普通高等教育“十二五”规划教材

工程电磁场

（第二版）

（附光盘）

杨宪章　主　编

邹　玲　樊亚东　沈　斌　副主编

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

工程电磁场

(第二版)

(附光盘)

主　编　杨宪章
副主编　邹　玲　樊亚东　沈　斌
编　写　李晓萍　王东剑　程　莉
　　　　张　丽　刘　俐
主　审　崔　翔　熊元新

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

内 容 提 要

本书为普通高等教育“十二五”规划教材。

全书共分九章，叙述了静电场、恒定电场、恒定磁场、边值问题、时变电磁场、平面电磁波、导行电磁波和传输线理论。每章开始有内容简介，章末有小结，各章都选配了适量的例题、思考题、习题和测验题，习题均附有参考答案。

本书附有配套光盘，其内容为本书配套的 PPT 电子教案（文本、图片、动画）；本书各章指导性电子文档（重点要求、测验作业题解、部分习题、思考题解）；电磁场可视化实验教学；电磁场与电磁波应用；历史上相关科学家事迹介绍。

本书可作为普通高等院校电气类、自动化类、电子信息类各专业的教学用书，也可作为函授、自学考试的教学参考用书，还可供相关专业教师、工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

工程电磁场/杨宪章主编．—2 版．—北京：中国电力出版社，2011.7

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-5123-1810-6

Ⅰ.①工… Ⅱ.①杨… Ⅲ.①电磁场—高等学校—教材 Ⅳ.①O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 154286 号

中国电力出版社出版、发行

（北京市东城区北京站西街 19 号 100005 http://www.cepp.sgcc.com.cn）

航远印刷有限公司印刷

各地新华书店经售

*

2007 年 1 月第一版

2011 年 9 月第二版 2011 年 9 月北京第四次印刷

787 毫米×1092 毫米 16 开本 18.5 印张 452 千字

定价 **33.00** 元 （含 1CD）

序

电磁场是一门技术基础课，在学生的培养计划中起到很重要的作用。但由于电磁现象的抽象性和工程电磁场问题的复杂性，所以定性分析与定量计算都不易为学生所掌握。因此，这往往会造成学生的畏难情绪，缺乏兴趣，学习被动。

为克服学生的上述问题，教材能起很大作用。如果教材的编排符合下列要求，则将是我心目中的好教材。

（1）教材能在学生已有的理论基础上由浅入深，及时总结提高，让学生感到经过努力可以掌握所学内容，从而增加学生的学习信心。

（2）教材能从各个不同角度反复强调基本理论和计算公式的适用条件，帮助学生建立清晰的物理概念和培养学生良好的科学习惯，避免学生盲目套用公式。

（3）教材能处处以基本理论为指导，对现象和问题进行定性分析和定量计算，则能培养学生正确的思维方法和分析问题的方法，提高学生运用理论知识解决实际问题的能力。

（4）教材能紧密联系实际，让学生能够学以致用，从而重视课程内容，提高学习兴趣。

（5）教材能帮助学生掌握“类比”这一科学的分析方法，既能使学生复习和巩固已学的知识内容，又可缩短新内容的学习过程。

（6）教材内容的安排，既有从特殊到一般的归纳方法，又有从一般到特殊的演绎方法，则既能使学生易于接受新内容，又能培养学生的抽象思维能力。

（7）教材注重吐故纳新，及时调整教学内容，使教材紧跟时代的步伐，使学生看到科学技术的不断发展，产生努力学习的紧迫感。

（8）教材能安排多种环节的配合，使学生完成一定深度的认知过程，避免学生“考试完毕，知识归师”的走过场的现象。

纵观本书内容，总体符合上述各项要求。因此，我认为本书是一本好教材，预计能收到积极的教学效果和良好的社会效益。

下面从书中具体的内容来阐明我的结论：

（1）在静电场的编排中，从电场强度的基本定义出发，利用学生已有的电场力做功的物理概念和线积分、面积分的数学概念，结合介绍电介质极化的物理过程，在很自然的情况下得出了静电场的两个基本规律；又从梯度、散度和旋度的基本定义出发推导出了它们在直角坐标系下的数学表达式，化解了矢量分析中的难点，使学生较为容易地接受难以理解的上述定义，又在很自然的情况下获得了静电场中两个基本规律的微分形式。

