应用高等数学

（上册）

白淑岩　主编

清华大学出版社

应用高等数学

（上册）

白淑岩　主编

清华大学出版社
北　京

内容简介

本教材分上、下两册，共11章内容。上册主要内容有：函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，积分及其应用，二元函数微积分简介，常微分方程；下册主要内容有：拉普拉斯变换，无穷级数，线性代数初步，向量代数与空间解析几何，概率论与数理统计初步。每节后面都配有一定数量的习题和综合练习题，并在每册书末附有习题参考答案。

本教材在保持数学体系基本完整的前提下，淡化理论推导，注重数学应用。例题注重讲述解题思路及方法，突出直观教学；习题配备难易适当，深入浅出；编写起点适中，内容层次分明，方便选择性教学和学生自学。

本教材可作为高职高专工科各专业、经济与管理类专业的高等数学教材，也可作为高职院校专升本辅导教材。

图书在版编目（CIP）数据

应用高等数学．上册／白淑岩主编．--北京：清华大学出版社，2012.8
ISBN 978-7-302-28863-3

Ⅰ．①应…　Ⅱ．①白…　Ⅲ．①高等数学－教材　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第105118号

责任编辑：石　磊　赵从棉
封面设计：傅瑞学
责任校对：王淑云
责任印制：张雪娇

出版发行：清华大学出版社
　网　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　地　址：北京清华大学学研大厦A座　**邮　编**：100084
　社 总 机：010-62770175　**邮　购**：010-62786544
　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：保定市中画美凯印刷有限公司
经　销：全国新华书店
开　本：185mm×230mm　**印　张**：12.75　**字　数**：273千字
版　次：2012年8月第1版　**印　次**：2012年8月第1次印刷
印　数：1～3000
定　价：25.00元

产品编号：045990-01

前 言

高等数学是高职高专教育的一门重要基础课,该课程不仅为学生后继课程的学习提供必备的数学工具,而且是培养高职学生数学素养和理性思维能力的重要途径. 本教材以教育部《关于全面提高高等职业教育教学质量的若干意见》和教育部新修订的《高职高专教育高等数学教学基本要求》为指导,充分研究当前我国高职教育现状,坚持以"应用为目的,必须够用为度,学有所需,学有所用"的定位原则,培养高职院校学生可持续发展的职业能力和迁移能力,突出高等数学的应用性.

本教材力求体现如下特点:

定位准确,针对性强. 以高职高专院校的培养目标为依据,在体现数学思想为主的前提下删繁就简,深入浅出,既注重高等数学的基础性,又适当保持学科的科学性与系统性,同时更注重其工具性.

优化教材内容,突出应用性. 考虑到高职高专不同专业对高等数学的需求不同、课时分配不同等实际原因,内容编排上去除繁冗,淡化理论推导,体现数学"来源于实践,服务于实践"的思想,将数学知识与实际案例充分融合,有效缩短数学与专业知识的距离,使学生对抽象的数学知识的背景理解更深刻,应用更有效.

引入先进的数学软件,使学生计算手段现代化. 注重培养学生用计算机和数学软件进行计算的实际能力,让学生充分认知现代工具的快捷性和实用性,从而更有效地用数学软件求解数学模型以及解决实际工作中的复杂计算问题.

提高了学生分析问题、解决问题的能力. 由于摒弃了传统的对数学知识系统进行的盘点式教学方法,以应用为目的将实际案例与数学知识相融合,使学生加深了对数学概念与方法的理解,提高了用数学知识分析和处理实际问题的能力. 又由于学生学会了用数学软件进行计算,从而提高了学生解决复杂实际问题的能力.

本教材可作为高职高专工科各专业、经济与管理类专业的高等数学教材,也可作为高职院校专升本辅导教材.

鉴于编者水平有限,书中不当之处在所难免,敬请读者与同行指正.

编 者

2012 年 4 月

目录

第 1 章　函数、极限与连续

微积分是高等数学的核心内容. 函数是微积分的主要研究对象,极限方法是微积分的基本方法. 本章在复习和加深函数的相关知识的基础上,着重介绍函数的极限和函数连续性的概念、性质及其运算.

1.1　函数

客观世界中的事物都是相互依赖、相互变化、相互联系着的,这种关系在数学上的表现形式之一就是所谓的函数关系.

