



高等教育“十二五”规划教材



概率论与 数理统计

PROBABILITY AND
MATHEMATICAL
STATISTICS



肖继先 主编



科学出版社

高等教育“十二五”规划教材

概率论与数理统计

肖继先 主编

王新春 李冬梅 副主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书依据高等院校理工类专业概率论与数理统计课程教学大纲编写,根据不同专业的需要选择内容、把握尺度,语言简洁、通俗易懂,联系实际、融入案例,编排新颖,便于教学与自学.每章最后加入了概率统计问题的 Mathematica 程序实现方法,满足各专业学生的实践需求.

本书共 7 章,主要内容包括概率论的基本概念、随机变量及其分布、随机变量的数字特征与极限定理、样本及抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析.各章均配有适量的习题,书后附有参考答案.

本书可作为高等院校工科、理科(非数学专业)及经管类各专业的教材和研究生入学考试的参考书,也可供工程技术人员、科技工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/肖继先主编. —北京:科学出版社,2012
(高等教育“十二五”规划教材)
ISBN 978-7-03-033075-8

I. ①概… II. ①肖… III. ①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 IV. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 267373 号

策划:李 军

责任编辑:张振华 / 责任校对:刘玉靖

责任印制:吕春珉 / 封面设计:科地亚盟

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京鑫丰华彩印有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012 年 5 月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2012 年 5 月第一次印刷 印张:23

字数:531 000

定价:39.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换(鑫丰华))

销售部电话 010-62140850 编辑部电话 010-62135157

版权所有,侵权必究

举报电话:010-64030229;010-64034315;13501151303

前 言

概率论与数理统计(简称概率统计)作为近代数学的一个分支,是研究随机现象客观规律性的一门学科.其思想和方法在科学研究、工程技术、国民经济等领域都有广泛的应用.它不仅是高等院校各专业的一门重要的必修基础课程.同时也是研究生入学考试数学科目的考试内容.

本书在吸收国内外同类教材优点的基础上,结合编者多年的教学经验,并以教育部颁布的高等学校非数学专业类的数学课程教学的基本要求为依据,以培养高等应用型人才为目标编写而成.在内容的编排上我们始终坚持“加强基础,重视应用”的原则,着重培养学生分析问题与解决问题的能力,熟练运用基本概型进行计算的能力和逻辑思维能力.每章内容的取舍上以“必需、够用、简明”为原则,尽量做到语言简洁、通俗易懂,例题选用由浅入深、层次分明,符合学生认知结构的形成规律.本书具有以下特色:

一、根据各个专业对概率统计知识与方法要求的不同,分层编写.前6章每章分为5节,第1节给出基本概念、基本性质和基本计算公式,适用于对概率统计知识与方法要求较低的专业;第2节选取了实际问题中的应用案例,让学生了解所学知识的应用领域和应用方法;第3节内容为第1节知识的补充拓展,适用于对概率统计知识与方法要求较高的专业;第4节为典型问题解析,适用于将来继续深造的学生;第5节为 Mathematica 在概率统计中的应用.

二、精简数学知识、重视实际应用.不拘泥于严格的数学定义的阐述,略去理论性较强的定理证明,突出定义、定理的直观解释及意义.力求用通俗的语言和生动的例子引导学生理解概率统计的基本概念、基本方法,所选例子大部分来自生活或生产实践,学生易于接受.

三、引入趣味案例,激发学习热情,培养应用意识.每章第2节给出了典型应用案例,旨在活跃学生思维,扩大学生视野,激发学生的应用意识,提高学生运用概率统计方法解决实际问题的能力.

四、突出实用性,增强实践技能.每章最后简要介绍了 Mathematica 统计工具箱中的部分函数及应用程序,并列举了富有启发性的实例,提高学生概率统计的实践技能.

本书由肖继先担任主编,王新春、李冬梅担任副主编.全书共分7章,其中,肖继先编写第1,4,7章,王新春编写第2,3章,李冬梅编写第5,6章.刘琳琳验证了全部 Mathematica 程序,袁书娟验证了全部习题.最后由主编和副主编修改定稿.

本书的编写,得到了河北联合大学各级领导的大力支持,特别是刘春风和米翠兰教授为本书的编写提出了很好的意见和建议,在此一并表示衷心的感谢.

