经人民教育出版社授权使用

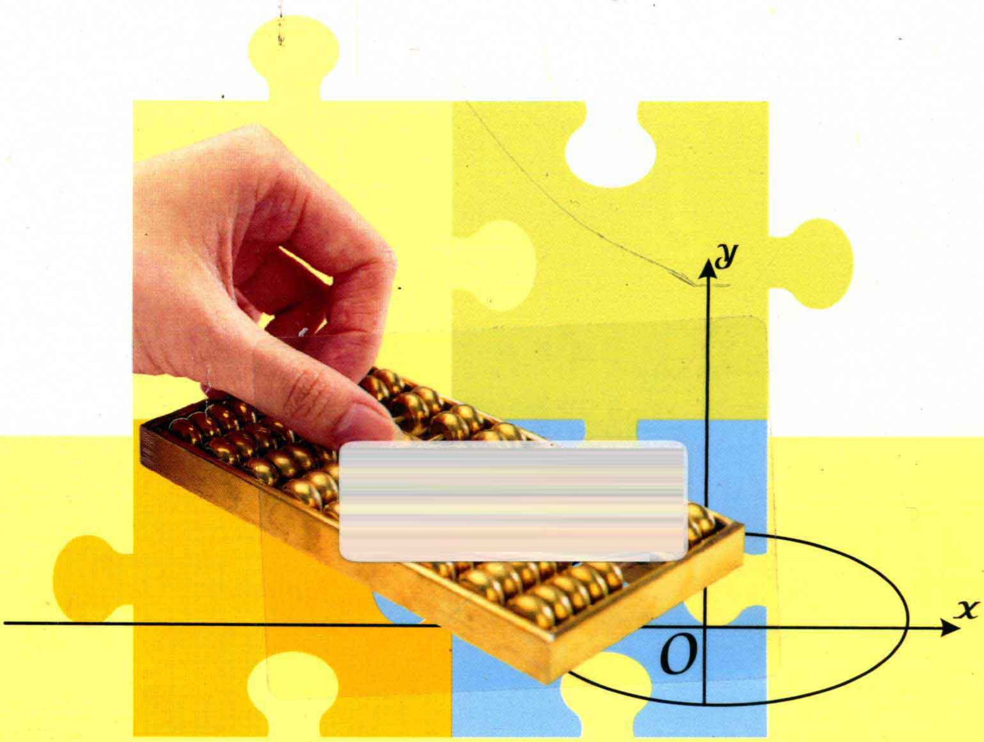
普通高中新课程同步导学方案

数学 选修 2-2

人教A版 (理工方向)

SHUXUE XUANXIU

《普通高中新课程同步导学方案》编委会 编



山西出版集团
山西教育出版社

普通高中新课程同步导学方案

数学 选修 2-2

人教A版 (理工方向)

SHUXUE XUANXIU

总 主 编　荆作栋

顾　　问　陈铁朴

副总主编　刘立平　李　飞　仇小燕　冉红平

学科专家组　于　江　马胜利　王永明　王庆明　王明霞　王鸿俊　尹宏伟　尹青春　王建军　王福霞　王福寿　宁更柱　关双全　乔全国　刘补明　刘跃梅　刘洪柱　孙春亮　朱晓斌　吕溴平　邢小雷　安云伟　邵朝恒　张凤琴　张同兰　张权泉　张立平　祁永新　时利民　李建日　辛保印　张晋英　张　逍　张容琴　李　龙　李天才　李　叶　李军民　李　瑾　李德庆　杜海旺　杨玉君　杨凤英　武秀娥　武　玥　范福生　陈爱玲　陈耀文　胡本智　要瑞娥　畅建宝　郝玉怀　郝笑冰　高　云　侯嘉梅　郗晓波　郭丽萍　崔建栋　梁晋元　尉惠玲　韩玉刚　韩宏庆　景　明　韩承金　温添凤　蔺润平　樊晓东　薛八廷　薛光辉　臧泽峰　檀中世

（按姓氏笔画为序）

分册主编　杜海旺

分册作者　淮冰会　侯永青　李日平　吴吉全　肖美云　宋丽霞　张　云　王经权　郝玉怀　李德亭　苏全忠　王　霞

山西出版集团

山西教育出版社

PUTONG GAOZHONG XINKECHENG TONGBU DAOXUE FANG' AN

普通高中新课程同步导学方案·数学选修2-2（人教A版）

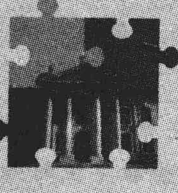
责任编辑 康 健
助理编辑 解 红
复 审 仇小燕
终 审 张大同
内文设计 薛 菲
装帧设计 拓新企划

出版发行 山西出版集团·山西教育出版社
（太原市水西门街馒头巷7号 电话：4035711 邮编：030002）
印 装 太原市众一彩印有限公司
开 本 880×1230 1/16
印 张 10.5
字 数 291千字
版 次 2010年12月第1版 2010年12月山西第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5440-4256-7
定 价 25.00元