1.1.1　函数的概念

1. 函数的定义

定义 1.1　设 D 是一个非空实数集,如果对于每一个 $x\in D$,按照一定的对应关系 f,都有唯一确定的 y 值与之对应,则称变量 y 为变量 x 的函数,记为

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

其中,x 称为自变量,y 称为函数(因变量). 自变量的取值范围 D 称为函数的**定义域**;与 x 对应的 y 值称为 x 处的**函数值**,如 x_0 处的函数值记为 y_0 或 $f(x_0)$. 全体函数值的集合称为函数的**值域**,记为 M.

2. 函数的两个要素

由函数的定义 1.1 可知,定义域和对应关系是函数的两个要素. 两个函数相同的充分必要条件是其定义域与对应关系分别相同. 例如,函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$与 $y=x+1$,它们的定义域不同,所以是不同的函数;函数 $y=\sqrt[3]{x^3}$和 $s=t$,它们的定义域和对应关系分别相同,所以是同一个函数;函数 $y=x$ 和 $y=\sqrt{x^2}$,它们的定义域相同,都是实数集$\mathbb{R}$,但因为

$$y=\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases},$$

显然,只有当 $x\geqslant 0$ 时,它们的对应关系才相同,所以这是两个不同的函数.

需要指出的是，有时在定义域内不同的区间上函数关系是用不同的解析式来表示的，这样的函数称为**分段函数**. 分段函数是定义域上的一个函数，不是多个函数. 例如，

$$y=\begin{cases}x+1, & x<-1\\ 0, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ x, & 0<x<3\end{cases}$$

是一个分段函数，其定义域是$(-\infty,3)$；且 $f(-1)=0$ ，$f(-2)=-2+1=-1$ ，$f(2)=2$.

在表示函数的定义域或值域时，最常用的是区间（闭区间$[a,\ b]$、开区间$(a,\ b)$、半开半闭区间$[a,\ b)$及$(a,\ b]$，无限区间$[a,\ +\infty)$，$(a,\ +\infty)$，$(-\infty,\ b]$），另一个是邻域. 通常称$(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ $(\delta>0)$为点 x_0 的 δ **邻域**，记为 $U(x_0,\delta)$，它实际上是以 x_0 为中心、长度为 2δ 的开区间. 在 $U(x_0,\delta)$中去掉中心点 x_0 后，称为点 x_0 的**去心（空心）邻域**，记为 $\mathring{U}(x_0,\delta)$，即 $\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$.

函数的表示法一般有：解析法（又称公式法）、图像法、列表法、语言叙述法.

在中学研究过的函数的基本性态，包括单调性、奇偶性、周期性、有界性等，这里不再详述.

3. 函数定义域的确定

求函数的定义域一般有以下几种情形：

(1) 分式的分母不等于 0；

(2) 偶次方根下的式子非负；

(3) 取对数运算的式子大于 0；

(4) 取正切运算的式子不等于 $k\pi+\dfrac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$；

(5) 取余切运算的式子不等于 $k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$；

(6) 取反正弦、反余弦运算的式子绝对值不大于 1.

如果不考虑函数关系的实际意义，那么函数的定义域就是使得函数解析式有意义的全体数值；如果考虑实际意义，那么定义域还需满足实际要求.

例 1 求函数 $f(x)=\dfrac{4}{x^2-1}-\sqrt{2x-1}+\lg(3-x)$的定义域.

解 要使函数有意义，须

$$\begin{cases}x^2-1\neq 0\\ 2x-1\geqslant 0,\\ 3-x>0\end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases}x\neq\pm 1\\ x\geqslant\dfrac{1}{2},\\ x<3\end{cases}$$

所以函数的定义域为$\left[\dfrac{1}{2},\ 1\right)\cup(1,\ 3)$.

例 2 将直径为 d 的圆木锯成截面为矩形的木料(如图 1-1 所示),求矩形截面两条边之间的函数关系及定义域.

解 矩形截面两条边长分别为 x 和 y,则有

$$x^2+y^2=d^2,$$

解得

$$y=\pm\sqrt{d^2-x^2}.$$

根据实际意义知,所求函数关系为 $y=\sqrt{d^2-x^2}$,定义域为 $D=(0,\ d)$.

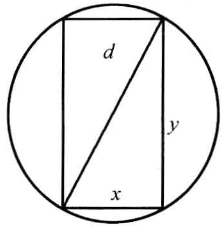

图 1-1

1.1.2 反函数

先看一个实例.