编者力求使本书完善和成熟,但由于编写时间紧迫、编者水平所限,疏漏之处在所难免,恳请广大读者批评指正,以便改进和完善.

编 者

2011年10月

目 录

第 1 章 概率论的基本概念	1
1.1 随机事件及其概率的基本概念	1
1.1.1 随机试验	1
1.1.2 样本空间与随机事件	2
1.1.3 事件的关系与运算	2
1.1.4 频率与概率	5
1.1.5 概率的性质	7
1.1.6 古典概型	8
1.1.7 条件概率	11
1.1.8 乘法公式	12
1.1.9 全概率公式与贝叶斯公式	14
1.1.10 事件的独立性	15
1.1.11 伯努利(Bernoulli)模型	17
1.2 概率在实际问题中的应用案例	19
1.2.1 概率性质及古典概型的应用	19
1.2.2 条件概率及乘法公式的应用	21
1.2.3 全概率公式及贝叶斯公式的应用	22
1.3 概率知识及解题方法拓展	23
1.3.1 概率性质及古典概型问题	23
1.3.2 几何概型	27
1.3.3 关于复杂事件的概率计算问题	29
1.4 概率计算典型问题解析	32
1.4.1 抽签摸球问题	32
1.4.2 随机取数问题	34
1.4.3 可靠性问题	36
1.4.4 一般综合性问题	36
1.5 概率问题的 Mathematica 程序实现	38
1.5.1 随机数的产生及随机现象模拟	38
1.5.2 古典概型的计算	41
1.5.3 几何概型的计算	43

1.5.4 伯努利概型的计算	45
习题 1	46
第 2 章 随机变量及其分布	50
2.1 随机变量及其分布的基本概念	50
2.1.1 随机变量	50
2.1.2 随机变量的分布	51
2.1.3 随机变量的函数的分布	62
2.1.4 多维随机变量及分布	64
2.2 随机变量分布的应用案例	74
2.2.1 离散型随机变量分布的应用	74
2.2.2 连续型随机变量分布的应用	76
2.3 随机变量知识及解题方法拓展	77
2.3.1 一维随机变量的分布	77
2.3.2 多维随机变量的函数的分布	80
2.3.3 条件分布	85
2.3.4 n 维随机变量	88
2.4 随机变量及其分布的典型问题解析	92
2.4.1 一维随机变量及其函数的分布	92
2.4.2 二维随机变量分布的计算	93
2.4.3 二维随机变量的函数的分布	96
2.5 随机变量分布的 Mathematica 程序实现	98
2.5.1 离散型随机变量及其分布	98
2.5.2 连续型随机变量的分布	103
2.5.3 参数变化对正态分布概率密度曲线的影响	107
2.5.4 随机变量函数的分布曲线	108
习题 2	109
第 3 章 随机变量的数字特征与极限定理	114
3.1 随机变量数字特征的基本概念	114
3.1.1 数学期望	114
3.1.2 方差	121
3.1.3 原点矩及中心矩	125
3.2 数字特征与极限定理在实际问题中的应用案例	126
3.2.1 随机变量数字特征的应用	126
3.2.2 中心极限定理的应用	130
3.3 数字特征与极限定理知识及解题方法拓展	131
3.3.1 多维随机变量函数的数学期望	131

3.3.2	随机变量的协方差、相关系数与矩	133
3.3.3	切比雪夫不等式	139
3.3.4	大数定律与中心极限定理	140
3.4	数字特征与极限定理典型问题解析	144
3.4.1	有关随机变量及其函数的数字特征	144
3.4.2	随机变量数字特征的应用	150
3.4.3	大数定律和中心极限定理的应用	154
3.5	数字特征的 Mathematica 程序实现	155
3.5.1	期望、方差和标准差的计算	156
3.5.2	协方差与相关系数的计算	157
3.5.3	中心极限定理的直观演示	158
	习题 3	159
第 4 章	样本及抽样分布	163
4.1	样本及抽样分布的基本概念	164
4.1.1	个体与总体	164
4.1.2	样本	164
4.1.3	统计量	166
4.1.4	统计中常用的分布	168
4.1.5	正态总体样本均值与样本方差的分布	171
4.2	常用统计量在实际问题中的应用案例	172
4.2.1	统计量在评价居民收入水平中的简单应用	172
4.2.2	统计量在产品质量检验中的简单应用	173
4.3	数理统计知识及解题方法拓展	174
4.3.1	χ^2 分布及 F 分布的问题	174
4.3.2	两个正态总体的抽样分布	176
4.4	抽样分布典型问题解析	177
4.4.1	样本均值和样本方差及概率的计算	177
4.4.2	利用抽样分布求正态总体统计量的概率	179
4.4.3	求抽样分布	180
4.5	抽样分布的 Mathematica 程序实现	182
4.5.1	常用统计知识回顾及扩充	182
4.5.2	Mathematica 的常用指令	183
4.5.3	计算样本统计量	185
4.5.4	直方图的绘制	187
4.5.5	三大分布的作图与计算	191
	习题 4	200

