



TEACHING MATERIALS FOR COLLEGE STUDENTS

高等学校教材

高等电磁理论

GAO DENG DIAN CI LI LUN

关继腾 编

中国石油大学出版社



TEACHING MATERIALS FOR COLLEGE STUDENTS

高等学校教材

高等电磁理论

关继腾 编

中国石油大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等电磁理论/关继腾编. —东营:中国石油大学出版社,2010.1

ISBN 978-7-5636-2978-7

I. 高… II. 关… III. 电磁学—高等学校—教材
IV. O441

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 006745 号

中国石油大学(华东)规划教材

书 名: 高等电磁理论

作 者: 关继腾

责任编辑: 高 颖(电话 0532—86981531)

封面设计: 九天设计

出 版 者: 中国石油大学出版社(山东 东营 邮编 257061)

网 址: <http://www.uppbook.com.cn>

电子信箱: shiyoujiaoyu@126.com

印 刷 者: 山东省东营市新华印刷厂

发 行 者: 中国石油大学出版社(电话 0532—86981532,0546—8392791)

开 本: 180×235 印张: 12.25 字数: 246 千字

版 次: 2010 年 2 月第 1 版第 1 次印刷

定 价: 18.50 元

内 容 简 介

本书系统地阐述了导电媒质中电磁场的基本理论,主要包括:电磁场的基本方程、稳恒电流场的边值问题、导电媒质中亥姆霍兹方程的边值问题、层状媒质中偶极子源的电磁场、导电媒质中瞬变电磁场理论。本书内容系统完整,论述规范统一、循序渐进,而且每章后面都配有一定数量的习题,便于读者自学。

本书可作为高等学校地球探测与信息技术、电磁场与微波技术专业以及相关专业的研究生和本科高年级学生的教材,也可供有关科研和工程技术人员参考。

前言

Foreword

本书在本科课程“电磁场理论”和“电磁场与电磁波”的基础上,系统地阐述了导电媒质中电磁场的基本理论,目的是使硕士研究生和本科高年级学生能够顺利地阅读有关的现代文献及从事应用基础性研究。

电磁场理论经历了一个多世纪的发展,对科学和技术的进步以及人类生活方式的改变起到了巨大的作用。电磁场的应用领域非常广阔,形成了电磁场理论浩繁、深厚而又显得零乱的特点。本书对导电媒质中的电磁场与电磁波的属性进行了比较深入的论述。导电媒质中的电磁场与电磁波理论主要包括空间域、时间域、频率域范围内的电磁场与电磁波的变化规律,主要涉及的应用领域如下:

(1) 资源信息探测技术。主要包括海洋资源、油气资源、矿产资源和水资源的快速调查与探测方法,旨在解决资源探测中的复杂问题,主要涉及电磁波在非均匀媒质中的传播理论。

(2) 地下工程探测与环境电磁探测技术。将探测技术与地下工程勘查结合起来,研究地面探测和地下勘查一体化新技术。主要包括水文探测、岩土工程、煤田地质、地质环境保护、考古与遗迹保护、城市地下环境、地下管线管网的测漏测堵仪器、地下工程质量检测系统、地下水污染与固体废料监测系统、地质灾害监测技术等。

(3) 电磁兼容技术。主要包括电磁兼容、频谱管理与监测、城市电磁环境监测。

(4) 超低频电磁波理论与技术。主要包括地球深部与海洋电磁探测技术、海底大地电磁探测与电磁成像技术。

(5) 地下电磁信息传输技术。主要包括地电电磁波理论、深地层(包括深水潜艇)通信技术、井下复杂环境中(油气井随钻测量)信息无线传输

技术、授时技术、水下导航电磁波理论、矿井巷道通信与井下事故呼救信息传输技术等。

(6) 地电学理论与技术。主要包括地电场论、海洋中电流场理论、大地电磁理论、地球内部电磁理论和震源电磁辐射理论与技术。

(7) 航空电磁方法与技术。主要包括航空时间域电磁法、近地空间环境遥感探测技术。

(8) 地电化学理论与技术。主要包括激发极化理论与技术、自然电场方法、充电法、复电阻率法、震电勘探理论与技术。

(9) 生物电磁波理论与技术。主要包括电磁波的医疗应用和辐射防护技术。

本书共分7章,系统地论述了导电媒质中电磁场与电磁波的基本理论。考虑到学生的实际学习能力与认知规律,本书力求细化基础、体系统一、符号规范,以便于学生自学;力求内容的系统性、完整性、严谨性和正确性;力求与地球物理探测理论及工程技术协调一致。为了培养和提高学生分析和解决问题的能力,每章都附有一定数量的习题。