例 3 根据国务院发展中心 2000 年发表的《未来 20 年我国发展前景分析》判断,未来 20 年,我国国内生产总值(GDP)年平均增长率为 7.3%.

(1) 2000 年我国国内生产总值是 10 835 亿美元,按照这样的经济增长速度,那么到 2020 年可望达到多少亿美元?

(2) 实际上,几十年来,我国国内生产总值(GDP)年平均增长率是 9.6%,2000 年美国国内生产总值是 98 820 亿美元,经过多少年后,我国国内生产总值可望达到美国 2000 年的相应水平?

解 在中学时学习过,若设原有量为 y_0,平均增长率为 p,则经过时间 x 后的总量 y 为

$$y=y_0(1+p)^x.$$

(1) 当 $y_0=10\,835$, $p=0.073$, $x=20$ 时,有

$$y=10\,835(1+0.073)^{20},$$

解得

$$y=44\,350.4\text{ 亿美元}.$$

就是说,到 2020 年我国国内生产总值比 2000 年翻两番.

(2) 当 $y_0=10\,835$, $p=0.096$, $y=98\,820$ 时,有

$$98\,820=10\,835(1+0.096)^x,$$

即

$$\frac{98\,820}{10\,835}=1.096^x,$$

取常用对数,得

$$x=\frac{\lg 98\,820-\lg 10\,835}{\lg 1.096},$$

计算得

$$x=24\text{ 年}.$$

就是说，到 2024 年我国国内生产总值可望达到美国 2000 年的水平. 事实上，我国最近几年的年增长率在 10%以上，按照这个经济发展速度，只要到 2023 年就可达到美国 2000 年的水平.

上述(1)、(2)两个问题给我们提供了反函数计算的实例. 问题(1)是在关系式 $y=y_0(1+p)^x$ 中已知 x 求 y，而问题(2)是在该关系式中已知 y 求 x.

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 M. 如果对于 y 在 M 中的每一个值，由关系式 $y=f(x)$ 可以确定 D 中唯一的 x 与之对应，那么 x 就是 y 的函数，记为

$$x=f^{-1}(y),\quad y\in M,\tag{1}$$

其中，y 是自变量，x 是函数，定义域为 M，值域为 D. 函数 $x=f^{-1}(y)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的**反函数**. 习惯上我们总是把自变量记为 x，函数记为 y，所以常把式(1)中的 x，y 对调. 这样 $y=f(x)$ 的反函数(1)通常写为

$$y=f^{-1}(x),\quad x\in M.$$

如在例 3 中，由 $y=y_0(1+p)^x$ 解得 $x=\log_{1+p}y/y_0$，即 $x=\dfrac{\lg y-\lg y_0}{\lg(1+p)}$. 将 x，y 对调得函数 $y=y_0(1+p)^x$ 的反函数为

$$y=\frac{\lg x-\lg y_0}{\lg(1+p)}.$$

可以证明，严格单调的函数必有反函数，且反函数也是严格单调的.

例 4 求函数 $y=\mathrm{e}^x$ 的反函数，并在同一坐标系中画出 $y=\mathrm{e}^x$ 与其反函数的图像.

解 函数 $y=\mathrm{e}^x$ 的定义域为 $x\in(-\infty,+\infty)$，值域为 $y\in(0,+\infty)$.

由 $y=\mathrm{e}^x$ 解得 $x=\ln y$，所以 $y=\mathrm{e}^x$ 的反函数为 $y=\ln x$，定义域为 $x\in(0,+\infty)$，值域为 $y\in(-\infty,+\infty)$.

如图 1-2 所示，$y=\mathrm{e}^x$ 与其反函数 $y=\ln x$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

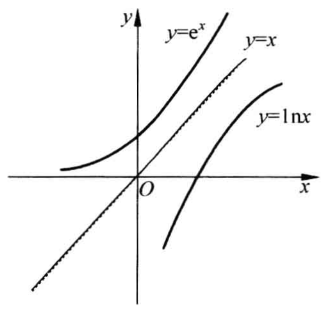

图 1-2

一般地，反函数有以下几个性质：

(1) 函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数.

(2) $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域和值域对调.

(3) $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

值得注意的是，一个函数在其定义域内可能没有反函数，但在定义域内的某个区间上，却可能有反函数. 例如，函数 $y=x^2$，对于同一个 y，有两个不同的值 $\sqrt{y}$，$-\sqrt{y}$ 与之对应，因此 $y=x^2$ 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内没有反函数. 但当限定 $x\in[0,+\infty)$ 时，$y=x^2$ 就有反函数 $y=\sqrt{x}$；再如，正弦函数 $y=\sin x$ 在定义域 $(-\infty,$

$+\infty)$内没有反函数，但限定在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$、$\left[\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right]$等区间上则有反函数.