第 5 章 参数估计	202
5.1 参数估计的基本概念	202
5.1.1 两种重要的点估计方法	202
5.1.2 估计量的评选标准	206
5.1.3 单个正态总体均值和方差的区间估计	207
5.2 参数估计在实际问题中的应用案例	211
5.2.1 点估计在实际中的应用	211
5.2.2 区间估计应用举例	213
5.2.3 估计未知数的技巧	213
5.3 参数估计的知识及解题方法拓展	217
5.3.1 参数点估计的求解方法	217
5.3.2 估计量优良性的鉴定	222
5.3.3 参数区间估计的思路和方法	224
5.3.4 两个正态总体均值差和方差比的区间估计	228
5.3.5 单侧置信区间	230
5.4 参数估计典型问题解析	231
5.4.1 参数的点估计问题	231
5.4.2 估计量评价的问题	233
5.4.3 区间估计的问题	234
5.4.4 综合型计算题的求解	235
5.4.5 非正态总体参数的区间估计	237
5.4.6 正态总体大样本的区间估计	238
5.4.7 贝叶斯估计	239
5.5 区间估计问题的 Mathematica 程序实现	242
5.5.1 单个正态总体均值的置信区间	242
5.5.2 两个正态总体均值差的置信区间	245
5.5.3 单个正态总体方差的置信区间	246
5.5.4 两个正态总体方差比的置信区间	247
习题 5	248
第 6 章 假设检验	251
6.1 假设检验的基本概念	251
6.1.1 假设检验思想概述	251
6.1.2 单个正态总体均值的假设检验	253
6.1.3 单个正态总体方差的假设检验	255
6.2 假设检验在实际问题中的应用案例	256
6.2.1 正态总体均值的假设检验	256

6.2.2	正态总体方差的假设检验	257
6.2.3	小概率原理在实际问题中的应用	258
6.3	参数假设检验的知识及解题方法拓展	260
6.3.1	假设检验的一般原理	260
6.3.2	假设检验的基本步骤	262
6.3.3	假设检验中的两类错误	262
6.3.4	正态总体参数假设检验的注意事项	263
6.3.5	单个正态总体均值的假设检验	264
6.3.6	单个正态总体方差的假设检验	266
6.3.7	单侧假设检验	267
6.3.8	两个正态总体均值差的假设检验	269
6.3.9	成对数据的假设检验	271
6.3.10	两个正态总体方差比的假设检验	272
6.4	假设检验典型问题解析	274
6.4.1	交换原假设与备择假设	274
6.4.2	两个正态总体参数的假设检验	275
6.4.3	非正态总体参数的假设检验	277
6.4.4	正态总体大样本的假设检验	278
6.4.5	非参数假设检验	279
6.5	假设检验问题的 Mathematica 程序实现	284
6.5.1	单个正态总体均值的检验	284
6.5.2	两个正态总体均值差的检验(方差未知但相等)	288
6.5.3	单个正态总体方差的检验	288
6.5.4	两个正态总体方差是否相等的检验	290
6.5.5	分布函数的 χ^2 检验	294
习题 6		296
第 7 章	方差分析与回归分析	298
7.1	单因素试验的方差分析	298
7.1.1	单因素试验方差分析模型	298
7.1.2	总偏差平方和 S_T 的分解	300
7.1.3	单因素方差分析方法	302
7.1.4	例题分析	303
7.2	一元线性回归	306
7.2.1	一元线性回归模型	306
7.2.2	参数 a, b 的最小二乘法	308
7.2.3	回归方程的显著性检验	310