本书采用国际单位制(SI),物理量的名称及符号遵循国家标准和规范。例如,以白斜体 A 表示标量,以黑斜体 A 表示矢量;正弦电磁场的时间因子采用 $e^{i\omega t}$,以 A 表示有效值;以 $A(r, t)$ 表示与空间及时间有关的瞬时矢量,以 $A(r)$ 表示仅与空间有关的复矢量。

本书适用于地球探测与信息技术、无线电物理、电磁场与微波技术等专业的硕士研究生学习。

在本书的酝酿与编写过程中,参阅了许多专著、教材和工具书,并且引用了其中的部分内容,已在本书的参考文献中列出,谨在此一并向这些文献的作者们表示感谢。

本书的编写和出版得到了中国石油大学(华东)规划教材基金的资助,特此感谢!

由于作者水平有限,书中难免有不妥与错误之处,敬请阅读本书的广大教师和读者批评指正。

作者

2009年9月

目 录

Contents

第 1 章 电磁场的基本方程	1
§ 1.1 麦克斯韦方程	1
§ 1.2 媒质的本构方程	4
§ 1.3 边值关系	6
§ 1.4 波动方程	6
§ 1.5 位函数及其波动方程	8
§ 1.6 赫兹位函数.....	11
习题 1	13
第 2 章 静电场的边值问题	16
§ 2.1 泊松方程边值问题的积分公式.....	16
§ 2.2 标量格林函数.....	18
§ 2.3 分离变量法及正交函数展开.....	25
§ 2.4 格林函数的正交展开.....	40
§ 2.5 泊松方程的正交函数展开求解.....	51
习题 2	57
第 3 章 稳恒电流场的边值问题	59
§ 3.1 水平层状媒质中的点电流源产生的场.....	59
§ 3.2 各向异性层状媒质中的点电流源产生的场.....	64
§ 3.3 多层导电媒质中的点电流源产生的场.....	69
§ 3.4 多层同轴导电圆柱体中的点电流源产生的场.....	72
习题 3	75
第 4 章 导电媒质中的平面电磁波	79
§ 4.1 平面电磁波在均匀导电媒质中的传播.....	79
§ 4.2 均匀平面波在两种导电媒质分界面上的反射和折射.....	83
§ 4.3 平面电磁波在多层导电媒质中的反射与阻抗变换关系.....	91
习题 4	96

第 5 章 亥姆霍兹方程的边值问题	100
§ 5.1 正交曲线坐标系中矢量亥姆霍兹方程的求解	100
§ 5.2 标量亥姆霍兹方程的分离变量法	107
§ 5.3 有界空间的标量格林函数	122
§ 5.4 电磁波的散射	129
§ 5.5 电磁波的衍射	133
习题 5	138
第 6 章 层状媒质中偶极子源的电磁场	140
§ 6.1 电磁场的矢量位理论	140
§ 6.2 均匀导电媒质中偶极子源的电磁场	145
§ 6.3 层状媒质中电磁场问题的求解方法	149
§ 6.4 均匀半空间中垂直偶极子源的电磁场	152
§ 6.5 均匀半空间中水平偶极子源的电磁场	155
§ 6.6 三层媒质中垂直偶极子源的电磁场	163
§ 6.7 多层媒质中垂直磁偶极子源的电磁场	168
§ 6.8 多层同轴媒质轴线上轴向偶极子源的电磁场	171
习题 6	173
第 7 章 导电媒质中的瞬变电磁场理论	176
§ 7.1 瞬变电磁场的特点和分析方法	176
§ 7.2 无限大导电媒质空间中典型场源的时域解	180
§ 7.3 半空间中垂直磁偶极子源的阶跃响应	184
习题 7	186
参考文献	187