下面介绍**反三角函数**的概念、性质和图形(图 1-3).

正弦函数 $y=\sin x$ 在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的反函数称为**反正弦函数**，记为 $y=\arcsin x$，其定义域为$[-1,1]$，值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，在定义域内为单增、有界的奇函数(图 1-3(a))；

余弦函数 $y=\cos x$ 在$[0,\pi]$上的反函数称为**反余弦函数**，记为 $y=\arccos x$，其定义域为$[-1,1]$，值域为$[0,\pi]$，在定义域内为单减、有界的函数(图 1-3(b))；

正切函数 $y=\tan x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内的反函数称为**反正切函数**，记为 $y=\arctan x$，其定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，在定义域内为单增、有界的奇函数(图 1-3(c))；

余切函数 $y=\cot x$ 在$(0,\pi)$内的反函数称为**反余切函数**，记为 $y=\operatorname{arccot} x$，其定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,\pi)$，在定义域内为单减、有界的函数(图 1-3(d)).

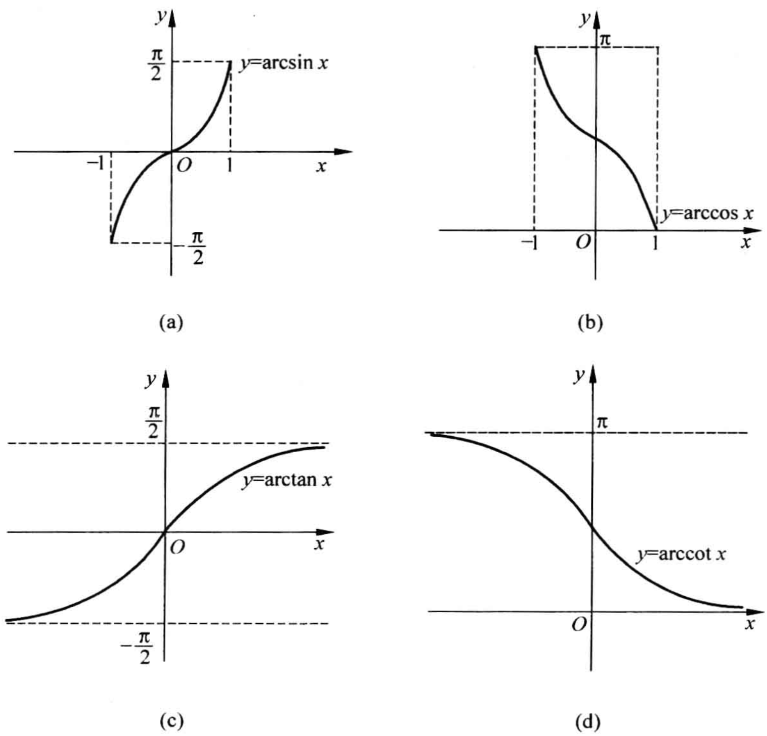

图 1-3

1.1.3 初等函数

1. 基本初等函数

通常把常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**.

基本初等函数的定义域、值域、图形及性质见附表.

2. 复合函数

在实际问题中，有时两个变量之间的联系并不是直接的，而是通过另一个变量而联系起来的. 如出租车的车费 R 是里程 s 的函数，而里程 s 又是时间 t 的函数，因此车费 R 通过 s 也是时间 t 的函数，称为复合函数.

定义 1.3 设函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，如果对于 x 所对应的 u 值，函数 $y=f(u)$ 有定义，则 y 通过 u 的联系也是 x 的函数，称为由 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 构成的**复合函数**，记为

$$y=f[\varphi(x)],$$

其中，x 是自变量，u 称为**中间变量**.

例如，由 $y=\sqrt{u}$，$u=1-x^2$ 复合而成的复合函数是 $y=\sqrt{1-x^2}$，其定义域是 $[-1,1]$.

应该指出，不是任意两个函数都可以复合成一个复合函数. 例如，函数 $y=\arcsin u$ 与 $u=x^2+2$ 就不能复合成一个复合函数. 这是因为函数 $u=x^2+2$ 的定义域内任何 x 值，都不能使函数 $y=\arcsin u$ 有意义. 而且，函数的复合可以是多重的，也就是说一个复合函数可以有多个中间变量.