亲爱的同学：

这个季节，风儿丝一般地划过，云朵像洁白的棉絮，缓缓地飘移，阳光，也仿佛更加明亮纯净了。你迎来了又一个崭新的学期。我看到，你晶莹的双眸，像星星在闪亮；我听到，你年轻的心，如同展翅的鸟儿雀跃欢腾地跳。你期待飞翔，渴望成功，对吗？而我们，最大的心愿，就是让你起飞的姿势更加优美，让你迈向成功的步伐更加有力！看到了吗？你此刻正在翻阅的这一套《普通高中新课程同步导学方案》丛书，就是我们送给你的——学习制胜秘笈，拥抱成功宝典！

亲爱的同学，今后的每一个日子里，我们都会陪伴你，我们的丛书都会陪伴你。陪伴你追逐梦想。我们相信：无论亮亮的阳光，抑或，暖暖的灯光，照耀的，都将是你奋发进取的面孔和微微上扬的嘴角。出发吧，亲爱的同学，我们去追梦；努力吧，亲爱的同学，我们创辉煌！



编写说明

翻开飘着墨香的《普通高中新课程同步导学方案》，你会欣喜地发现：它有着全新的教育理念、全新的体例和栏目、全新的内容和思路。它体现了我们一贯的目标和追求：托举起你们青春的翅膀，让你们在广阔的世界中高高飞翔。

为使大家很好地使用这套丛书，下面介绍一下它的特点：

丛书体现了高中新课程基础性、应用性和探究性的特点。各个阶段的学习和练习内容都具有层次性，兼顾到各个层次能力学生的需要。为了培养同学们的探究能力，无论是课前预习还是课堂学习，都要求同学们对课文内容和搜集的资料进行探究、梳理和整合，避免了以往仅机械地提供相关资料的做法。具体表现在栏目设计上。栏目是内容的提要和导引，若干个栏目分为四部分：

1. 模块整体感悟部分，分为“模块知识梳理”和“模块思想感悟”两个栏目。一是利用结构图，提纲挈领地将模块学习内容呈现在我们面前，让我们在没有接触内容之前就对本模块的学习做到了心中有数；二是从整体上了解了模块的学习重点、知识要点及相适应的学习方法。

2. 章学习先知部分。“内容概要”是对章学习内容的总体叙述。通过阅读，我们可以明确本章学习的内容、掌握的知识、提高的能力以及在情感态度价值观上应该达到的高度；“《课程标准》要求”指出了对本章的学习要求；“学法指点”则运用简明的语言对我们应该如何进行本章学习提出了很好的建议。

3. 自主学习部分。此部分内容在本书中最为重要。设计的栏目分课前、课中和课后三个层次。“自主探究学习”是课前自学时应该完成的内容。“数学与生活”栏目展现生活中的数学，“教材导读”以问题的形式引导大家阅读教材，“自主测评”检测你自主学习的效果，“疑点归纳”引导大家提出问题，以理解数学的本质。“课堂互动探究”主要是课堂上互动学习要解决的问题。

4. 课外提升部分。此部分设四个栏目：“基础巩固”是对基础知识的巩固练习；“能力测控”是提升我们用数学的能力；“拓展提升”设计了综合练习，引导我们将学习与生活有机地结合起来；“数学探究”提供了探究的问题、步骤，使我们体验数学研究的过程和创造的激情。

以上就是我们在《高中课程标准》精神指导下的设计理念，同学们明白了吧？

《普通高中新课程同步导学方案》编委会

《普通高中新课程同步导学方案》

全书结构示意图

模块整体感悟

第一章
内容概要
《课程标准》要求
学法指点

第一学时　自主探究学习
　　　　　课堂互动探究
　　　　　课后分级训练

第二章

第二学时
第三学时
……

……

综合测试

模块综合测试

<table>
<tr><th colspan="3">栏目</th><th>关键词</th><th>设置理念与目标</th></tr>
<tr><td colspan="2">模块</td><td>模块知识梳理
模块思想感悟</td><td>知识结构总览</td><td>注重整个模块的整体把握，深入理解各模块的主题。</td></tr>
<tr><td colspan="2">章</td><td>内容概要
《课程标准》要求
学法指点</td><td>全章学习目标</td><td>概括全章知识要点，指明学习方向，明确学习重点，合理安排学习时间和精力，对全章学习做到有的放矢。</td></tr>
<tr><td rowspan="3">每学时栏目设置示意</td><td>板块一</td><td>自主探究学习
一、数学与生活
二、教材导读
三、自主测评
四、疑点归纳</td><td>预习、自学、复习，联系旧知，导入新知，归纳要点，讲解探究</td><td>引导学生自主探究，学会主动发展。勇于提出问题，逐步掌握分析问题、解决问题的方法。注重对学生思维的引导，注重知识生成的过程。</td></tr>
<tr><td>板块二</td><td>课堂互动探究
一、典例剖析
二、小结反思</td><td>当堂达标，随堂巩固</td><td>引导学生积极主动参与教学过程，勇于探究、乐于合作、敢于质疑，形成多维互动的学习氛围，使学生的潜能得到相应的发挥，促进学生整体素质的发展。</td></tr>
<tr><td>板块三</td><td>课后分级训练
一、基础巩固
二、能力测控
三、拓展提升</td><td>巩固基础知识
提升探究能力</td><td>完全依据课标对知识能力的要求进行设计，在注重书本知识的同时，加强课程内容与生活实际的联系，关注学生的学习兴趣和经验，一般用时30分钟。可作为课堂教学的一个环节，当堂完成。</td></tr>
<tr><td colspan="2">章</td><td>章综合测试</td><td>知识整理</td><td>试题涵盖全章知识点，难度适中、题量合理，全面检验学生对知识、方法的掌握程度和运用知识解决问题的能力。</td></tr>
</table>