第1章 电磁场的基本方程

现代宏观电磁场理论建立在坚实的科学实验和工程实践的基础上,具有完美的体系和极为丰富的内容。它不仅概括了通过电磁现象已经发现的所有定律,而且还可以通过一系列逻辑推论导出为实验所证实的新的结果。麦克斯韦方程是电磁理论的基本方程,也是分析、计算电磁问题的出发点。本章简要叙述麦克斯韦方程、媒质的电磁特性、边值关系以及波动方程和位函数等电磁理论的基本概念。

§ 1.1 麦克斯韦方程

一个多世纪前,麦克斯韦集电磁学研究成果之大成,创立了后来以其命名的描述宏观电磁场运动规律的方程组,从而奠定了宏观电磁场的理论基础。经过无数科学实验和工程实践,证实了宏观电磁现象的确符合麦克斯韦方程组的描述。麦克斯韦方程是解决电磁场问题的总的出发点。

1.1.1 基本的麦克斯韦方程

基本的麦克斯韦方程是与时间有关的电磁场量所满足的方程,是麦克斯韦方程的瞬时形式,也称为时域麦克斯韦方程。时域麦克斯韦方程的积分形式如下:

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \left(\mathbf{J}_e + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (1-1)$$

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (1-2)$$

$$\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1-3)$$

$$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \rho_e dV \quad (1-4)$$

式中, \mathbf{E} 为电场强度, V/m ; \mathbf{H} 为磁场强度, A/m ; \mathbf{D} 为电位移矢量, C/m^2 ; \mathbf{B} 为磁感应强度, T ; \mathbf{J}_e 为电流密度, A/m^2 ; ρ_e 为电荷密度, C/m^3 。

上述这组方程描述了任一空间区域的场源与该空间区域的边界上场的关系。时域麦克斯韦方程的微分形式为:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_e + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1-5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1-6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1-7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e \quad (1-8)$$

微分形式的麦克斯韦方程描述了空间任一点上场与场源的时空变化关系。由于这组方程中含有对场量的微分,因此它只适合于媒质物理性质不发生突变的区域。

1.1.2 广义的麦克斯韦方程

电荷和电流称为电型源,电荷产生电场,电荷运动形成电流,电流产生磁场。电荷密度 ρ_e 和电流密度 \mathbf{J}_e 满足电流连续性方程:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_e = -\frac{\partial \rho_e}{\partial t} \quad (1-9)$$

相对于电型源,可以引入磁型源——磁荷和磁流。磁荷产生磁场,磁荷运动形成磁流,磁流产生电场。磁荷密度 ρ_m (Wb/m^3) 和磁流密度 \mathbf{J}_m (V/m^2) 满足磁流连续性方程:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_m = -\frac{\partial \rho_m}{\partial t} \quad (1-10)$$

将电型源产生的电磁场记为 $\mathbf{E}_e, \mathbf{D}_e, \mathbf{H}_e, \mathbf{B}_e$, 它们满足麦克斯韦方程:

$$\nabla \times \mathbf{H}_e = \mathbf{J}_e + \frac{\partial \mathbf{D}_e}{\partial t} \quad (1-11)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_e = -\frac{\partial \mathbf{B}_e}{\partial t} \quad (1-12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_e = 0 \quad (1-13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_e = \rho_e \quad (1-14)$$

将磁型源产生的电磁场记为 $\mathbf{E}_m, \mathbf{D}_m, \mathbf{H}_m, \mathbf{B}_m$, 它们满足的方程为:

$$\nabla \times \mathbf{H}_m = \frac{\partial \mathbf{D}_m}{\partial t} \quad (1-15)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_m = -\mathbf{J}_m - \frac{\partial \mathbf{B}_m}{\partial t} \quad (1-16)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_m = \rho_m \quad (1-17)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_m = 0 \quad (1-18)$$