7.2.4 预测与控制	313
7.3 可线性化的曲线回归	318
7.3.1 常见的可线性化的非线性回归模型	318
7.3.2 典型实例分析	320
7.4 方差分析及回归分析问题的 Mathematica 程序实现	322
7.4.1 方差分析	323
7.4.2 回归分析	325
7.4.3 用回归分析作单因素方差分析	329
习题 7	333
参考文献	337
参考答案	338
附表 1 几种常见的概率分布	345
附表 2 标准正态分布表	348
附表 3 泊松分布数值表	349
附表 4 t 分布临界值表	352
附表 5 χ^2 分布临界值表	353
附表 6 F 分布临界值表	354

第 1 章 概率论的基本概念

在我们的日常生活或社会实践中,仔细观察可以看到这样两类现象.一类现象是在一定的条件下进行某种试验(或观察)可以预料必然出现某种结果(或某种结果必然不出现).例如,上抛的石子必然下落;同性电荷相斥,异性电荷相吸;在没有外力作用的条件下,做等速直线运动的物体必然继续做等速直线运动;在标准大气压下,水加热到 100°C 时会沸腾等.我们将上述现象称之为**确定性现象或必然现象**.

另一类现象是在一定的条件下进行某种试验(或观察),其可能的结果有多个,事先无法确定到底哪个结果会发生.例如,在相同的条件下,抛一枚质地均匀的硬币,其结果可能是正面(把有币值的一面称作正面)朝上,也可能是反面朝上;一个商店每天接待的顾客人数;一个射手向同一个目标连射几发子弹,各次弹着点的位置不尽相同,并且每颗子弹弹着点的准确位置都是无法事先预测的.这一类现象我们称之为**偶然性现象或随机现象**.对于随机现象,就每次试验(或观察)而言,会出现这种结果或那种结果,呈现一种偶然性,但人们通过长期的观察和实践的结果表明,这些现象并非是杂乱无章的,而是有规可循的.例如,多次重复抛一枚硬币,正面朝上的次数与反面朝上的次数大致都是抛掷总次数的一半;同一射手射击同一目标,弹着点按着一定的规律分布,等等.这种在大量的重复试验或观察中所呈现出的固有的规律性,我们称为**统计规律性**.概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科.

1.1 随机事件及其概率的基本概念

1.1.1 随机试验

我们把对现象(包括必然现象和随机现象)进行一次观察或科学试验统称为一次试验,而把具有下列性质的试验称为**随机试验**.

- (1) 可以在相同条件下重复进行.
- (2) 每次试验的所有可能结果不止一个,并且事先能明确知道试验的所有可能结果.
- (3) 每次试验的结果是事先不可预测的,但是每次试验总是恰好出现上述可能结果中的一个.

随机试验常用字母 E 表示.以下试验均指随机试验,简称为试验.举例如下.

E_1 : 抛一枚质地均匀的硬币,观察正面 H (有币值的一面)朝上,还是反面 T 朝上.

E_2 : 从一批灯泡中抽取一只,观察其寿命.

E_3 : 掷两颗骰子,观察其点数之和.

E_4 : 在一时间间隔内,记录某电话交换台收到的呼唤次数.

E_5 : 记录某学校 24h 的用电量.

1.1.2 样本空间与随机事件

在随机试验中,试验的结果不止一个,称随机试验中每一种可能的结果为一个样本点,用 ω 表示.由全体样本点组成的集合称为随机试验 E 的样本空间,用 Ω 表示.即 $\Omega=\{\omega\}$.前面例子中的样本空间分别为

$$\Omega_1=\{H,T\};$$

$$\Omega_2=\{t|t\geq 0\};$$

$$\Omega_3=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\};$$

$$\Omega_4=\{0,1,2,3,\cdots\};$$

$$\Omega_5=\{t|0\leq t\leq T_0\}, \text{其中 } T_0 \text{ 为此学校每天最高用电量.}$$

样本空间 Ω 的子集称为试验 E 的随机事件,简称事件.

由两个或两个以上基本事件复合而成的事件称为复合事件.

不包含任何样本点的事件(空集)称为不可能事件,用 $\emptyset$ 表示.

在每次试验中总发生的事件称为必然事件.

样本空间 Ω 包含所有的样本点,它在每次试验中都发生,因此样本空间为必然事件.