（2）唯一性定理是解题正确与否的唯一根据。本书抓住唯一性定理这一主线，贯穿于电磁场问题数学模型的建立中，在几种简洁求解方法的引入以及静电屏蔽现象的应用等方面都作了十分深刻和细致的阐明，不仅帮助学生掌握了这一重要定理，而且又培养了学生分析问题和解决问题的能力。

（3）编排静电场的指导思想同样贯彻在恒定电场和恒定磁场的编写中。在编写恒定电场时应用了类比这一科学方法，它不仅在理论推导中得到了应用，还在测量和计算中指出了它

的应用所在。类比法在平面电磁波一章中得到了更为精彩的应用。相对于恒定场来说，平面电磁波一章中有很多新的概念和表达式。本书作者将平面电磁波和均匀传输线相类比，不仅便于学生接受新概念，而且表达式的推导也获得了大量的简化，同时还指出了类比双方的重要区别。

（4）本书在介绍基本规律的微分形式时，在恒定场中从梯度、散度和旋度的基本定义出发，虽然花了较多的篇幅，但便于学生接受。而在时变场中却利用了几个数学恒等式，方便地获得了基本规律的微分形式。后者培养了学生的数学推理能力，这体现出本书作者的精心安排。

（5）在全书的各章中，在介绍理论以后，引入了很多实例，不但帮助学生消化理论，而且又培养了学生的计算能力。此外，又将一些基本理论计算的结果引入到实际应用中，如涉及架空地线的屏蔽效应、电缆绝缘、一相工作电容、开关熄弧、击穿电压、接地电阻和跨步电压等概念，又如时变场中的趋肤效应、邻近效应及电磁波沿传输线传输时的正确认识等。因而本书名为《工程电磁场》甚为恰当。

（6）本书作者紧跟时代的要求，给定量计算以足够的重视，辟专章讨论，除了精选传统的计算方法以外，又增加了两种数值计算方法。

（7）本书给学生提供了较多的反复巩固的条件。如在每章末除了要点、思考题、习题外又增加了测验作业，便于学生自我检查。

综上所述，本书是工科院校电气、电子信息类专业学生学习电磁场课程的一本好教材。

盛剑霓

2002 年 5 月 20 日

前　言

本书的前身为《电磁场原理》，自1985年由高等教育出版社第一次出版，到1990第四次印刷，印数超过两万册，得到了读者的好评。2002年，作者对教材进行了修订，取名《工程电磁场》。由中国电力出版社出版。每章章末均有本章提要，并将分散在各节的思考题和练习题集中在一起，与测验题组成完整的部分放在各章最后。该书一直是电气工程类本科学生教学用书。2006年底，在2002年版《工程电磁场》的基础上，增加两章内容，进行了一些调整，2007年由中国电力出版社出版，出版后本书的使用范围更广，并附有光盘，其内容含有为本书配套的PPT，电子教案；各章典型例题精解及本书部分习题解答；电磁场可视化实验教程；电磁场及电磁波的应用；历史上相关科学家的生平事迹介绍等。

2007版教材已经第四次印刷，我们收集了许多读者的意见，认为有必要对本书再次进行修订，且已被列入“十二五”规划教材。

我们一直认为，电类各专业的主要课程的核心内容都是电磁现象在特定范围、条件下的体现。电磁场课程所涉及的内容都是工科电类专业本科学生应具备的知识结构中必要的组成部分。同时，电磁场理论又是一些交叉学科领域的科学生长点和新兴边缘学科发展的基础。学好电磁场理论将增强学生的适应能力与创造能力。因此，本课程的作用是为了让学生更深入地了解宏观电磁场的基本规律及其技术应用基本知识，培养学生用场的观点对电气工程中的电磁现象和电磁过程进行定性分析与判断的初步能力，以及进行定量分析的基本技能，通过电磁场理论的逻辑推理，培养学生的正确思维方法和严谨的科学态度。因此，我们的目的不仅是写一本简明易懂的教材，而且还希望通过本书精心的编排、所采用的各种阐述问题的方法和解决问题的思路培养学生的基本素质。