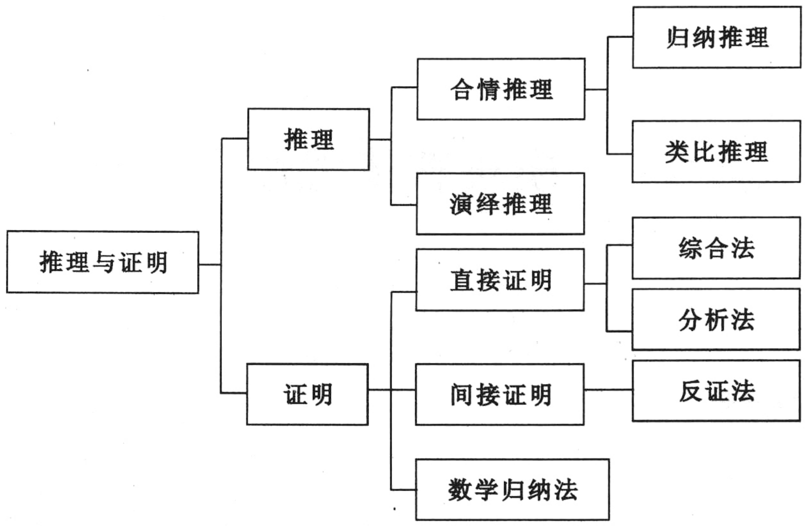
Contents 目录

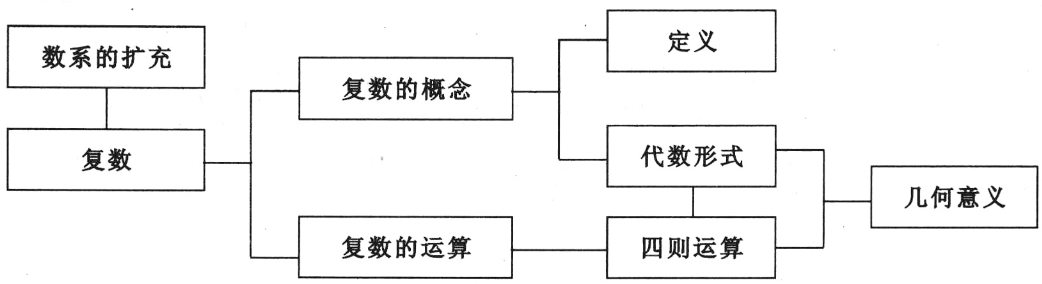
1

模块整体感悟

模块知识梳理

- 微积分
  - 导数
    - 导数的概念
      - 函数的瞬时变化率 ← 函数的平均变化率
      - 运动的瞬时速度 ← 运动的平均速度
      - 曲线的切线的斜率 ← 曲线的割线的斜率
    - 导数的运算
      - 基本初等函数的导数
      - 导数的四则运算法则
      - 简单复合函数的导数
    - 导数的应用
      - 函数的单调性研究
      - 函数的极值与最大(小)值
      - 曲线的切线
      - 变速运动的速度
      - 最优化问题
  - 积分
    - 定积分的概念
      - 曲边梯形的面积
      - 变力所做的功
      - 和式$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x$的极限
    - 微积分基本定理
      - 微积分基本定理的含义
      - 微积分基本定理的应用





模块思想感悟

1. 导数及其应用是微积分初步，是高等数学的开始，在思想方法上与初等数学有着本质的区别，所以对于本章的学习，首先一定要抓住两个核心概念——导数与定积分的形成过程，深刻体会其中“以直代曲”“由微观驾驭宏观”“量变到质变”的哲学思想；其次在学习中要十分重视数形结合思想方法的运用，通过几何直观去认识和感受导数与定积分，将会起到事半功倍的效果.

2. 推理与证明是数学的基本思维过程，也是人们学习和生活中经常使用的思维方式，在这一章中只是将推理方法和证明方法比较系统地整理出来. 所以在学习中要充分结合我们已经学过的数学实例，将我们的推理和论证过程规范化，逐步养成思维严谨、条理清晰、言之有理、论证有据的习惯.

3. 在学习数系扩充的简要进程中，同学们要从中感受数学的发现和创造过程，体会数系扩充是数学发展的客观需求. 引入复数以后，大家首先要弄清虚数单位 i 的出现背景以及它的含义；其次在复数的运算以及应用中要注意借助复数的代数形式，实现复数问题实数化.