利用复合函数的定义不仅可以将若干个简单的函数复合成一个函数，还可以把一个较复杂的函数分解成几个简单的函数，这对以后掌握微积分的运算是很重要的.

例 5 (1) $y=\ln(2+\cos x)$ 由 $y=\ln u$，$u=2+\cos x$ 复合而成；

(2) $y=(\arctan\sqrt{x})^2$ 由 $y=u^2$，$u=\arctan v$，$v=\sqrt{x}$ 复合而成.

注 中间变量的设置以保证每层函数能成为基本初等函数或简单函数的形式为准.

3. 初等函数

定义 1.4 由基本初等函数经过有限次四则运算及复合运算而得到的能用一个数学式子表示的函数称为**初等函数**.

例如，$y=\log_a\cos x^2$，$y=\dfrac{1+x+e^x}{\sqrt{1-x^2}}$，$y=e^{-x}+\dfrac{\tan 3x}{x^2}$ 都是初等函数，而 $y=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots$ 不是初等函数.

1.1.4 常用的经济函数

1. 成本函数

某产品的**总成本**是指生产一定数量的产品所需的费用（劳动力、原料、设备等）. 一般来

说，总成本＝变动成本＋固定成本.其中**固定成本**是指不随产量的变化而变动的费用，如厂房、机器设备等费用，用 C_1 表示；**变动成本**是指随产量的变化而变动的费用，如原材料费、工人的工资支付费等，用 $C_2(q)$ 表示，其中 q 表示产量.这样，总成本 $C(q)=C_1+C_2(q)$.

平均成本是指生产一定量产品时，平均每单位产品的成本.平均成本函数为

$$\overline{C}=\overline{C}(q)=\frac{C(q)}{q}=\frac{C_1}{q}+\frac{C_2(q)}{q}.$$

2. 需求函数与供给函数

(1) **需求函数**　消费者对产品的需求随价格的波动而波动.需求量 Q 关于价格 p 构成的函数关系称为**需求函数**，记为 $Q(p)$.一般地，需求是随价格的提高而减少的，所以需求函数一般是价格的减函数，例如 $Q(p)=\frac{1}{p}$，$Q(p)=2-p$ 等.

(2) **供给函数**　对某种产品的供给量，也随价格的变化而变化.供给量 S 关于价格 p 构成的函数关系称为**供给函数**，记为 $S=S(p)$.

供给函数与需求函数相反，它一般是随价格的增加而增加的.当然也有例外情况发生，例如，珍贵文物和古董等价格上升后，人们会把存货拿出来销售，从而供给量增加.而当价格上升到一定限度后，人们会以为它们可能更贵重，就不会再提供到市场上去出售，因而价格虽然上升，供给量反而减少.

例 6　设某种品牌的汽车价格为 20 万元/辆时，销量为 10 000 辆，已知汽车价格每提高 2 万元，需求量就减少 2000 辆，求需求函数.

解　设 Q 为汽车的需求量，p 为价格，由题意

$$Q=10\,000-\frac{p-20}{2}\times 2000=30\,000-1000p=1000(30-p),$$

由此可知，汽车的价格 p 不能等于或超过 30 万元，否则就没有销路了.

例 7　某地区某天对鸡蛋的需求函数为 $Q=65-9p$，供给函数为 $S=5p-5$（单位：Q 为千克，p 为元/千克）.

(1) 找出均衡价格，并求出此时的供给量与需求量；

(2) 在同一坐标系内画出供给函数曲线与需求函数曲线.

解　(1) 因为均衡价格就是供给量与需求量相等时的价格，故由 $65-9p=5p-5$ 解得 $p=5$（元/千克），此时供给量＝需求量＝20（千克）.

(2) 供给函数曲线用 AB 表示，需求函数曲线用 CD 表示，显然二者交点 E 对应的横坐标 p，就是所求的均衡价格，如图 1-4 所示.

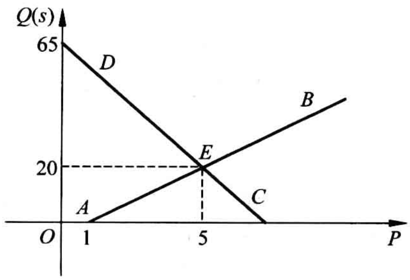

图　1-4