可以毫不夸张地说，场论基础和矢量分析是电磁场数学描述的支柱。因此，透彻地掌握场论基础和矢量分析，对于正确理解和领悟电磁场理论是非常重要的。本书将用一章的篇幅介绍相关的内容，以求每位学生在电磁场理论学习的开始对场论基础和矢量分析有基本相同的认识水平。为保证系统性和完整性，本书删除掉原书第一章中与预篇重复的数学描述部分。

本书在2007版的基础上内容做了一些调整，光盘内容增加了各章重点、难点。武汉工程大学的沈斌和程莉老师加入到本书的编写组。全书由杨宪章教授任主编，邹玲，樊亚东，沈斌任副主编。具体分工如下：武汉大学杨宪章教授修订了本书的第1～4及6、7章，湖北工业大学邹玲教授修订了本书的第8、9章，武汉大学樊亚东教授修订了本书的预篇——矢量分析和场论基础和第1章。武汉大学李晓萍副教授修订了本书第5章。

参加《工程电磁场》教学光盘制作的老师有：湖北工业大学的王东剑、邹玲、武汉大学的樊亚东、李晓萍、杨宪章，武汉工程大学的沈斌和程莉，武汉科技大学中南分校的张丽。其中，王东剑与张丽制作了本书配套的第1～4及6、7章PPT和重点、难点的电子教案，樊亚东制作了本书预篇的PPT电子教案及电磁场应用的电子教案；李晓萍老师制作了本书第5章PPT电子教案及电磁场可视化实验教学的电子教案，程莉制作了本书思考题及部分

习题解答的电子教案。邹玲制作了本书第 8、9 两章的 PPT 电子教案。教学光盘内容最后由杨宪章、邹玲、樊亚东与沈斌负责审定。

本书一如既往地得到了武汉大学博士生导师阮江军教授的热情支持，他对本书的编写提出了许多宝贵的建议，光盘中相关电工科学家生平事迹介绍的电子教案由他提供，对此我们再次深表谢意。

本书仍由华北电力大学博士生导师崔翔教授以及武汉大学熊元新教授审阅，在此深表感谢。

我国著名电磁理论及数值计算专家、西安交通大学博士生导师盛剑霓教授曾对本书（二〇〇二年版）进行过审阅并提过很多宝贵的意见。特别是她不辞辛劳地为本书作序。在她的宝贵序言中提出了很多有关如何编写高级教材的精辟论点，我们认为这些论点具有深远的指导意义，因此我们仍将序言刊载在本书的重要位置，而且对盛剑霓教授再次表示深切的谢意。

杨宪章

二〇一一年五月

目　录

预篇　矢量分析和场论基础

矢量分析和场论基础是分析和计算电磁场的必不可少的数学工具。本章主要介绍矢量分析和场论的基本概念、基本方法和几个重要的定理，内容包括矢量的代数运算、矢量场的三度（梯度、散度和旋度）和常用的积分定理。所涉及的内容侧重从工程电磁场的应用的角度出发，重点强调物理含义和数学描述。

§0-1　三种常用的坐标系

一、坐标变量和基矢

常用的正交坐标系有直角（笛卡尔）坐标系、圆柱坐标系和球面坐标系三种，分别如图0-1～图0-3所示。不同的坐标系选取不同坐标变量，直角坐标系中选 x、y、z 为其坐标变量，圆柱坐标系中选 r、α、z 为其坐标变量，而球面坐标系中选 r、θ、α 为其坐标变量。坐标系中基本单位矢量简称为基矢，其方向就是该坐标变量增加的方向。图0-1所示的直角坐标系中的 $\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_y$、$\boldsymbol{e}_z$；图0-2所示的圆柱坐标系中的 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\alpha$、$\boldsymbol{e}_z$；图0-3所示的球面坐标系中的 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$、$\boldsymbol{e}_\alpha$ 分别为各自坐标系的基矢。三种坐标系的基本坐标变量和基本单位矢量列于表0-1中。应注意的是圆柱坐标系中表示平面矢径的坐标变量 r 和球面坐标系中表示空间矢径的坐标变量 r 的区别。