第一章　导数及其应用

章学习先知

先行一步，步步先行

内容概要

微积分的创立是数学发展中的里程碑，它的发展和广泛应用开创了向近代数学过渡的新时期，为研究变量和函数提供了重要的方法和手段. 在本章我们学习微积分中最基本和最重要的两个概念——导数与定积分. 第一部分导数主要包括导数的概念、导数的运算以及导数的应用. 教材通过大量的实例，引导学生经历由平均变化率到瞬时变化率刻画现实问题的过程，从而更好地理解导数的概念；在学会求一些简单函数的导数的基础上，进一步了解导数方法在研究函数性质中的一般性和有效性，以及在实际生活中解决优化问题的作用. 第二部分定积分主要包括定积分的概念、微积分基本定理和定积分的简单应用. 由实际背景导出定积分的数学模型是又一个"问题情境—建立模型—解释、运用与拓展"的案例，是"局部以直代曲""无限逼近"的辩证思想的又一次生动体现；最后微积分基本定理又揭示了导数与定积分之间的内在联系. 通过本章的学习，我们将深刻体会到微积分的思想及其丰富的内涵，感受它在解决实际问题中的作用，了解微积分的基本思想及其文化价值.

《课程标准》要求

一、导数概念及其几何意义

1. 通过对大量实例的分析，经历由平均变化率过渡到瞬时变化率的过程，了解导数概念的实际背景，知道瞬时变化率就是导数，体会导数的思想及其内涵.

2. 通过函数图象直观地理解导数的几何意义.

二、导数的运算

1. 能根据导数的定义求函数 $y=c$，$y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=\dfrac{1}{x}$，$y=\sqrt{x}$的导数.

2. 能利用给出的基本初等函数的导数公式和导数的四则运算法则求简单函数的导数，能求简单的复合函数(仅限于形如$f(ax+b)$的函数)的导数.

3. 会使用导数公式表.

三、导数在研究函数中的应用

1. 结合实例，借助几何直观探索并了解函数的单调性与导数的关系；能利用导数研究函数的单调性；会求不超过三次的多项式函数的单调区间.

2. 结合函数图象，了解函数在某点取得极值的必要条件和充分条件；会用导数求不超过三次的多项式函数的极大值、极小值，以及闭区间上不超过三次的多项式函数的最大值、最小值；体会导数方法在研究函数性质中的一般性和有效性.

四、生活中的优化问题举例

例如,通过使利润最大、用料最省、效率最高等优化问题,体会导数在解决实际问题中的作用.

五、定积分与微积分基本定理

1. 通过实例(如求曲边梯形的面积、变力做功等),从问题情境中了解定积分的实际背景;借助几何直观体会定积分的基本思想,初步了解定积分的概念.

2. 通过实例(如变速运动物体在某段时间内的速度与路程的关系),直观了解微积分基本定理的含义.

六、数学文化

收集有关微积分创立的时代背景和有关人物的资料,并进行交流;体会微积分的建立在人类文化发展中的意义和价值.

学法指点

如何学好这一章呢? 本章是高等数学的开始,在思想方法上与初等数学有着很大的区别. 在本章的概念学习中,因为概念形成过程中用到的"局部以直代曲"归根到底是个哲学问题,所以大家在学习过程中切勿急躁,要用心体会"无限逼近""量变到质变""近似与精确"的哲学原理,不要急于获得形式化的定义,只有这样,才能真正理解概念的本质. 在学习运算的过程中,要注意正确辨认基本初等函数模型,正确使用运算法则和运算性质. 在学习导数和定积分的应用中,要注重数形结合思想的应用,通过几何直观去认识和感受导数与定积分,这样既可以减轻大家的学习负担,又有利于真正理解导数与定积分的本质.

1.1　变化率与导数

第一学时　变化率问题

自主探究学习

尊重认知规律,亲历感悟知识生成

数学与生活

同学们都登过山吧. 在登山的过程中,我们都有这样的感觉:当山坡平缓时,步履轻盈;当山坡陡峭时,气喘吁吁. 怎样用数量来刻画山坡的平缓与陡峭程度呢? 通过这学时的学习,相信你能轻松回答这个问题.

教材导读

阅读教材第 2 ~ 4 页的有关内容,并完成下列问题:

1. 同学们,通过阅读,请你试着用数量刻画山坡的平缓与陡峭程度,并说明变化率主要反映了变化过程中的什么特征?

2. 请你写出函数 $y=f(x)$ 从 x_1 到 x_2 的平均变化率的概念. 对于这个概念,有两点需要你特别注意:一是其中 Δx 表示的是 x 的增量,有人说它只能取正值,你同意他的观点吗? 如果同意,说说理由;如果不同意,谈谈你的观点. 二是请举例说明 Δy 与 Δx 的相应性.

3. 结合教材问题 2 后的"探究",你认为用平均速度描述运动员的运动状态有什么弊端? 要想更为真实地反映实际运动情况,研究的时间段是越短越好,还是越长越好呢?

