高等学校教材

线性代数

□ 盛骤　谢式千　于渤　编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

线性代数

Xianxing Daishu

盛骤 谢式千 于渤 编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容简介

本书共7章，内容包括：矩阵，行列式，线性方程组，向量空间，矩阵的特征值与特征向量、实二次型，线性空间与线性变换，用MATLAB软件作线性代数计算。

本书涵盖了大学本科理工科（非数学类专业）线性代数课程的基本要求的全部内容。第7章以示例的形式给出各章中有关计算涉及的公式、命令以及在计算机上的操作过程。读者只需在计算机上输入数据和命令，就能迅速地完成计算，得到结果，十分便捷。

本书可作为高等学校理工科（非数学类专业）各专业线性代数课程的教材，也可作为工程技术人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/盛骤，谢式千，于渤编. --北京：高等教育出版社，2012.8

ISBN 978-7-04-035196-5

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①盛… ②谢… ③于… Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第161762号

策划编辑 李 蕊　责任编辑 李 蕊　封面设计 张 志　版式设计 余 杨
插图绘制 尹文军　责任校对 殷 然　责任印制 韩 刚

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印 刷 高教社（天津）印务有限公司
开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 13.5
字 数 240千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网 址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
http://www.landraco.com.cn
版 次 2012年8月第1版
印 次 2012年8月第1次印刷
定 价 18.90元

物 料 号 35196-00

前　言

线性代数是大学理工科本科学生的一门重要的必修基础课程，本书可用作大学本科理工科(非数学类专业)线性代数课程的教材，也可作为工程技术人员的参考书。

本书内容包括7章：矩阵，行列式，线性方程组，向量空间，矩阵的特征值与特征向量、实二次型，线性空间与线性变换，用MATLAB软件作线性代数计算。

本书内容涵盖了线性代数课程的基本要求。本书在编写时注意适当选材，使教师容易教学，学生容易掌握。例如，我们用逐次递归的方法来定义n阶行列式，而避免用逆序方法定义行列式，使得学生容易理解和掌握。

线性代数课程需要进行大量的计算。我们在第7章中给出了在计算中用到的公式和命令，学生只要在计算机上输入数据和命令，就能迅速地得出计算结果，非常便捷，还大大降低了手算和用计算器计算所产生的错误率。

诚恳地希望读者提出意见。

盛　骤　谢式千　于　渤

2012年7月

目 录

第1章 矩 阵

矩阵是线性代数的主要研究对象之一，在自然科学和工程技术中，它是一个常用的重要数学工具. 它的应用十分广泛.

本章讲述矩阵的概念及运算、分块矩阵以及矩阵的初等变换和初等矩阵.

1.1 矩阵及其运算

1.1.1 矩阵的定义

矩阵产生于线性方程组的求解问题. 我们知道二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \end{cases}$$

当$\frac{a_{11}}{a_{21}}\neq\frac{a_{12}}{a_{22}}$时，方程组有惟一的一组解；

当$\frac{a_{11}}{a_{21}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}\neq\frac{b_1}{b_2}$时，方程组是矛盾方程组，无解；

当$\frac{a_{11}}{a_{21}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{b_1}{b_2}$时，方程组有无数多组解.

讨论表明，上述方程组解的情况与系数 a_{ij} 及常数项 $b_i(i,j=1,2)$ 有关，即与数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{bmatrix}$$

的结构有关. 这就启发我们，对于一般的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1.1.1}$$

（其中方程个数 m 不必等于未知数个数 n）解的情况的研究可归结为对下列数表结构的研究：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}, \tag{1.1.2}$$

于是产生了一个新的数学工具:矩阵.

矩阵的定义如下:

定义 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$ 排成的具有 m 个行、n 个列的长方表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.1.3}$$

称为 **m 行、n 列矩阵**或 **$m\times n$ 矩阵**,简称为**矩阵**.横排叫矩阵的行,竖排叫矩阵的列.矩阵中的数,称为它的**元素**,简称为**元**.

元素 a_{ij} 的两个角标 i,j 表示它处于矩阵的第 i 行与第 j 列交叉点处①.例如 a_{12} 是处于第一行与第二列交叉点处的数.

$m\times n$ 矩阵(1.1.3)常写成 $(a_{ij})_{m\times n}$.在无需指出矩阵的行数和列数时,可简写成 (a_{ij}).也可用一个大写字母表示一个矩阵,如将矩阵(1.1.3)写成 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}$.

例如,$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 8 \end{bmatrix}$,$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 8 \\ 7 & 4 & 9 \end{bmatrix}$,$(2,3,1)$,$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ 分别是 $2\times 3,3\times 3,1\times 3,2\times 1$ 矩阵.