事件或复合事件常用字母 $A, B, C, \cdots$ 表示.例如,在 E_1 中,有两个样本点 H 和 T ,基本事件也是两个 $\{H\}$ 和 $\{T\}$.再如在 E_3 中,设 A 表示事件“两颗骰子的点数之和为偶数”,则 $A=\{2,4,6,8,10,12\}$.

随机事件是由若干个基本事件组成的集合,或者说随机事件是样本空间的子集.在一次试验中,事件 A 发生的含义是,当且仅当 A 中一个样本点发生(或出现)时,称为事件 A 发生.

如在掷一颗骰子试验中,观察掷出的点数,样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.如果事件 A 表示“掷出的点数不小于4”,事件 B 表示“掷出的点数为奇数”, C 表示“出现的点数不小于7”,则 $A=\{4,5,6\}$, $B=\{1,3,5\}$, $C=\emptyset$.若掷出的点数为3,我们说事件 B 发生了.

随机事件表示成由样本点组成的集合,因此可以将事件间的关系及运算归结为集合之间的关系和运算,这不仅对研究事件的关系和运算是方便的,而且对研究随机事件发生的可能性大小的数量指标——概率的运算也是非常有益的.

1.1.3 事件的关系与运算

在实际问题中,我们不但要考虑在同一试验当中的各个随机事件,还要详细分析各个事件之间的各种关系和运算,为计算事件的概率做准备.下面讨论事件之间的关系和运算.

除非特殊声明,下面讨论的事件都假定来自同一样本空间 Ω .

1. 子事件(事件的包含关系)

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生,即 A 中的每一个样本点都包含在 B 中,则称事件 A 是事件 B 的子事件,或称事件 B 包含事件 A ,记作 $A\subseteq B$.

例如,掷一颗骰子,观察其点数.实验的样本空间 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 设事件 $B = \{1, 3, 4, 6\}$, $A = \{3, 4\}$, 则 $A \subseteq B$.

对任意事件 A , 都有 $\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega$.

我们用维恩(Venn)图对这种关系给出直观的说明(在下面各图中,整个矩形表示样本空间 Ω , 区域 A 与区域 B 分别表示事件 A 和事件 B). 区域 A 在区域 B 内, 说明事件 A 包含在事件 B 中, 如图 1.1 所示.

设 A, B, C 为任意 3 个事件, 事件间的包含关系有下列性质:

- (1) $A \subseteq A$ (自反性).
- (2) 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$ (传递性).

2. 相等关系

如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 则称事件 A 与事件 B 相等, 用 $A = B$ 表示.

3. 事件的和事件

设 C 表示“事件 A 与事件 B 中至少有一个发生”这一事件, 则称 C 为事件 A 与事件 B 的**和事件**, 记作 $C = A \cup B$. 事件 A 与 B 的和事件 C 用集合表示即为集合 A 与 B 的并, 如图 1.2 所示.

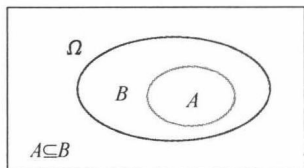


图 1.1

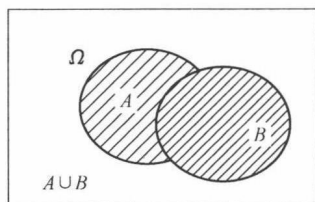


图 1.2

从图 1.2 可以看出, $A \cup B$ 包含 3 个部分: A 发生 B 不发生, B 发生 A 不发生, A 与 B 同时发生.

例如, 设事件 $A = \{1, 3, 4, 7\}$, 事件 $B = \{2, 4, 5, 8\}$, 则 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$. 和事件的概念可以推广到两个以上的事件.

- (1) 用 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 或 $\bigcup_{i=1}^n A_i$ 表示事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生;
- (2) 用 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots$ 或 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 表示事件 $A_1, A_2, \cdots$ 中至少有一个发生.

例如, 设事件 $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{0, 3, 6, 9\}$, $C = \{5, 10\}$, 则 3 个事件的和为 $A \cup B \cup C = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$.

4. 事件的积事件

设 C 表示“事件 A 与事件 B 同时发生”这一事件, 则称 C 为事件 A 与事件 B 的**积事件**, 记作 $C = A \cap B$, 或记为 $C = AB$.