4. 结合教材中第 4 页的"思考",说说在函数图象上,平均变化率的几何意义是什么?

自主测评

1. 对于函数 $y=f(x)$，当自变量 x 由 x_0 改变到 $x_0+\Delta x$ 时，函数的改变量 Δy 为　　(　　)

A. $f(x_0+\Delta x)$　　B. $f(x_0)+\Delta x$

C. $f(x_0)\cdot\Delta x$　　D. $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

2. 质点的运动规律为 $s=t^2+3$，则在时间 $(3,3+\Delta t)$ 中，相应的平均速度等于　　(　　)

A. $3+\Delta t$　　B. $6+\Delta t$

C. $9+\Delta t$　　D. $6+\Delta t+\dfrac{9}{\Delta t}$

疑点归纳

同学们，仅仅依据函数图象，请你解释 $y=x^2$ 在区间 $[x_0,x_0+\Delta x]$ 上的平均变化率是否与 x_0，Δx 都有关. 如果你能够很轻松地完成这个问题，说明你对平均变化率的几何意义已经很清楚了. 除此之外你还有什么困惑，请记录在问题卡上，记得在课上或课后要及时解决哦！

课堂互动探究

发展创新思维，形成主动探究与合作的意识和能力

典例剖析

【例 1】 过曲线 $y=f(x)=x^3$ 上两点 $P(1,1)$ 和 $Q(1+\Delta x,1+\Delta y)$ 作曲线的割线，求出当 $\Delta x=0.1$ 时割线的斜率.

分析： 割线 PQ 的斜率就等于函数 $f(x)$ 从 1 到 $1+\Delta x$ 的平均变化率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

解： ∵

$$\begin{aligned}\Delta y&=f(1+\Delta x)-f(1)\\&=(1+\Delta x)^3-1^3\\&=3\Delta x+3\Delta x^2+\Delta x^3,\end{aligned}$$

∴　割线 PQ 的斜率

$$k=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3\Delta x+3\Delta x^2+\Delta x^3}{\Delta x}=3+3\Delta x+\Delta x^2.$$

则当 $\Delta x=0.1$ 时割线的斜率

$k_1=3+3\times0.1+0.1^2=3.31.$

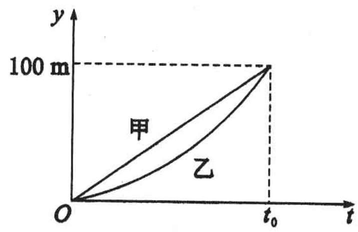
点拨： 一般地，设曲线 C 是函数 $y=f(x)$ 的图象，$P(x_0,y_0)$ 是曲线上的定点，点 $Q(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ 是曲线上与点 P 邻近的点，则割线 PQ 的斜率

$$k=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

变式　如果一个质点从定点 A 开始运动，在时间 t(单位：s)的位移函数为 $y=f(t)=2t^2+2t$(y 的单位：m)，求该质点在 2 s 到 3 s 内的平均速度.

答案： 12 m/s.

【例 2】 甲、乙两人百米赛跑的路程 y(单位：m)与时间 t(单位：s)的关系如图所示，试问接近终点时，谁跑得较快？



分析： 比较相同时间段 $[t_0-\Delta t,t_0]$ 内两人的平均速度的大小便知结果.

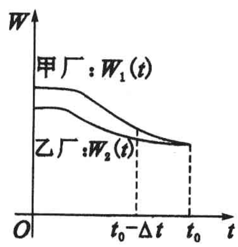
解： 由图知，虽然 $y_{甲}(t_0)=y_{乙}(t_0)$，但是

$$\frac{y_{乙}(t_0)-y_{乙}(t_0-\Delta t)}{\Delta t}\geqslant\frac{y_{甲}(t_0)-y_{甲}(t_0-\Delta t)}{\Delta t},$$

所以接近终点时，乙比甲跑得快.

点拨： 函数的平均变化率在一定程度上反映了函数值变化的快慢. 本例中，由图可知，在百米赛跑中，甲基本上是匀速到达终点，而乙是越跑越快.

变式　两工厂经过治理，污水排放量(W)与时间(t)的关系如图所示，试指出哪一个厂治污效果好.



答案： 甲比乙略好一筹.

小结反思

1. 通过本学时的学习，请你具体说说如何求函数 $y=f(x)$ 从 x_1 到 x_2 的平均变化率.

2. 通过本学时的学习，请你说说平均变化率的几何意义和实际意义分别是什么.

3. 我们知道，要想更为真实地反映实际情况，平均变化率中 Δx 的绝对值越小越好，你认为它小到什么程度最好呢？请谈谈你的想法.

课后分级训练（请在30分钟内完成）

在探究中成长是人生的必由之路

基础巩固

1. 在求平均变化率中，自变量的增量 Δx 满足（　　）

A. $\Delta x>0$　　B. $\Delta x<0$

C. $\Delta x=0$　　D. $\Delta x\neq 0$

2. 一质点运动的方程为 $s=5-3t^2$，则在时间段 $[1,1+\Delta t]$ 内相应的平均速度为（　　）

A. $3\Delta t+6$　　B. $3\Delta t-6$

C. $-3\Delta t+6$　　D. $-3\Delta t-6$

3. 已知函数 $f(x)=2x^2-4$ 的图象上一点 $(1,-2)$ 及邻近一点 $(1+\Delta x,-2+\Delta y)$，则 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=$________.