比较式(1-11)~(1-14)和式(1-15)~(1-18)可见,只要将式(1-11)~(1-14)中的源和场量作如下变换:

$$\mathbf{H}_e \rightarrow -\mathbf{E}_m, \quad \mathbf{B}_e \rightarrow -\mathbf{D}_m, \quad \mathbf{E}_e \rightarrow \mathbf{H}_m, \quad \mathbf{D}_e \rightarrow \mathbf{B}_m, \quad \rho_e \rightarrow \rho_m, \quad \mathbf{J}_e \rightarrow \mathbf{J}_m$$

就可由式(1-11)~(1-14)得到式(1-15)~(1-18),反之亦然。式(1-11)~(1-14)和式(1-15)~(1-18)之间的这种对偶关系称为对偶原理。电型源电流和电荷是自然界

的实际场源,但迄今为止还未发现自然界中有磁荷和磁流。电磁理论中引入的磁荷和磁流是一种等效源,利用磁荷和磁流等效源及对偶原理可以简化许多工程问题中麦克斯韦方程的求解和计算。如果空间同时存在电型源和磁型源,由于源与场的关系是线性的,空间的总电磁场等于电型源产生的场与磁型源产生的场的叠加,即 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_m$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_e + \mathbf{H}_m$ 。将电型源和磁型源的场方程式(1-11)~(1-14)及(1-15)~(1-18)叠加,可得:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_e + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1-19)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{J}_m - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1-20)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m \quad (1-21)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e \quad (1-22)$$

这组方程称为广义的时域麦克斯韦方程。由于电流与磁场之间为右手螺旋关系,而磁流与电场之间为左手螺旋关系,故式(1-19)和式(1-20)的右侧相差一个负号。可以看出,引入磁型源后,广义的时域麦克斯韦方程具有很好的对称性。

1.1.3 时谐麦克斯韦方程

电磁场量 $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{B}$ 是空间和时间的函数,在随时间变化的电磁场中最有用且最重要的是随时间按正弦或余弦变化的场,一般称为时谐电磁场。对于角频率为 ω 的时谐电磁场,电场强度为 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{i\omega t}$, 磁场强度为 $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r})e^{i\omega t}$ 。复振幅矢量 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 和 $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ 仅为空间坐标的函数,在不引起混淆的情况下简记为 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 。

将时谐电磁场代入麦克斯韦方程(1-19)~(1-22),得:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_e + i\omega \mathbf{D} \quad (1-23)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{J}_m - i\omega \mathbf{B} \quad (1-24)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m \quad (1-25)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e \quad (1-26)$$

这组方程称为时谐麦克斯韦方程或广义的频域麦克斯韦方程。在时谐场中,电流和磁流连续性方程的复数形式为:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_e = -i\omega \rho_e \quad (1-27)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_m = -i\omega \rho_m \quad (1-28)$$

在时谐麦克斯韦方程中,各物理量均为时谐量复数形式。显然,由于频域麦克斯韦方程少了时间变量,因此求解频域麦克斯韦方程要比求解一般时域麦克斯韦方程容易得多。如果空间为线性媒质,任何时变电磁场都可利用傅里叶变换分解为许多时谐电磁场的叠加。因此,在分析时变电磁场时,可以先将时变电磁场的源通过傅里叶变换分解为时谐电磁场的源,然后利用时谐麦克斯韦方程求解各频率的场源产生

的时谐电磁场,最后对时谐电磁场进行傅里叶反变换求出时变电磁场。

§ 1.2 媒质的本构方程

如果将麦克斯韦方程的两个旋度方程及电流连续性方程作为独立方程,且不考虑虚构的磁型源,则这 3 个方程共有 5 个矢量函数 $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{B}, \mathbf{J}$ 和一个标量函数 ρ_e 。由于一个矢量函数可分解为 3 个标量函数,则 3 个方程相当于共有 16 个标量函数,而 3 个独立方程实际上是由 7 个标量方程构成的,仅由 7 个标量方程无法确定 16 个未知标量函数,所以这 3 个独立方程是麦克斯韦方程的非限定形式。要使方程的数目和未知量的数目相等,还必须利用电磁场中媒质特性的关系。电磁场中描述媒质特性的关系称为组成关系或本构方程。引入本构方程,增加了 3 个矢量方程,即 9 个标量方程,使方程的数目和未知量的数目相等,场方程就可以求解了。因此,加上本构方程,麦克斯韦方程就构成了限定形式。