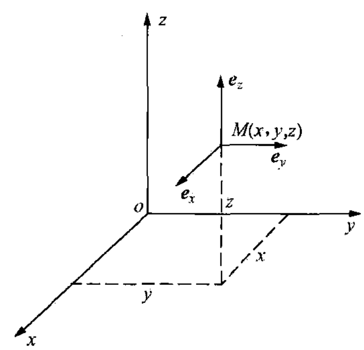

图0-1　直角坐标系

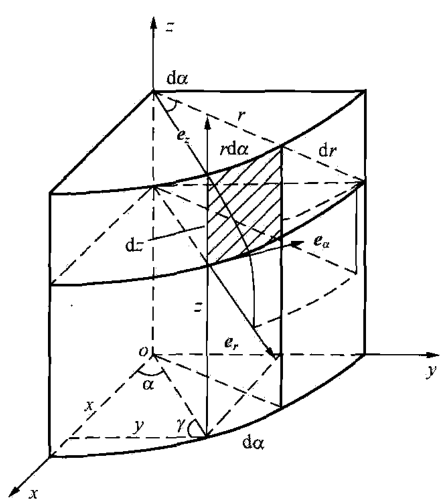

图0-2　圆柱坐标系

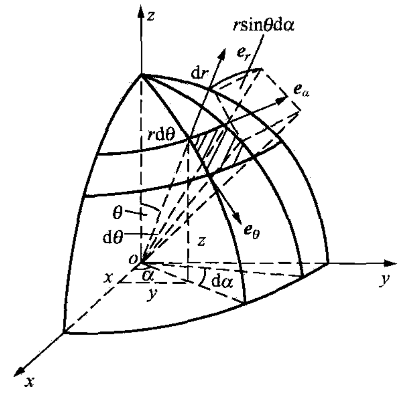

图0-3　球面坐标系

表 0 - 1 **坐标基矢和坐标变量**

坐标系	基矢	坐标变量
直角坐标	e_x e_y e_z	x y z
圆柱坐标	e_r e_α e_z	r α z
球面坐标	e_r e_θ e_α	r θ α

二、线元、面元和体元

在工程电磁场的研究中，常常要完成线、面和体的积分。在指定的坐标系中计算这些积分，需要知道长度、面积和体积微分元是如何构成的。下面以三种坐标系分别加以介绍。

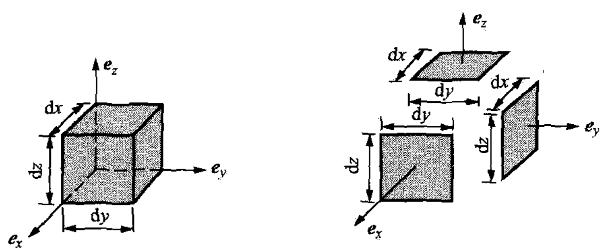

图 0 - 4 直角坐标系中微分元

1. 直角坐标系

在直角坐标系中的一个体元由六个面微分元包围，每个面微分元由沿着基矢 e_x、e_y、e_z 的线微分元 dx、dy、dz 两两构成，面微分元的方向为其外法线方向，如图 0 - 4 所示，即正基矢方向的面元为

$$d\boldsymbol{s}_x = dydz\boldsymbol{e}_x \quad d\boldsymbol{s}_y = dxdz\boldsymbol{e}_y \quad d\boldsymbol{s}_z = dxdy\boldsymbol{e}_z \tag{0-1}$$

而六面体体微分元为

$$dv = dxdydz \tag{0-2}$$

任意方向上一般的线微分元可以表示为

$$d\boldsymbol{l} = dx\boldsymbol{e}_x + dy\boldsymbol{e}_y + dz\boldsymbol{e}_z \tag{0-3}$$