4. 已知函数 $f(x)=2x+1$，则 $f(x)$ 在 $[-3,-1]$ 上的平均变化率为________，在 $[0,5]$ 上的平均变化率为________.

能力测控

5. 已知曲线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 和这条曲线上一点 $P\left(1,\frac{1}{4}\right)$，$Q$ 是曲线上点 P 附近的一点，则点 Q 的坐标为（　　）

A. $\left(1+\Delta x,\frac{1}{4}(\Delta x)^2\right)$

B. $\left(\Delta x,\frac{1}{4}(\Delta x)^2\right)$

C. $\left(1+\Delta x,\frac{1}{4}(1+\Delta x)^2\right)$

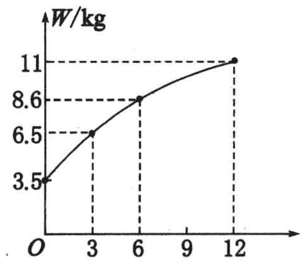
D. $\left(\Delta x,\frac{1}{4}(1+\Delta x)^2\right)$

6. 一质点的运动方程为 $s(t)=2t^2-1$，则在时间段 $[1-\Delta t,1+\Delta t]$ 内相应的平均速度为（　　）

A. 4　　B. 2

C. $4+2\Delta t$　　D. $4-2\Delta t$

7. 某婴儿从出生到第12个月的体重变化如图所示，则该婴儿从出生到第3个月体重的平均变化率为________，从第6个月到第12个月体重的平均变化率为________.



8. 求函数 $y=x^2$ 在区间 $\left[1,\frac{4}{3}\right]$，$\left[2,\frac{7}{3}\right]$，$\left[\frac{8}{3},3\right]$ 内的平均变化率. 其中哪一个最大？哪一个最小？

拓展提升

9. 设 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的两个函数，证明：

(1) $\Delta[f(x)\pm g(x)]=\Delta f(x)\pm\Delta g(x)$；

(2) $\Delta[f(x)\cdot g(x)]=g(x+\Delta x)\cdot\Delta f(x)+f(x)\cdot\Delta g(x)$.

说明：其中 $\Delta f(x)$ 表示函数 $f(x)$ 的增量，即 $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$.

10. 已知函数 $f(x)=x(1+|x|)$，求 $\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$ 的值.

第二学时　导数的概念

自主探究学习

尊重认知规律，亲历感悟知识生成

数学与生活

在高台跳水运动中，运动员相对于水面的高度 h（单位：m）与起跳后的时间 t（单位：s）存在函数关系 $h(t)=-4.9t^2+6.5t+10$. 根据上学时的学习，我们可以计算出 $0\leqslant t\leqslant\dfrac{65}{49}$ 这段时间里的平均速度 $\bar{v}$ 为 0，但显然运动员在这段时间内不是静止的. 可见用平均速度只能粗略地描述运动员的运动状态. 那么我们选择什么样的量才能精确地反映运动员在每一时刻的运动状态呢？相信你学完本学时的内容，一定能轻松地回答这个问题.

教材导读

阅读教材第 4 ~ 6 页的有关内容，并完成下列问题：

1. 请大家回顾教材中 $t=2$ 时的瞬时速度的探求过程，试着表示出运动员在某一时刻 t_0 的瞬时速度.

2. 有人说："瞬时速度就是很短很短一段时间上的平均速度."你同意他的观点吗？认真阅读教材中由平均速度得到瞬时速度的过程，请你概括出其中的数学思想.

3. 依据导数的定义，说说如何计算函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数. 谈谈它与函数 $y=f(x)$ 在 $[x_0, x_0+\Delta x]$ 上的平均变化率的关系.

4. 同学们，通过对上述问题的解答，我想你对于导数已经有了一定的认识. 试着计算例 1 中第 3 h 和第 5 h 时原油温度的瞬时变化率，并说明它们的意义.

自主测评

1. 如果某物体做运动方程为 $s=2(1-t^2)$ 的直线运动（s 的单位：m，t 的单位：s），那么其在 1.2 s 末的瞬时速度为　　（　　）

A. -4.8 m/s　　B. -0.88 m/s

C. 0.88 m/s　　D. 4.8 m/s

2. 函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ 在 $x=1$ 处的导数等于________.

疑点归纳

同学们，在不计算的前提下，你认为函数 $y=\begin{cases}x^2\ (x\geqslant 0),\\ 2x+1\ (x<0)\end{cases}$ 与 $y=x^2$ 在 $x=2$ 处的导数相等吗？有的同学认为不一定相等，如果你也这么认为，说明你对导数的概念还不太理解. 除此之外你还有什么困惑，请记录在问题卡上，记得在课上或课后要及时解决哦！

课堂互动探究

发展创新思维，形成主动探究与合作的意识和能力

典例剖析

【例 1】 质点 M 按规律 $s=2t^2+3$ 做直线运动（位移单位：m，时间单位：s），求质点 M 在 $t=2$ 时的瞬时速度.

