直线上点与全体实数成为一一对应). 用这样三条有公共原点 O 的两两互相垂直的数轴 Ox，Oy，Oz 就建立了一个空间直角坐标系(如图 1.1)，记作$\{O;x,y,z\}$，点 O 称为坐标系的**原点**，Ox，Oy，Oz 称为**坐标轴**，依次称为 x **轴**，y **轴**，z **轴**；由两个坐标轴所决定的平面称为**坐标平面**(简称**坐标面**)，依次称为 Oxy 平面，Oyz 平面，Ozx 平面. 如果 Ox，Oy，Oz 的顺序符合右手规则，即，右手四指指向 Ox 轴正向，然后右手四指向 Oy 轴正向转，右手大拇指恰好指

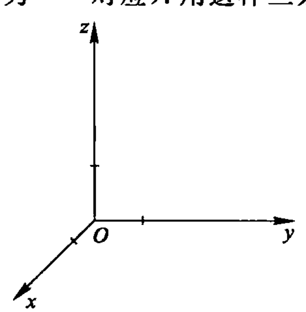

图 1.1

向 Oz 轴正向，则称该坐标系为**右手系**；否则称之为**左手系**. 习惯上，我们建立的坐标系为右手系. 三个坐标平面将空间分成八部分，这八个部分叫做**卦限**，分别称为第Ⅰ,第Ⅱ,第Ⅲ,第Ⅳ,第Ⅴ,第Ⅵ,第Ⅶ及第Ⅷ卦限.

设 P 为空间中任意一点，过 P 点分别作平行于三个坐标面的三个平面分别交 x 轴于 A 点，交 y 轴于 B 点，交 z 轴于 C 点(如图 1.2). 如果 A、B、C 在三个数轴上的坐标分别为 x,y,z，则称有序三元实数组 (x,y,z) 为 P **点的坐标**.

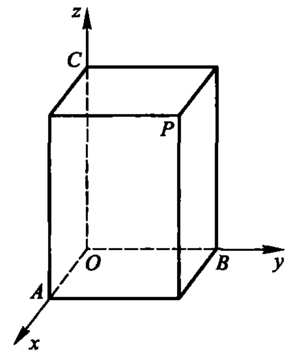

图 1.2

显见，空间中全部点集合 V_3 与全体有序三元实数组集合 $\mathbf{R}^3$ 有着一一对应关系. 即

$$P \xleftrightarrow{1-1} (x,y,z),$$

其中 $P\in V_3$，$(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$. 我们可以把点 P 写为 $P(x,y,z)$，有时把三元实数组 (x,y,z) 看成空间中以 (x,y,z) 为坐标的点. 这样，空间的八个卦限可以写成

$$\begin{aligned}
&\text{第Ⅰ卦限}\{(x,y,z)\mid x>0,y>0,z>0\},\\
&\text{第Ⅱ卦限}\{(x,y,z)\mid x<0,y>0,z>0\},\\
&\text{第Ⅲ卦限}\{(x,y,z)\mid x<0,y<0,z>0\},\\
&\text{第Ⅳ卦限}\{(x,y,z)\mid x>0,y<0,z>0\},\\
&\text{第Ⅴ卦限}\{(x,y,z)\mid x>0,y>0,z<0\},\\
&\text{第Ⅵ卦限}\{(x,y,z)\mid x<0,y>0,z<0\},\\
&\text{第Ⅶ卦限}\{(x,y,z)\mid x<0,y<0,z<0\},\\
&\text{第Ⅷ卦限}\{(x,y,z)\mid x>0,y<0,z<0\}.
\end{aligned}$$

下面我们研究空间中两点的距离.

设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间中任意两点. 过 P_1，P_2 分别作平行于三个坐标面的平面，这六个平面围成一个长方体(如图 1.3)，而 P_1P_2 恰好是该长方体的对角线. 于是有

$$\begin{aligned}
|P_1P_2|^2 &= |P_1M_1|^2+|M_1M_2|^2+|M_2P_2|^2\\
&=(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2+(z_2-z_1)^2,
\end{aligned}$$

故有

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

例 1 求 $P(-1,2,3)$ 到 z 轴的距离.

解 过 P 作直线 $PM\perp z$ 轴，交 z 轴于 $M(0,0,3)$(如图 1.4)，则点 P 到 z 轴的距离为

$$|PM|=\sqrt{(-1-0)^2+(2-0)^2+(3-3)^2}=\sqrt{5}. \qquad \square$$

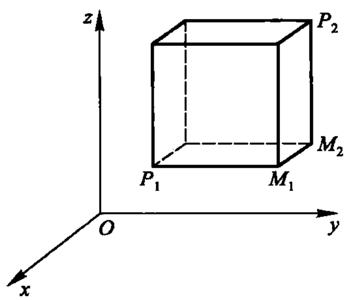

图 1.3

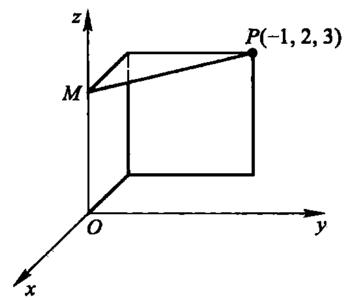

图 1.4

习题1.1

1. 在空间直角坐标系下，作具有下列坐标的点：

$A_1(1,2,3)$， $A_2(-1,-2,-3)$， $A_3(-1,2,3)$， $A_4(1,-2,3)$，

$A_5(1,2,-3)$， $A_6(1,-2,-3)$， $A_7(-1,-2,3)$， $A_8(-1,2,-3)$.

2. 求点 $A(4,-3,5)$与原点间的距离，并求 A 到各坐标轴的距离.

§1.2 向量的概念

生活中常见的量有两种.一种量只有大小，如长度、面积、温度、时间、功等，可以用一个实数来表示，这样的量称为**数量**(或**标量**).另一种量既有大小又有方向，如速度、加速度、位移、力等，这样的量称为**向量**(或**矢量**).

向量通常用一个带箭头的有向线段来表示(如图 1.5)，箭头的所指方向称为向量的方向，线段 AB 的长度称为向量的长度(或大小或模)，称 A 为向量的**起点**，B 为向量的**终点**，记为 $\boldsymbol{a}$ 或$\overrightarrow{AB}$.向量$\overrightarrow{AB}$的长度记为$|\overrightarrow{AB}|$.若$|\overrightarrow{AB}|=1$，则称$\overrightarrow{AB}$为**单位向量**(**幺矢**).长度为 0 的向量叫**零向量**，记为 $\mathbf{0}$.需要注意，零向量且仅有零向量的方向不定.

设 $\boldsymbol{a}$ 为向量，与 $\boldsymbol{a}$ 长度相同而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**(或**相反向量**)，记作$-\boldsymbol{a}$.

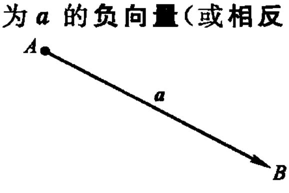

图 1.5

设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为两个向量，若它们长度相等且方向相同，则称 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ **相等**，记 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.因此我们这里所定义的向量相等与向量的起点、终点无关，也就是说，向量是可以平行移动的.在这种意义下，向量又称为**自由向**

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com