2. 圆柱坐标系

如图 0 - 5 所示，圆柱坐标系的体元由 r、α、z 分别增长 dr、$d\alpha$、dz 而得，即

$$dv = rdrd\alpha dz \tag{0-4}$$

正基矢为方向的面微分元为

$$d\boldsymbol{s}_r = rd\alpha dz\boldsymbol{e}_r \quad d\boldsymbol{s}_\alpha = drdz\boldsymbol{e}_\alpha \quad d\boldsymbol{s}_z = rd\alpha dr\boldsymbol{e}_z \tag{0-5}$$

一般的线微分元为

$$d\boldsymbol{l} = dr\boldsymbol{e}_r + rd\alpha\boldsymbol{e}_\alpha + dz\boldsymbol{e}_z \tag{0-6}$$

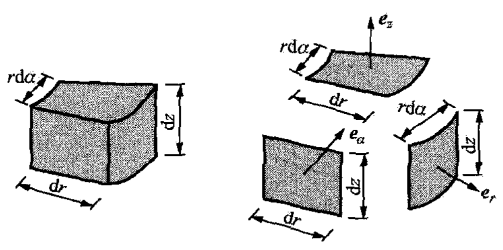

图 0 - 5 圆柱坐标系中的微分元

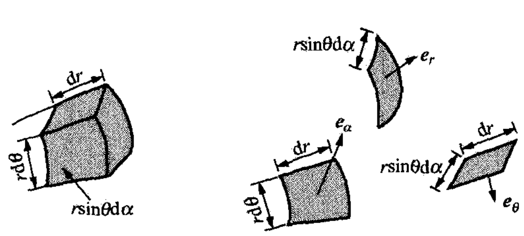

图 0 - 6 球面坐标系中的微分元

3. 球面坐标系

如图 0 - 6 所示，球面坐标系中的体元由 r、θ、α 分别增长 dr、$d\theta$、$d\alpha$ 而得，即

$$dv = r^2 drd\alpha d\theta \tag{0-7}$$

正基矢为方向的面微分元

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s}_r = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\alpha\boldsymbol{e}_r \quad \mathrm{d}\boldsymbol{s}_\theta = r\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\alpha\boldsymbol{e}_\theta \quad \mathrm{d}\boldsymbol{s}_\alpha = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\boldsymbol{e}_\alpha \tag{0-8}$$

一般的线微分元为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mathrm{d}r\boldsymbol{e}_r + r\mathrm{d}\theta\boldsymbol{e}_\theta + r\sin\theta\,\mathrm{d}\alpha\boldsymbol{e}_\alpha \tag{0-9}$$

三种坐标系中的线元、面元和体元列于表 0 - 2 中。

表 0 - 2　　坐标系中的线元、面元和体元

坐标系	线元 $\mathrm{d}l$	面元 $\mathrm{d}s$	体元 $\mathrm{d}v$
直角坐标	$\mathrm{d}x\boldsymbol{e}_x+\mathrm{d}y\boldsymbol{e}_y+\mathrm{d}z\boldsymbol{e}_z$	$\mathrm{d}y\mathrm{d}z\boldsymbol{e}_x+\mathrm{d}z\mathrm{d}x\boldsymbol{e}_y+\mathrm{d}x\mathrm{d}y\boldsymbol{e}_z$	$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$
圆柱坐标	$\mathrm{d}r\boldsymbol{e}_r+r\mathrm{d}\alpha\boldsymbol{e}_\alpha+\mathrm{d}z\boldsymbol{e}_z$	$r\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}z\boldsymbol{e}_r+\mathrm{d}r\mathrm{d}z\boldsymbol{e}_\alpha+r\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}r\boldsymbol{e}_z$	$r\mathrm{d}r\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}z$
球面坐标	$\mathrm{d}r\boldsymbol{e}_r+r\mathrm{d}\theta\boldsymbol{e}_\theta+r\sin\theta\mathrm{d}\alpha\boldsymbol{e}_\alpha$	$r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\alpha\boldsymbol{e}_r+r\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\alpha\boldsymbol{e}_\theta+r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\boldsymbol{e}_\alpha$	$r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\alpha$