如果将事件用集合表示, 则事件 A 与 B 的积事件 C 即为集合 A 与 B 的交, 如图 1.3

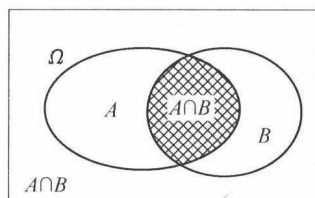


图 1.3

所示.

例如, 设事件 $A = \{1, 3, 4, 7\}$, 事件 $B = \{2, 4, 5, 8\}$, 则 $A \cap B = \{4\}$.

也可以将事件的积推广到有限个或可列个事件的情况.

(1) 用 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ 或 $\bigcap_{i=1}^n A_i$ 表示事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 同时发生;

(2) 用 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots$ 或 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ 表示事件 $A_1, A_2, \dots$ 同时发生.

5. 差事件

设 C 表示“事件 A 发生而事件 B 不发生”这一事件, 则称 C 为 A 与 B 的差事件, 记作 $C = A - B$, 如图 1.4 所示.

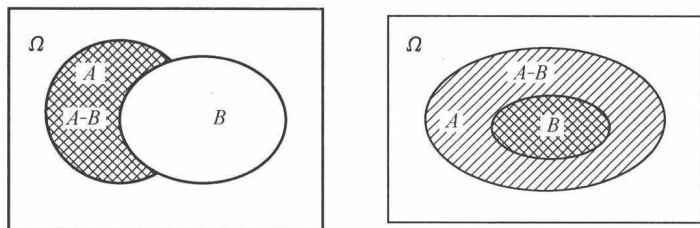


图 1.4

在上面的例子中, 事件 $A = \{1, 3, 4, 7\}$, 事件 $B = \{2, 4, 5, 8\}$, 则 $A - B = \{1, 3, 7\}$.

由差事件的定义可知, 对于任意的事件 A , $A - A = \emptyset$, $A - \emptyset = A$, $A - \Omega = \emptyset$.

6. 互不相容事件

如果两事件 A 与 B 不能同时发生, 则称 A 与 B 是互不相容事件, 或称互斥事件, 此时有 $A \cap B = \emptyset$.

在任意一个随机试验中, 基本事件都是互不相容的. 还可以看出, 事件 A 与 $B - A$ 是互不相容的. 若用集合表示事件, 则 A, B 互不相容, 即为 A 与 B 是不相交的, 如图 1.5 所示.

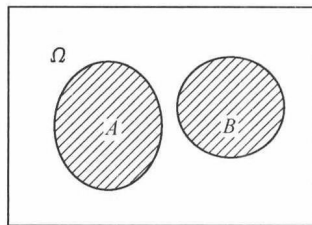


图 1.5

7. 逆事件(对立事件)

在一次试验中, 事件 A 与事件 B 中必然有一个发生, 且仅有一个发生, 即事件 A 与 B 满足关系

$$A \cup B = \Omega, \quad A \cap B = \emptyset$$

则称事件 A 与事件 B 互逆, 又称 A 是 B 的对立事件或逆事件 (B 是 A 的对立事件, 或逆事件), 记成 $A = \bar{B}$ ($B = \bar{A}$). 显然, $\bar{\bar{B}} = \Omega - B$.

8. 事件的运算

可以验证事件间的运算满足如下关系:

- (1) 交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$.
- (2) 结合律: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
- (3) 分配律: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- (4) 重余律: $\overline{\overline{A}} = A$.
- (5) 幂等律: $A \cup A = A, A \cap A = A$.
- (6) 差化积: $A - B = A\overline{B} = A - (AB)$.
- (7) 德·摩根律: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

此公式可推广到有限个与可列个的情况:

$$\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$$

例 1.1 在理学院的学生中任选一名学生,若事件 A 表示被选学生为女生,事件 B 表示该生为二年级学生,事件 C 表示该生是应用数学专业的学生. (1) 叙述 $AB\overline{C}$ 的意义. (2) 在什么条件下 $BC \subset A$ 成立? (3) 在什么条件下 $A \subset B$ 成立?

解 (1) 该生是二年级的女生,但不是应用数学专业的学生.

(2) 二年级应用数学专业的学生都是女生.