分析：$t=2$ 时的瞬时速度

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(2+\Delta t)-s(2)}{\Delta t}.$$

解：$v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{s(2+\Delta t)-s(2)}{\Delta t}$

$=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{2(2+\Delta t)^2+3-2\times 2^2-3}{\Delta t}$

$=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(2\Delta t+8)=8(\mathrm{m/s})$.

所以质点 M 在 $t=2$ 时的瞬时速度为 8 m/s.

点拨：要注意瞬时速度和平均速度的区别和联系.

变式 质点 M 按规律 $s=at^2+3$ 做直线运动（位移单位：m，时间单位：s），若质点 M 在 $t=2$ 时的瞬时速度为 8 m/s，求常数 a 的值.

答案：$a=2$.

【例2】 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且 $f'(x_0)=a$，试求下列极限的值.

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$.

分析：在导数的定义中，注意增量 Δx 与 Δy 的相应性. 利用 $f'(x_0)=a$ 的条件，可以将所求式子进行恒等变形，转化为导数定义的式子结构.

解：(1) 原式 $=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-(-\Delta x)}$

$=-\lim\limits_{-\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}$

$=-f'(x_0)=-a$.

(2) 原式 $=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0-h)}{2h}$

$=\dfrac{1}{2}\left[\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}\right]$

$=\dfrac{1}{2}[f'(x_0)+f'(x_0)]=a$.

点拨：概念是分析解决问题的重要依据，必须准确把握概念的内涵和外延，才能灵活运用其解题. 对于导数的定义，一定要理解给定的极限式和导数之间的实质性联系.

变式 (1) 求函数 $y=\sqrt{x}$ 在 $x=1$ 处的导数；

(2) 求函数 $y=\dfrac{4}{x^2}$ 的导数.

答案：(1) $\dfrac{1}{2}$；(2) $-\dfrac{8}{x^3}$.

小结反思

1. 同学们，通过本学时的学习，你又学到了哪些新知识？你认为这些新知识有哪些用途？

2. 通过本学时的学习，我们知道了通过让 Δx 趋于0这种无限逼近的极限思想，实现了从平均变化率到瞬时变化率的转化. 除此之外，你还接触到了哪些思想方法？

3. 通过本学时的学习，我们已经知道导数是描述任何事物的瞬时变化率的，那么你知道导数反映在函数图象上又指的是什么呢？

课后分级训练（请在30分钟内完成）

在探究中成长是人生的必由之路

基础巩固

1. 自变量 x 从 x_0 变到 x_1 时，函数值的增量与相应自变量的增量之比是函数 （　　）

A. 在区间 $[x_0,x_1]$ 上的平均变化率

B. 在 x_0 处的变化率

C. 在 x_1 处的变化量

D. 在区间 $[x_0,x_1]$ 上的导数

2. 函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ （　　）

A. 与 x_0，h 都有关

B. 仅与 x_0 有关，而与 h 无关

C. 仅与 h 有关，而与 x_0 无关

D. 与 x_0，h 均无关

3. 函数 $f(x)=5$ 在 x_0 处的导数等于________.

4. 如果质点 A 按规律 $s=2t^3$ 运动，则在 $t=3$ s 时的瞬时速度为________.

能力测控

5. 某一做直线运动的物体，其位移 s 与时间 t 的关系是 $s=3t-t^2$，则该物体的初速度是　（　　）

A. 0　　B. 3

C. -2　　D. $3-2t$

6. 设函数 $f(x)$ 可导，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{3\Delta x}$ 等于　（　　）

A. $f'(1)$　　B. $3f'(1)$

C. $\dfrac{1}{3}f'(1)$　　D. $f'(3)$

7. 设 $f(x)=ax+4$，若 $f'(1)=2$，则 $a=$________.

8. 已知函数 $y=f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，求 $f'(x)$，$f'(1)$.

拓展提升

9. 已知 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$，$f(3)=2$，$f'(3)=-2$，则 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-3f(x)}{x-3}$ 的值是　（　　）

A. 4　　B. 6

C. 8　　D. 不存在

10. 用导数概念探求函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处的导数.

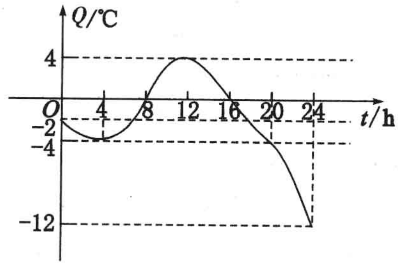
第三学时　导数的几何意义

自主探究学习

尊重认知规律，亲历感悟知识生成

数学与生活

某地一天的气温 $Q(t)$（单位：℃）与时刻 t（单位：h）之间的关系如图所示. 根据图象，请描述、比较气温在 8 点、12 点、20 点附近的变化情况. 相信你学完本学时，能够轻松地完成这个问题.