三、坐标变量之间的关系

直角坐标是三种坐标系中最常用的坐标系，直角坐标系与圆柱坐标系的坐标变量之间的关系为

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha & r = \sqrt{x^2+y^2} \\ y = r\sin\alpha & \alpha = \arctan\dfrac{y}{x} \\ z = z & z = z \end{cases} \tag{0-10}$$

直角坐标系与球面坐标系的坐标变量之间的关系为

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\alpha & r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ y = r\sin\theta\sin\alpha & \theta = \arctan\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \\ z = r\cos\theta & \alpha = \arctan\dfrac{y}{x} \end{cases} \tag{0-11}$$

§0-2　矢量及其代数运算

一、标量和矢量

电磁学中的各种物理量可分为两类：标量（scalar）和矢量（vector）。

选定单位后仅用一个数值就可以表示其大小的物理量，称为标量，如电位、功率和能量等。我们说电位 20V，功率 1000W，能量 100J 都是标量。

不仅有大小，还有方向的物理量，称为矢量，如电磁力、电场强度、磁感应强度等。矢量在印刷体中常用黑斜体表示，如 $\boldsymbol{A}$，而在书写时常用斜体字母加箭头表示，如 $\vec{A}$。作图时常用一段有向线段表示，如图 0 - 7 所示的 $\boldsymbol{A}$ 代表从点 O 指向点 P 的矢量，箭头表示矢量的方向，线段的长度表示矢量的大小。

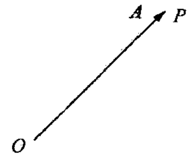

图 0 - 7　矢量的图示

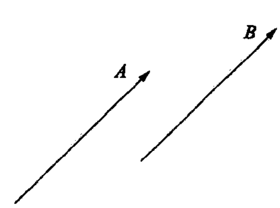

图 0 - 8　相等的两个矢量

长度为一个单位的矢量称为单位矢量。例如，矢量 $\boldsymbol{A}$ 的单位矢量指的是方向与 $\boldsymbol{A}$ 一致，大小为一个单位的矢量，可以用 $\boldsymbol{e}_A$ 或 $\boldsymbol{A}^0$ 表示。若 $\boldsymbol{A}$ 的模（即大小）用 A 表示，记为 $|\boldsymbol{A}|=A$，则 $\boldsymbol{A}$ 可以写成

$$\boldsymbol{A}=A\boldsymbol{A}^0 \tag{0-12}$$

在正交坐标系如直角坐标系中，矢量可以用坐标来表示。若以 $\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_y$、$\boldsymbol{e}_z$ 表示 x、y、z 三个坐标轴方向上的单位矢量，则从 O 指向终点 P 的矢量 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{A}(x,y,z)=A_x\boldsymbol{e}_x+A_y\boldsymbol{e}_y+A_z\boldsymbol{e}_z \tag{0-13}$$

其中，A_x、A_y、A_z 分别称为 $\boldsymbol{A}$ 在 x、y、z 三个坐标轴上的分量。由式（0-13）得矢量 $\boldsymbol{A}$ 的模

$$|\boldsymbol{A}|=A=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2} \tag{0-14}$$

二、矢量的方向余弦

在直角坐标系中，$\boldsymbol{A}$ 与的 x、y、z 三个坐标轴正向的夹角 α、β、γ，称为它的方向角，则

$$\begin{cases} A_x=A\cos\alpha \\ A_y=A\cos\beta \\ A_z=A\cos\gamma \end{cases} \tag{0-15}$$

其中，$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的方向余弦。有

$$\begin{cases} \cos\alpha=\dfrac{A_x}{\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}} \\ \cos\beta=\dfrac{A_y}{\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}} \\ \cos\gamma=\dfrac{A_z}{\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}} \end{cases} \tag{0-16}$$

可以看出，方向余弦分别是 $\boldsymbol{A}$ 的单位矢量 $\boldsymbol{A}^0$ 的三个坐标分量，即

$$\boldsymbol{A}^0=\cos\alpha\boldsymbol{e}_x+\cos\beta\boldsymbol{e}_y+\cos\gamma\boldsymbol{e}_z \tag{0-17}$$