$n\times n$ 矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1.1.4}$$

称为**方阵**,也称为 **n 阶矩阵**或 **n 阶方阵**.方阵既可用 $(a_{ij})_{n\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ 来表示,也可用 $\boldsymbol{A}_n$ 或 $\boldsymbol{A}$ 来表示.

在 n 阶矩阵(1.1.4)中从左上角到右下角的连线称为**主对角线**,元素 a_{ii} $(i=$

① 以后简称 (i,j) 处的元素为 a_{ij}.

$1,2,\cdots,n$)叫做**对角线元素**.

只有一个行与一个列的矩阵$(a)_{1\times1}$约定它就是数 a,即

$$(a)_{1\times1}=a.$$

若(a_{ij})与(b_{ij})都是 $m\times n$ 矩阵,则称它们是**同型的**.例如,$\begin{bmatrix}2&1&5\\3&2&3\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}a&b&c\\a_1&b_1&c_1\end{bmatrix}$是同型的矩阵.

定义 两同型矩阵$(a_{ij})_{m\times n}$与$(b_{ij})_{m\times n}$,当且仅当它们所有相同位置的元素分别相等时,即当且仅当 $m\times n$ 个等式

$$a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$$

成立时,称这两个矩阵是**相等的**,并记作

$$(a_{ij})=(b_{ij}).$$

例如,当且仅当 $a=2,b=1,c=5,a_1=3,b_1=2,c_1=3$ 时有

$$\begin{bmatrix}2&1&5\\3&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b&c\\a_1&b_1&c_1\end{bmatrix}.$$

定义 将 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$的行与列依次互换,得到的 $n\times m$ 矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的**转置矩阵**,记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 或 $\boldsymbol{A}'$,即若 $\boldsymbol{A}$ 具有(1.1.3)的形式,则

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}. \tag{1.1.5}$$

显然

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}.$$

例如,设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&3&1\\5&6&8\end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}2&5\\3&6\\1&8\end{bmatrix}$.

1.1.2 一些常见的矩阵

零矩阵 若 $m\times n$ 矩阵中的元素都等于零,则称它为 $m\times n$ 零矩阵,记作 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$.特别地,在行数、列数能自明时,简记为 $\boldsymbol{O}$,并简称为零矩阵.

实对称矩阵 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$的元素都是实数,并且 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$,即

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{n1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix},$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵.

因为 $\boldsymbol{A}$ 的元素 a_{ij} 就是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的 (j,i) 处的元素，现在 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，故有 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$. 这就是说，在实对称矩阵中，以主对角线为对称轴，位置对称的元两两相等.

例如，$\begin{bmatrix}1 & -5\\ -5 & 7\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1 & -5 & 3\\ -5 & 7 & 0\\ 3 & 0 & 2\end{bmatrix}$分别是2阶和3阶实对称矩阵.

三角形矩阵 若方阵的主对角线下方的元素都等于零，就称它为上三角形矩阵；若方阵的主对角线上方的元素都等于零，就称它为下三角形矩阵.

例如，$\begin{bmatrix}1 & 7 & 4\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 3 & 0\\ 3 & 0 & 2\end{bmatrix}$分别是3阶上三角形矩阵和3阶下三角形矩阵.

对角矩阵 不在主对角线上的元素都等于零的方阵，称为对角矩阵.

例如，$\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$分别是3阶、2阶对角矩阵. 对于对角矩阵不在主对角线上的元素，常略去不写. 例如上述两对角矩阵可分别写成

$$\begin{bmatrix}-2 & & \\ & 2 & \\ & & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4 & \\ & 2\end{bmatrix}.$$

一般地，n 阶对角矩阵

$$\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

常简记为

$$\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n).$$

例如，上述两个对角矩阵又可记作 $\operatorname{diag}(-2,2,1)$，$\operatorname{diag}(4,2)$.

单位矩阵 主对角线上的元素都是1的 n 阶对角矩阵 $\operatorname{diag}(1,1,\cdots,1)$ 称为 n 阶单位矩阵，记作 $\boldsymbol{I}_n$，简记为 $\boldsymbol{I}$.

例如，$\boldsymbol{I}_2=\operatorname{diag}(1,1)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，

$$I_3=\mathrm{diag}(1,1,1)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

n 维列矩阵 $n\times1$ 矩阵称为 n 维列矩阵，常用小写黑体字母表示为

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix},\tag{1.1.6}$$

其中第 i 行的元素 a_i 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的第 i 个分量.

n 维列矩阵是由 n 个有序数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的有序数组，我们也称 n 维列矩阵为 **n 维列向量**.