对于各向同性线性媒质, \mathbf{D} 与 \mathbf{E} 及 \mathbf{B} 与 \mathbf{H} 的关系为:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (1-29)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (1-30)$$

式中, ϵ 为介电常数, F/m; μ 为磁导率, H/m。

导电媒质中有可自由运动的电荷,在电场的作用下自由电荷运动会形成电流。由实验得到导电媒质中的电流密度与电场强度的关系为:

$$\mathbf{J}_e = \sigma \mathbf{E} \quad (1-31)$$

式中, σ 为媒质的电导率, S/m。上式称为欧姆定律的微分形式。

电导率表示物质的导电性能,其中, $\sigma=0$ 的媒质不导电,称为理想媒质; $\sigma=\infty$ 的媒质称为理想导体。式(1-29)、式(1-30)和式(1-31)就是各向同性线性媒质的本构方程。

媒质的介电常数 ϵ 和磁导率 μ 以及电导率 σ 代表了媒质的电磁特性,是媒质的重要参数。不同媒质的电磁参数不同,同一种媒质因密度、杂质含量等差别以及频率的不同,其电磁参数也可能不同。对于均匀媒质,在不太宽的频率范围内,这些电磁参数是常数;如果频率范围很宽,介电常数 ϵ 和磁导率 μ 就与频率有关。例如水的相对介电常数在频率由零升到光频时,其值从 81 降到 1.8 左右,这种媒质称为时间色散媒质。当频率足够高时,由于存在极化损耗与磁化损耗,媒质的介电常数和磁导率变为复数,即 $\epsilon = \epsilon' - i\epsilon''$, $\mu = \mu' - i\mu''$,其中虚部代表媒质存在损耗。对于色散媒质,极化和磁化的响应不是即时的, \mathbf{D} 和 \mathbf{B} 不仅取决于 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 现在的值,还与 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 对时间的各阶导数有关,即:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} + \epsilon_1 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \epsilon_2 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \epsilon_3 \frac{\partial^3 \mathbf{E}}{\partial t^3} + \dots \quad (1-32a)$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} + \mu_1 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \mu_2 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \mu_3 \frac{\partial^3 \mathbf{H}}{\partial t^3} + \dots \quad (1-32b)$$

对于时谐电磁场,以上两式变为:

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} + i\omega\epsilon_1\mathbf{E} - \omega^2\epsilon_2\mathbf{E} - i\omega^3\epsilon_3\mathbf{E} + \dots \quad (1-33a)$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} + i\omega\mu_1\mathbf{H} - \omega^2\mu_2\mathbf{H} - i\omega^3\mu_3\mathbf{H} + \dots \quad (1-33b)$$

将以上两式写成式(1-29)和式(1-30)的形式,介电常数 ϵ 和磁导率 μ 成为复数,其实部和虚部均与频率有关。对于导电媒质,有时也将电导率包含在复介电常数中,利用全电流安培定律:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_e + i\omega\epsilon\mathbf{E}$$

将式(1-31)代入得:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma\mathbf{E} + i\omega\epsilon\mathbf{E} = i\omega\left(\epsilon - i\frac{\sigma}{\omega}\right)\mathbf{E} = i\omega\epsilon'\mathbf{E}$$

式中, $\epsilon' = \epsilon - i\frac{\sigma}{\omega}$,是将电导率包含在复介电常数中的等效介电常数。复介电常数和复磁导率也可以写成极坐标的形式: $\epsilon = \epsilon' - i\epsilon'' = |\epsilon|e^{-i\theta}$, $\mu = \mu' - i\mu'' = |\mu|e^{-i\theta}$,其中 δ 和 θ 分别为电损耗角和磁损耗角,并有 $\tan \delta = \frac{\epsilon''}{\epsilon'}$, $\tan \theta = \frac{\mu''}{\mu'}$, $\tan \delta$ 和 $\tan \theta$ 分别称为电损耗角正切和磁损耗角正切。电导率引起的电损耗角正切为 $\tan \delta = \frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ 。