教材导读

阅读教材第 6 ~ 9 页的有关内容，并完成下列问题：

1. 同学们，阅读完本学时的内容，你知道函数 $y=f(x)$ 的导函数与在 $x=x_0$ 处的导数有什么区别和联系吗？请试着用函数的观点予以解释.

2. 通过阅读教材中的“观察”及图 1.1－2，请尝试概括其中的数学思想. 同时你发现此处研究的割线、切线与前面学习的变化率、导数有什么样的关系？请说一说函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数的几何意义是什么？并结合具体的例子予以解释.

3. 教材中在讨论导数的几何意义时，又给出一个新的切线定义，请同学们谈谈它与以前学过的切线定义有什么不同？有人认为：“两个定义的叙述不同，但实质还是相同的.”也有人认为：“以前的定义只适合一些特殊的曲线.”你的观点呢？

4. 阅读完例 2，你能发现导数与函数单调性之间的关系吗？请同学们试着总结：若 $f'(x_0)$________，则函数 $y=f(x)$ 在 x_0 附近单调递增（减）；若________，则函数 $y=f(x)$ 在 x_1 附近比在 x_2 附近增或减得快. 这个问题我们以后还要进一步研究.

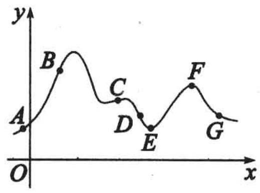
自主测评

1. 已知抛物线 $y=x^2$ 上一点 $A(1,1)$，则在点 A 处的切线的斜率为（　　）

A. 2　　B. 4

C. -2　　D. 1

2. 如图所示，A,B,C,D,E,F,G 为函数 $y=f(x)$ 图象上的点，在哪些点处，曲线的切线的斜率为0？在哪些点处，曲线的切线的斜率为正？在哪些点处，曲线的切线的斜率为负？在哪一点处，曲线的切线的斜率最大？在哪一点处，曲线的切线的斜率最小？



疑点归纳

同学们，试着用切线的定义判断一下 $y=x^3$ 在 $(0,0)$ 处的切线是否存在. 如果你认为不存在，说明你对切线的定义还没有理解. 除此之外你还有什么疑惑，请记录在问题卡上，记得在课上或课后要及时解决哦！

课堂互动探究

发展创新思维，形成主动探究与合作的意识和能力

典例剖析

【例1】 求过点 $P(-1,2)$ 且与曲线 $y=3x^2-4x+2$ 在点 $M(1,1)$ 处的切线平行的直线.

分析：本例是教材例2的进一步延伸. 理解导数的几何意义，我们不仅能够从函数的图象上判断出切线斜率的正负以及大小关系，而且有了函数解析式之后，我们能够准确地计算出它的值. 该题中要求的直线与曲线在点 M 处的切线平行，则它们的斜率相等，然后用点斜式写出所求直线方程即可.

解：曲线 $y=3x^2-4x+2$ 在点 $M(1,1)$ 处的切线斜率为

$$k=y'|_{x=1}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3(1+\Delta x)^2-4(1+\Delta x)+1}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(3\Delta x+2)=2,$$

则过点 $P(-1,2)$ 且斜率为2的直线方程为 $y-2=2(x+1)$，即 $2x-y+4=0$.

点拨：函数在某点处的导数，即为函数图象在该点处的切线的斜率. 另外本题中要注意，结果要写成一般式.

变式 已知点 P 在曲线 $E:y=x^2$ 上，求出满足下列条件的点 P 的坐标.

(1) 过点 P 的直线与曲线 E 相切且平行于直线 $y=4x-5$；

(2) 过点 P 的直线与曲线 E 相切且与 x 轴正方向成135°的倾斜角.

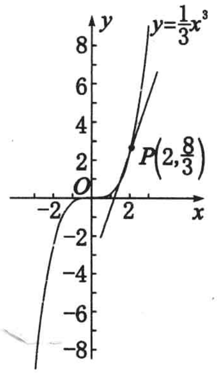
答案：(1) $P(2,4)$；(2) $P\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$.

【例2】 已知曲线 $y=\frac{1}{3}x^3$ 上一点 $P\left(2,\frac{8}{3}\right)$，如图所示，求：

(1) 点 P 处的切线的斜率；

(2) 点 P 处的切线方程；

(3) 点 P 处的切线与曲线的公共点的坐标.



分析：根据导数的几何意义可得切线的斜率，从而写出切线方程，联立切线与曲线方程，即可得到公共点的坐标.

解：(1) 因为 $y=\frac{1}{3}x^3$，所以

$$y'|_{x=2}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{3}(2+\Delta x)^3-\frac{1}{3}\times 2^3}{\Delta x}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{\Delta x\to 0}(12+6\Delta x+\Delta x^2)=4.$$

所以点 P 处的切线的斜率为4.

(2) 点 P 处的切线方程为 $y-\frac{8}{3}=4(x-2)$，即 $12x-3y-16=0$.

(3) 联立 $\begin{cases}y=\frac{1}{3}x^3,\\ 12x-3y-16=0,\end{cases}$