(3) 全学院的女生都在二年级.

例 1.2 设 A, B, C 为 3 个事件,用 A, B, C 的运算表示下列事件:

- (1) A 发生而 B 与 C 都不发生: $A\overline{B}\overline{C}$ 或 $A - B - C$ 或 $A - (B \cup C)$.
- (2) A 与 B 都发生而 C 不发生: $AB\overline{C}$ 或 $AB - C$.
- (3) A, B, C 至少有一个发生: $A \cup B \cup C$.
- (4) A, B, C 恰有一个发生: $A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C$.
- (5) A, B, C 都不发生: $\overline{A \cup B \cup C}$ 或 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$.
- (6) A, B, C 至多有一个发生: $A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C \cup \overline{A}\overline{B}\overline{C}$ 或 $\overline{AB \cup BC \cup AC}$.

1.1.4 频率与概率

对于一个事件(除必然事件与不可能事件外)来说,它在一次试验中可能发生,也可能不发生,我们常常希望知道某些事件在一次试验中发生的可能性究竟有多大. 为此首先介绍一个重要的概念——事件的频率.

定义 1.1 (频率定义) 设在 n 次重复试验中,事件 A 发生 n_A 次,则称 n_A 为事件 A 发生的频数,称 $\frac{n_A}{n}$ 为事件 A 发生的频率,记为 $f_n(A)$.

例如,在掷一枚均匀硬币时,可能出现正面,也可能出现反面,预先不能做出确切的判

断,但若硬币质地均匀,则直观上可以判断出现正面与反面的机会应该相等,即在大量的试验中,正面和反面出现的频率应接近于 50%. 为了证明这一点,历史上曾有不少人做过这个试验,表 1.1 给出了部分试验结果.

表 1.1

试验者	抛掷次数 n	出现“正面朝上”的次数 n_A (即频数)	频率 $= \frac{n_A}{n}$
德·摩根	2048	1061	0.518
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12 000	6019	0.5016
皮尔逊	24 000	12 012	0.5005

再如,著名的数学家拉普拉斯对男婴和女婴的出生规律做了详细的研究. 他研究了伦敦、彼得堡、柏林、法国在 10 年间婴儿出生的统计资料,惊人地发现男婴出生数和婴儿总出生数的比值总摆动于同一数值的左右,这个数大约等于 $\frac{22}{43}$. 实际上,多年来,人们在对不同国家、不同地区进行着男女出生率的调查中也发现,男孩出生的频率总围绕着一个常数 p 附近摆动,而这个数字 p 就是拉普拉斯统计出的频率 $\frac{22}{43} = 0.5116$. 这就是关于频率的稳定性.

关于事件的频率,有如下性质:

(1) $0 \leq f_n(A) \leq 1$.

(2) $f_n(\Omega) = 1$.

(3) 若 $A_1, A_2, \dots, A_k$ 是两两互不相容的事件,则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \dots + f_n(A_k)$$

对于随机试验,就其一次具体的试验而言,其结果带有很大的偶然性,似乎没有规律可言. 但是在大量的重复试验中,就可能会呈现一定的规律性. 有些事件发生的可能性大些,有些事件发生的可能性小些,我们将刻画事件发生的可能性大小的数量指标称做该事件发生的概率,并用 $P(A)$ 表示事件 A 发生的概率.

定义 1.2 (概率的统计定义) 当试验次数 n 增大时,事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 将稳定于某个常数 p , 则称 p 为事件 A 发生的概率,记为 $P(A)$.

概率的统计定义的含义为,假定随机试验总是可以在相同的条件下重复进行,在重复试验的次数相当大时,随机事件发生的频率总在某一常数附近摆动,但定义并没有告诉这个常数究竟是多少. 即本定义没有提供求概率的方法,因此不能根据此定义确切地给出任意事件的概率. 但在实际应用时,可以根据此定义,把大量重复试验得到的事件的频率作为事件概率的近似值. 有时试验次数不是很大时,也可以这样使用.

本定义虽然没有提供求概率的方法,但它的重要性是不容忽视的,它给出了一种估算概率及其检验理论是否正确的方法. 对一个事件 A , 当进行了大量重复试验后,若得到的频率与通过某种方法或理论给出的事件 A 的概率相差较大时,我们就可以怀疑得出的概