媒质分为均匀媒质和不均匀媒质。均匀媒质的电磁参数与空间坐标无关,不均匀媒质的电磁参数是空间坐标的函数。

当媒质的介电常数 ϵ 和磁导率 μ 或者极化率 χ_e 和磁化率 χ_m 不随 \mathbf{E} 与 \mathbf{H} 改变时,称为线性媒质,否则称为非线性媒质。对于非线性媒质,电极化强度矢量 \mathbf{P} 和磁化强度矢量 \mathbf{M} 分别为:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0[\chi_e^{(1)}\mathbf{E} + \chi_e^{(2)}|\mathbf{E}|\mathbf{E} + \chi_e^{(3)}|\mathbf{E}|^2\mathbf{E} + \dots] \quad (1-34a)$$

$$\mathbf{M} = \chi_m^{(1)}\mathbf{H} + \chi_m^{(2)}|\mathbf{H}|\mathbf{H} + \chi_m^{(3)}|\mathbf{H}|^2\mathbf{H} + \dots \quad (1-34b)$$

研究非线性媒质的电磁场属于非线性电磁学或非线性光学的范畴。

有一些媒质的电磁参数与电磁场的方向有关,这种媒质称为各向异性媒质。各向异性媒质的组成关系可以表示为矩阵形式,即:

$$\mathbf{D} = \vec{\epsilon} \cdot \mathbf{E} \quad (1-35a)$$

$$\mathbf{B} = \vec{\mu} \cdot \mathbf{H} \quad (1-35b)$$

$$\mathbf{J}_e = \vec{\sigma} \cdot \mathbf{E} \quad (1-35c)$$

式中:

$$\vec{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}, \quad \vec{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{bmatrix}, \quad \vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

晶体是一种电各向异性媒质,恒定磁场中的等离子体也具有电各向异性。恒定磁场中的铁氧体是磁各向异性媒质。用 $\vec{\sigma}$ 描述的各向异性媒质常见于地下导电媒质。

还有一些媒质,电磁特性方程可以表示为:

$$\mathbf{D} = \vec{\epsilon} \cdot \mathbf{E} + \vec{\zeta} \cdot \mathbf{H} \quad (1-36)$$

$$\mathbf{B} = \vec{\zeta} \cdot \mathbf{E} + \vec{\mu} \cdot \mathbf{H} \quad (1-37)$$

这些关系表明,媒质的极化与磁化存在一定的耦合关系,这种媒质称为双各向异性媒质。当以上 4 个电磁张量参数均退化为标量时,称为双各向同性媒质。一般运动媒质中具有这种电磁耦合关系。

电磁参数与频率、坐标变量、方向无关,且均为标量常数的媒质称为简单媒质。

§ 1.3 边值关系

麦克斯韦方程的微分形式只适用于媒质的物理性质处处连续的空间区域,但实际遇到的媒质总是有界的,在边界面上其物理性质会发生突变,导致边界面处矢量场也发生突变。所以,在边界面上麦克斯韦方程的微分形式已失去意义,边界面两边的矢量场的关系要由麦克斯韦方程的积分形式导出的边值关系确定。边值关系就是在媒质的边界面上电磁场所满足的方程。

由广义的麦克斯韦方程的积分形式可以得到边界面两侧电磁场的边值关系为:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{i}_e \quad (1-38)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = -\mathbf{i}_m \quad (1-39)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = \sigma_m \quad (1-40)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma_e \quad (1-41)$$

等式左边 \mathbf{n} 表示由媒质 1 指向媒质 2 的边界面法向单位矢量。前两式表示边界面两侧电磁场的切向分量的关系,后两式表示边界面两侧电磁场的法向分量的关系。等式右边 \mathbf{i}_e 为边界面上的面电流密度, A/m; σ_e 为面电荷密度, C/m²; \mathbf{i}_m 为面磁流密度, V/m; σ_m 为面磁荷密度, Wb/m²。实际的媒质边界不存在磁型源,磁型源的面密度只有数学上的意义。