使用矩阵的转置，可将(1.1.6)式所示的列矩阵 $\boldsymbol{\alpha}$ 表示成 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$.

n 维行矩阵 $1\times n$ 矩阵$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$称为 n 维行矩阵，它也是由 n 个有序数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的有序数组，也称为 **n 维行向量**.

下面，我们来介绍矩阵的代数运算.

1.1.3 数乘矩阵，矩阵的加(减)法

定义 设 λ 是一个数，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 是一个矩阵，则称 $m\times n$ 矩阵(λa_{ij})为数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$的乘积，记作 $\lambda\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}\lambda$，即

$$\lambda\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\lambda=\begin{bmatrix}\lambda a_{11}&\lambda a_{12}&\cdots&\lambda a_{1n}\\\lambda a_{21}&\lambda a_{22}&\cdots&\lambda a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\lambda a_{m1}&\lambda a_{m2}&\cdots&\lambda a_{mn}\end{bmatrix}.$$

定义 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$是同型矩阵，若它们都是 $m\times n$ 矩阵，则称矩阵$(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和，记作 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，即

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a_{11}+b_{11}&a_{12}+b_{12}&\cdots&a_{1n}+b_{1n}\\a_{21}+b_{21}&a_{22}+b_{22}&\cdots&a_{2n}+b_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}+b_{m1}&a_{m2}+b_{m2}&\cdots&a_{mn}+b_{mn}\end{bmatrix}.$$

矩阵的加法及数乘运算称为矩阵的**线性运算**.

对于一个矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，易知恒存在矩阵 $\boldsymbol{B}=(-a_{ij})_{m\times n}$，使 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵，记作 $-\boldsymbol{A}$，即

$$-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-a_{11}&-a_{12}&\cdots&-a_{1n}\\-a_{21}&-a_{22}&\cdots&-a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-a_{m1}&-a_{m2}&\cdots&-a_{mn}\end{bmatrix}.$$

有了负矩阵,我们就将 $\boldsymbol{A}$ 与 $-\boldsymbol{B}$ 之和称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 之差,记作 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$,即

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})=\begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{bmatrix}.$$

注意:矩阵的和、差运算只能在同型矩阵中进行.

例 1 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$,求 $4\boldsymbol{A}$,$-\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$.

解 $$4\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 4\cdot 2 & 4\cdot 1 & 4\cdot 4 \\ 4\cdot(-3) & 4\cdot 0 & 4\cdot 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 & 4 & 16 \\ -12 & 0 & 8 \end{bmatrix},$$

$$-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -2 & -1 & -4 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 2+3 & 1+(-5) & 4+1 \\ -3+2 & 0+(-1) & 2+3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & -4 & 5 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}&=\begin{bmatrix} 3+2 & -5+1 & 1+4 \\ 2+(-3) & -1+0 & 3+2 \end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix} 5 & -4 & 5 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}\\ &=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}&=\begin{bmatrix} 2-3 & 1-(-5) & 4-1 \\ -3-2 & 0-(-1) & 2-3 \end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix} -1 & 6 & 3 \\ -5 & 1 & -1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$ □

零矩阵在矩阵加法中起着数 0 在数的加法中的作用,即

$$\boldsymbol{A}_{m\times n}+\boldsymbol{O}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n}, \quad \boldsymbol{A}_{m\times n}-\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{O}_{m\times n}.$$

若用 λ,μ 表示数,$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{C}$ 表示同型的矩阵.容易验证,以下性质成立:

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$ (交换律);

(2) $\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}$ (结合律);

(3) $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$ (分配律);

(4) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$ (分配律);

(5) $\lambda(\mu\boldsymbol{A})=(\lambda\mu)\boldsymbol{A}$ (结合律);

(6) $(\lambda\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\lambda\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$;

(7) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$.

由结合律，当三个或三个以上矩阵相加时，可不加括号，即

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}.$$

例 2 设 n 维列矩阵 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$，求 $k\boldsymbol{\alpha}$（k 为常数）及 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$.