三、矢量代数

定义了标量和矢量，我们接着介绍矢量运算的规则。矢量的加减和相乘不同于标量的加减乘除那么简单，而有含有更多的信息。

1. 矢量相等

$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是任意两个矢量，若它们相等，则表示它们大小相等，方向一致，如图 0-8 所示。

2. 矢量加、减法

矢量相加可以用图示法，也可以用解析法。图示法遵循平行四边形合成法则。如图 0-9 所示，有

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \tag{0-18}$$

用解析法，若

$$\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{e}_x+A_y\boldsymbol{e}_y+A_z\boldsymbol{e}_z$$
$$\boldsymbol{B}=B_x\boldsymbol{e}_x+B_y\boldsymbol{e}_y+B_z\boldsymbol{e}_z$$

则有

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(A_x+B_x)\boldsymbol{e}_x+(A_y+B_y)\boldsymbol{e}_y+(A_z+B_z)\boldsymbol{e}_z \tag{0-19}$$

矢量相减可以转换为相加，即

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})=(A_x-B_x)\boldsymbol{e}_x+(A_y-B_y)\boldsymbol{e}_y+(A_z-B_z)\boldsymbol{e}_z \tag{0-20}$$

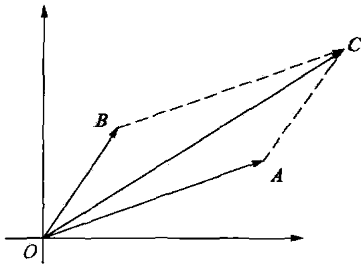

图 0 - 9　矢量相加

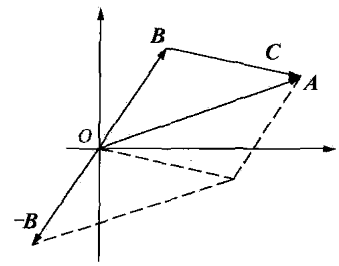

图 0 - 10　矢量相减

如图 0 - 10 所示，矢量相减的图示法中满足平行四边形法则或三角形法则。

另外，矢量相加时服从交换律和结合律

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A} \tag{0-21}$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) \tag{0-22}$$

3. 矢量的标积

两个矢量的标乘又称点乘（dot product），定义为

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cdot\cos\alpha=AB\cos\alpha \tag{0-23}$$

式中：α 为矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的夹角，两个矢量点乘的结果是一个标量。

在直角坐标系中，$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 点乘的解析式为

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z \tag{0-24}$$

矢量点乘服从交换律和分配律

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} \tag{0-25}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C} \tag{0-26}$$

矢量 $\boldsymbol{A}$ 与标量 a 的乘积仍是一个矢量。

由点乘的定义可知，在前面介绍的三种正交坐标系中，有

直角坐标系　$\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_x=1\quad \boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{e}_y=1\quad \boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_z=1$　(0 - 27a)

$$\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_y=0\quad \boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{e}_z=0\quad \boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_z=0 \tag{0-27b}$$

圆柱坐标系　$\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{e}_r=1\quad \boldsymbol{e}_\alpha\cdot\boldsymbol{e}_\alpha=1\quad \boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_z=1$　(0 - 27c)

$$\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{e}_\alpha=0\quad \boldsymbol{e}_\alpha\cdot\boldsymbol{e}_z=0\quad \boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_r=0 \tag{0-27d}$$

球坐标系　$\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{e}_r=1\quad \boldsymbol{e}_\theta\cdot\boldsymbol{e}_\theta=1\quad \boldsymbol{e}_\alpha\cdot\boldsymbol{e}_\alpha=1$　(0 - 27e)

$$\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{e}_\theta=0\quad \boldsymbol{e}_\theta\cdot\boldsymbol{e}_\alpha=0\quad \boldsymbol{e}_\alpha\cdot\boldsymbol{e}_r=0 \tag{0-27f}$$

4. 矢量的矢积

两个矢量的矢积又称叉乘，定义为

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\alpha\cdot\boldsymbol{e}_{A\times B}=AB\sin\alpha\cdot\boldsymbol{e}_{A\times B} \tag{0-28}$$