§ 1.4 波动方程

交变电磁场具有波动性。具有波动性质的物理量满足波动方程。电磁波的场量波动方程可以由麦克斯韦方程直接导出。在均匀、各向同性、线性媒质(ϵ, μ, σ 均不为零)中,存在两种源 \mathbf{J}_e, ρ_e 和 \mathbf{J}_m, ρ_m 时的麦克斯韦方程(1-19)右端应加入感应电流项 $\sigma\mathbf{E}$, 考虑组合关系后将麦克斯韦方程(1-19)~(1-22)重写为:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_e + \sigma \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1-42)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{J}_m - \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (1-43)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \rho_m \quad (1-44)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \rho_e \quad (1-45)$$

对式(1-42)和(1-43)两端取旋度有:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{J}_e + \sigma \nabla \times \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{E} \quad (1-46)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \mathbf{J}_m - \mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{H} \quad (1-47)$$

利用矢量恒等式 $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ 展开上面两式左端,展开后的散度关系由式(1-44)和(1-45)代入;上面两式右端的 \mathbf{E} 及 \mathbf{H} 的旋度由式(1-42)和(1-43)代入,整理后得:

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \epsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{H} - \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}_m - \nabla \times \mathbf{J}_e + \frac{1}{\mu} \nabla \rho_m + \sigma \mathbf{J}_m \quad (1-48)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} - \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} = \mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}_e + \nabla \times \mathbf{J}_m + \frac{1}{\epsilon} \nabla \rho_e \quad (1-49)$$

式(1-48)和式(1-49)左端为场,右端为源,揭示了场与源的关系,包含了对空间和时间的二阶微分,称为波动方程。这里没有对场、源的时空函数进行特殊限制,故该波动方程具有普遍意义。

在有源区,波动方程的右端不为零,称为非齐次波动方程。

对于时谐场,用 $i\omega$ 表示 $\frac{\partial}{\partial t}$,简化式(1-48)和式(1-49),有:

$$\nabla^2 \mathbf{H} + (\omega^2 \epsilon \mu - i\omega \mu \sigma) \mathbf{H} = i\omega \epsilon \mathbf{J}_m - \nabla \times \mathbf{J}_e + \frac{1}{\mu} \nabla \rho_m + \sigma \mathbf{J}_m \quad (1-50)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} + (\omega^2 \epsilon \mu - i\omega \mu \sigma) \mathbf{E} = i\omega \mu \mathbf{J}_e + \nabla \times \mathbf{J}_m + \frac{1}{\epsilon} \nabla \rho_e \quad (1-51)$$

方程(1-50)和(1-51)是波动方程(1-48)和(1-49)的特例,称为亥姆霍兹方程。

在不同条件下求解波动方程或亥姆霍兹方程时,只需将相应条件(有源还是无源,是电型源还是磁型源,位移电流和传导电流同时考虑还是忽略其中一项)代入方程即可。

在电磁场的边值问题中,无源区中的场满足齐次波动方程或齐次亥姆霍兹方程,即:

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \epsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{H} - \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H} = 0 \quad (1-52)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} - \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} = 0 \quad (1-53)$$

或

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0 \quad (1-54)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \quad (1-55)$$

式中, k 为时谐场波数, 且 $k^2 = \omega^2 \epsilon\mu - i\omega\mu\sigma$ 。

因为非齐次偏微分方程的通解由齐次方程的解与非齐次方程的特解叠加而成, 非齐次项(源项)导致的特解即为源所产生的一次场, 所以在有源区也必须求解齐次方程以获得二次场。

在地下空间探测的某些方法中, 因所使用的频率特别低, 位移电流可以忽略, 即忽略波动方程中对时间的二次微分项, 齐次波动方程退化为扩散方程:

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H} = 0 \quad (1-56)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} = 0 \quad (1-57)$$

或

$$\nabla^2 \mathbf{H} - i\omega\mu\sigma \mathbf{H} = \nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0 \quad (1-58)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - i\omega\mu\sigma \mathbf{E} = \nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \quad (1-59)$$