解 按数乘矩阵及矩阵加法的定义，有

$$k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)^{\mathrm{T}}$$ □

1.1.4 矩阵与矩阵的乘积

先定义行矩阵 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 与列矩阵 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 的乘积为

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n. \tag{1.1.7}$$

(1.1.7)右方常简记为

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i.$$

例如，

$$(2,0,1,3)\begin{bmatrix}1\\2\\3\\1\end{bmatrix}=2\cdot1+0\cdot2+1\cdot3+3\cdot1=8.$$

下面给出两矩阵乘积的定义：

定义 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times p}$，$\boldsymbol{B}=(b_{jk})_{p\times n}$，则称矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ik})_{m\times n}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 的乘积，并记作 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，其中

$$\begin{aligned}c_{ik}&=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{ip})\begin{bmatrix}b_{1k}\\b_{2k}\\\vdots\\b_{pk}\end{bmatrix}\\&=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\cdots+a_{ip}b_{pk}=\sum_{j=1}^{p}a_{ij}b_{jk}\\&\quad(i=1,2,\cdots,m;k=1,2,\cdots,n).\end{aligned} \tag{1.1.8}$$

这就是说 $\boldsymbol{AB}$ 的(i,k)处元素 c_{ik} 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行行矩阵与 $\boldsymbol{B}$ 的第 k 列列矩阵的乘积. 即 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行每一元素与 $\boldsymbol{B}$ 的第 k 列之相应元素乘积之和，如下所示：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i1} \quad \cdots \quad a_{ip}} & & \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix}_{m\times p} \times \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pk} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix}_{p\times n} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & \boxed{c_{ik}} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mk} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}.$$

必须注意，只有在 $\boldsymbol{A}$ 的列数与 $\boldsymbol{B}$ 的行数相等时，乘积 $\boldsymbol{AB}$ 才有意义. 乘积 $\boldsymbol{AB}$ 的运算，称为用 $\boldsymbol{A}$ 左乘 $\boldsymbol{B}$，或称用 $\boldsymbol{B}$ 右乘 $\boldsymbol{A}$.

例 3 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{BA}$，$\boldsymbol{BC}$，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$，$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$ 及 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$.

解

$$\begin{aligned} \boldsymbol{AB} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2\times 3+1\times(-1)+5\times 2 & 2\times 4+1\times 2+5\times 1 \\ 1\times 3+3\times(-1)+2\times 2 & 1\times 4+3\times 2+2\times 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 15 & 15 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{BA} &= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3\times 2+4\times 1 & 3\times 1+4\times 3 & 3\times 5+4\times 2 \\ -1\times 2+2\times 1 & -1\times 1+2\times 3 & -1\times 5+2\times 2 \\ 2\times 2+1\times 1 & 2\times 1+1\times 3 & 2\times 5+1\times 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 & 15 & 23 \\ 0 & 5 & -1 \\ 5 & 5 & 12 \end{bmatrix} \quad (\text{注意:在这里 } \boldsymbol{AB} \text{ 不等于 } \boldsymbol{BA}), \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{BC} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 3\times1+4\times(-1) & 3\times3+4\times(-1) \\ -1\times1+2\times(-1) & -1\times3+2\times(-1) \\ 2\times1+1\times(-1) & 2\times3+1\times(-1) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -3 & -5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 14 & 12 \\ 12 & 21 \end{bmatrix},$$

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 15 & 15 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 30 \\ -8 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -3 & -5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 30 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}$$

(注意:$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$). □

例 4 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,求 $\boldsymbol{AB}$,$\boldsymbol{BA}$.

解

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$ □

注意:一般来说,矩阵乘法是不可交换的.因为(i) $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 未必都有意义(见矩阵乘积定义);(ii) 即使 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 都有意义,它们可能不是同型的(见例3);(iii) 即使 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 是同型的,一般地,$\boldsymbol{AB}$ 也不一定等于 $\boldsymbol{BA}$(见例 4).其中(iii)是应该特别注意的一种情形.

矩阵乘法不满足消去律,即若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$,且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$,但不一定有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

例 5

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_1 a_{12} & \cdots & \lambda_1 a_{1n} \\ \lambda_2 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \cdots & \lambda_2 a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_m a_{m1} & \lambda_m a_{m2} & \cdots & \lambda_m a_{mn} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda_1 b_1 & & & \\ & \lambda_2 b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m b_m \end{bmatrix}.$$ □

矩阵的乘法具有以下的性质(设所述运算都有意义)：

(1) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$ (分配律)；

$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$ (分配律)；

(2) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$ (结合律)；

(3) $\lambda(\boldsymbol{AB})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$，$\lambda$ 是常数；

(4) $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

下面只就(2)加以证明.