其中，α 为两矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的夹角，$\boldsymbol{e}_{A\times B}$ 为矢量 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 的单位矢量，$\boldsymbol{e}_{A\times B}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 张成的平面，且符合“右手法则”，如图 0 - 11 所示。可见，两矢量的叉乘的结果仍是一个矢量。

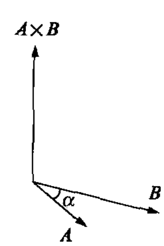

图 0 - 11　两个矢量的叉乘

从几何的角度看，两矢量的叉乘积，其大小实际上是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 张成的平行四边形的面积。

在直角坐标系中，$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的叉乘结果为

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=(A_yB_z-A_zB_y)\boldsymbol{e}_x+(A_zB_x-A_xB_z)\boldsymbol{e}_y+(A_xB_y-A_yB_x)\boldsymbol{e}_z \tag{0-29}$$

或采用更容易记忆的行列式的形式

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix} \tag{0-30}$$

矢量叉乘服从分配律和反交换律

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C} \tag{0-31}$$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A} \tag{0-32}$$

由叉乘的定义可知，在前面介绍的三种正交坐标系中，有

直角坐标系 $\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_x=0 \quad \boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{e}_y=0 \quad \boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_z=0$ (0-33a)

$\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_y=\boldsymbol{e}_z \quad \boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{e}_x \quad \boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_x=\boldsymbol{e}_y$ (0-33b)

圆柱坐标系 $\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{e}_r=0 \quad \boldsymbol{e}_\alpha\times\boldsymbol{e}_\alpha=0 \quad \boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_z=0$ (0-33c)

$\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{e}_\alpha=\boldsymbol{e}_z \quad \boldsymbol{e}_\alpha\times\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{e}_r \quad \boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_r=\boldsymbol{e}_\alpha$ (0-33d)

球坐标系 $\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{e}_r=0 \quad \boldsymbol{e}_\theta\times\boldsymbol{e}_\theta=0 \quad \boldsymbol{e}_\alpha\times\boldsymbol{e}_\alpha=0$ (0-33e)

$\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{e}_\theta=\boldsymbol{e}_\alpha \quad \boldsymbol{e}_\theta\times\boldsymbol{e}_\alpha=\boldsymbol{e}_r \quad \boldsymbol{e}_\alpha\times\boldsymbol{e}_r=\boldsymbol{e}_\theta$ (0-33f)

【例 0-1】 试用矢量推导三角形的正弦定律。

解 从图 0-12 可知

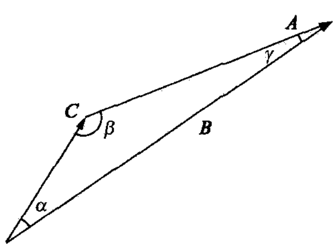

图 0-12 [例 0-1] 图

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}$$

而 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}=0$，所以有

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})=0$$

即

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$$

$$AB\sin\gamma=AC\sin(\pi-\beta)$$

或

$$\frac{B}{\sin\beta}=\frac{C}{\sin\gamma}$$

同理可以证明

$$\frac{A}{\sin\alpha}=\frac{C}{\sin\gamma}$$

因此，可得到三角形的正弦定律

$$\frac{A}{\sin\alpha}=\frac{B}{\sin\beta}=\frac{C}{\sin\gamma}$$

5. 矢量运算在各种坐标系矢量变换中的应用

圆柱坐标中的基本单位矢量在直角坐标基本单位矢量上的投影如图 0-13 所示，因为有 $\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_r=\cos\alpha$，$\boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{e}_r=\sin\alpha$，$\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_\alpha=-\sin\alpha$，$\boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{e}_z=\cos\alpha$

则

$$\boldsymbol{e}_r=\cos\alpha\boldsymbol{e}_x+\sin\alpha\boldsymbol{e}_y \tag{0-34a}$$

$$\boldsymbol{e}_\alpha=-\sin\alpha\boldsymbol{e}_x+\cos\alpha\boldsymbol{e}_y \tag{0-34b}$$