充分体现了电磁信号在地下的传导作用。此时的波数为 $k^2 = -i\omega\mu\sigma$ 。

§ 1.5 位函数及其波动方程

上一节所建立的场矢量波动方程(1-48)~(1-51)中的源与场的方向不一定一致, 若想将矢量方程转化为标量方程求解, 除特殊情况外均不可能。为了便于求解, 必须引入满足下列条件的位函数, 即要求: ① 位函数的方向与源方向易于建立联系或位函数是标量; ② 能用波动方程联系位函数与源的关系; ③ 能建立位函数与场的关系。研究表明, 能满足上述条件的中间函数既存在矢量函数又存在标量函数, 分别称为矢量位和标量位。下面分别按电型源和磁型源系统引入相应的位函数并建立相应的波动方程。

1.5.1 矢量磁位和标量电位

在均匀、各向同性、线性媒质中, 当仅存在电型源时, 麦克斯韦方程为:

$$\nabla \times \mathbf{H}_e = \mathbf{J}_e + \sigma \mathbf{E}_e + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}_e \quad (1-60)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_e = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}_e \quad (1-61)$$

$$\mu \nabla \cdot \mathbf{H}_e = 0 \quad (1-62)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_e = \frac{\rho_e}{\epsilon} \quad (1-63)$$

由于一个矢量场旋度的散度恒等于零,即:

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} \equiv 0 \quad (1-64)$$

已知式(1-62)中 $\mu \mathbf{H}_e$ 可以表示为某一矢量 \mathbf{A}_e 的旋度,所以有:

$$\mathbf{H}_e = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}_e \quad (1-65)$$

将式(1-65)代入式(1-61),有:

$$\nabla \times \left(\mathbf{E}_e + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_e \right) = 0 \quad (1-66)$$

又因任一标量场梯度的旋度恒等于零,即:

$$\nabla \times \nabla \Phi = 0 \quad (1-67)$$

则求解式(1-66)时,可将括号内的矢量表示为一标量函数 Φ_e 的梯度的负值,所以有:

$$\mathbf{E}_e + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_e = -\nabla \Phi_e \quad (1-68)$$

即:

$$\mathbf{E}_e = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_e - \nabla \Phi_e \quad (1-69)$$

式中, \mathbf{A}_e 为矢量磁位; Φ_e 为标量电位。 \mathbf{A}_e 、 Φ_e 也具有多值性。虽然矢量磁位 \mathbf{A}_e 和标量电位 Φ_e 可以取无穷多个表达形式,但只要它们满足式(1-62)和式(1-66),即可导出唯一的电磁场解。

在引入位函数的过程中已经建立了场与位的关系,即式(1-65)和式(1-69)。下面再建立位与源的关系。将式(1-65)和式(1-69)代入式(1-60),有:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}_e = \mu \mathbf{J}_e + \mu \left(\sigma + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(-\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_e - \nabla \Phi_e \right) \quad (1-70)$$

利用 $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}_e = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}_e) - \nabla^2 \mathbf{A}_e$ 展开并整理,有:

$$\nabla^2 \mathbf{A}_e - \epsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A}_e - \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_e = -\mu \mathbf{J}_e + \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A}_e + \mu \sigma \Phi_e + \epsilon \mu \frac{\partial}{\partial t} \Phi_e \right) \quad (1-71)$$

既然非唯一的位函数可以导出唯一的场,那么为简化波动方程,取矢量磁位与标量电位存在一特定关系的一组位也不影响电磁场的求解。令:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_e = -\mu \sigma \Phi_e - \epsilon \mu \frac{\partial}{\partial t} \Phi_e \quad (1-72)$$

即 \mathbf{A}_e 与 Φ_e 用该关系联系时,波动方程(1-71)可简化为:

$$\nabla^2 \mathbf{A}_e - \epsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A}_e - \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_e = -\mu \mathbf{J}_e \quad (1-73)$$

式(1-72)称为洛仑兹规范化条件。式(1-73)为联系矢量磁位与源电流的波动方