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times p}$，$\boldsymbol{B}=(b_{jk})_{p\times q}$，$\boldsymbol{C}=(c_{kl})_{q\times n}$，此时 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$ 都有意义. 它们都是 $m\times n$ 矩阵. 下面来证明 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$ 两个矩阵第 i 行第 k 列($i=1,2,\cdots,m,k=1,2,\cdots,n$)的元素相同. 我们采用记号 $\{\boldsymbol{A}\}_{ik}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 k 列的元素. 即有

$$\{(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}\}_{ik}=\sum_{j=1}^{q}\{\boldsymbol{AB}\}_{ij}\{\boldsymbol{C}\}_{jk}=\sum_{j=1}^{q}\Big(\sum_{l=1}^{p}a_{il}b_{lj}\Big)c_{jk}=\sum_{j=1}^{q}\sum_{l=1}^{p}a_{il}b_{lj}c_{jk},$$

$$\{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})\}_{ik}=\sum_{l=1}^{p}\{\boldsymbol{A}\}_{il}\{\boldsymbol{BC}\}_{lk}=\sum_{l=1}^{p}a_{il}\Big(\sum_{j=1}^{q}b_{lj}c_{jk}\Big)=\sum_{l=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}a_{il}b_{lj}c_{jk}.$$

由于二重连加号可以交换次序，所以上两式右端相等，即得

$\{(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}\}_{ik}=\{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})\}_{ik}(i=1,2,\cdots,m,k=1,2,\cdots,n)$，故得 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$. □

例 6 设矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 如例 3，验证等式 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

解 在例 3 中已求得 $\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}15&15\\4&12\end{bmatrix}$，故

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}15&4\\15&12\end{bmatrix},$$

又

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}2&1\\1&3\\5&2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}3&-1&2\\4&2&1\end{bmatrix}.$$

故

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}3\times2+(-1)\times1+2\times5 & 3\times1+(-1)\times3+2\times2\\4\times2+2\times1+1\times5 & 4\times1+2\times3+1\times2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}15&4\\15&12\end{bmatrix}=(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}.$$ □

容易验证，单位矩阵在矩阵乘法中起着数 1 在数的乘法中的作用，即有

$$\boldsymbol{I}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n},\quad \boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{A}_{m\times n},$$

$$\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{A}_{n\times n}=\boldsymbol{A}_{n\times n}\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{A}_{n\times n},$$

矩阵为方阵时，也可作乘幂的运算. 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_{n\times n}$，$p$ 为一正整数，则矩阵

$$\boldsymbol{A}^p=\underbrace{\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}\cdots\boldsymbol{A}}_{p\text{个}}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的 p 次幂. 定义 $\boldsymbol{A}$ 的零次幂 $\boldsymbol{A}^0$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的同阶单位矩阵 $\boldsymbol{I}$.

容易验证，若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_{n\times n}$，$p,q$ 都是非负整数，则有

$$\boldsymbol{A}^p\boldsymbol{A}^q=\boldsymbol{A}^{p+q},\quad (\boldsymbol{A}^p)^q=\boldsymbol{A}^{pq}.$$

例 7 (i) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -1\\0 & 2\end{bmatrix}$，则有

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}2 & -1\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -4\\0 & 4\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4 & -4\\0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & -12\\0 & 8\end{bmatrix}.$$

(ii) 设 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，$p$ 为正整数，则有

$$\boldsymbol{A}^p=\mathrm{diag}(\lambda_1^p,\lambda_2^p,\cdots,\lambda_n^p).$$ □

1.1.5 逆矩阵

以上我们定义了矩阵的加法和它的逆运算——减法. 那么，对于矩阵的乘法是否也可以定义它的逆运算？对于数 $a(a\neq 0)$，其倒数 $a^{-1}=1/a$. 倒数 a^{-1} 满足关系式 $a^{-1}a=aa^{-1}=1$. 有了 a 的倒数 a^{-1}，那么数 b 除以 a 就是 $b\times\dfrac{1}{a}$，这样就有了数的除法运算. 类似地，对于矩阵 $\boldsymbol{A}$，我们定义 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵如下：

定义 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，若存在 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$，使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I},\tag{1.1.9}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 是**可逆矩阵**或**非奇异矩阵**. 而 $\boldsymbol{B}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的**逆矩阵**，简称**逆阵**. 若不存在这样的矩阵 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}$ 称为**不可逆矩阵**或**奇异矩阵**.

先来证明：若 $\boldsymbol{A}$ 有逆阵，则逆阵是惟一的.

为此，设 $\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的逆阵，按逆阵的定义有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I},\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I},$$

因而

$$\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{I}\boldsymbol{B}_1=(\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_1)=\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{B}_2,$$

即逆阵是惟一的.

我们将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆阵(若存在的话)记为 $\boldsymbol{A}^{-1}$，于是(1.1.9)可改写成

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}.\tag{1.1.10}$$

不是任何 n 阶矩阵都有逆阵. 例如 $\boldsymbol{O}_{n\times n}$ 就没有逆阵.