简明微积分教程

高印珠 编

科学出版社

简明微积分教程

高印珠　编

科 学 出 版 社
北　京

内容简介

本书是南京大学人文社会科学本科生的数学基础课教材(一学期，共72课时)。内容包括函数、极限、一元函数微分学、一元函数积分学和多元函数微积分学。本书注重理论和方法的阐述；配置了200多幅插图，一些重要、典型的函数都给出了精准图像；习题难易适当，并附有参考答案。

本书可作为综合大学、高等师范院校的文科数学基础课教材，也可作为中学数学教师、理工科大学生以及具有高中以上文化程度的广大读者学习微积分的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

简明微积分教程/高印珠编. —北京：科学出版社，2012
ISBN 978-7-03-035130-2
Ⅰ. ①简… Ⅱ. ①高… Ⅲ. ①微积分－高等学校－教材
Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第159342号

责任编辑：刘燕春 曾佳佳 罗 吉/责任校对：黄 海
责任印刷：赵德静/封面设计：许 瑞

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京佳艺恒彩印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2012年7月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2012年7月第一次印刷 印张：19 3/4
字数：400 000

定价：38.00元

前　言

《简明微积分教程》是为南京大学人文社会科学 (非经济类) 专业本科生编写的大学数学基础课教材. 本课程开设一学期, 每周 4 课时, 共 72 课时.

为使文科学生在一学期内对微积分全貌有更多理解, 掌握微积分学的基本思想方法和最核心的基本内容, 本书在编写过程中作了如下安排:

一、精选了微积分学 (从一元函数微积分学到二元函数微积分学) 中既有理论意义, 又有广泛应用的基本概念、重要定理和计算方法等内容.

二、在注意内容系统性和逻辑性的同时, 也注重理论和方法的阐述, 尽力展示数学以简单语言解释复杂、自然的现象之美妙, 不过于追求严密性和技巧性. 有些定理和例子的证明在附录 A 中给出, 供有兴趣的学生阅读.

三、配置了 200 多幅插图, 一些重要、典型的函数都给出了精准的图像, 并仔细编配了相当数量难易适当的习题, 以便降低学习难度, 增加学习兴趣, 使学生从直观上更好地把握相关概念与性质和熟练应用所学的基本技能.

四、第三章的泰勒定理这一节没有配置习题, 不列入考试范围. 第四章 4.8 节标记了 "*" 号, 教师可根据课时总数和学生实际情况决定是否讲授.

五、附录 B 选编了本课程考试用过的试卷; 附录 C 是习题参考答案, 其中部分题目有详解、图示或提示, 以辅助、扩展学生对正文内容的理解; 附录 D、E 是常用数学公式、数学归纳法及希腊字母表, 这些可使本书使用起来更为方便.

在本书编写过程中, 朱晓胜、黄卫华、范红军、陈仲、丁南庆、廖良文等教授提出了许多宝贵意见和建议; 师维学教授用 MetaPost 绘制了全部插图, 在用 LaTex 排版方面给予了许多帮助; 本书的编写和出版得到了数学系领导和国家自然科学基金 "南京大学数学基地" 项目 (J0830101) 的大力支持, 编者借此机会一并表示衷心感谢!

由于水平有限, 书中的缺点、错误和不妥之处在所难免, 恳切期望专家、同行及广大读者批评指正.

编　者

2012 年 4 月于南京大学

目　　录

前言

第一章　函数 …… 1

1.1　集合 …… 1

1.2　函数的概念 …… 4

习题 1.2 …… 8

1.3　函数的几种特性 …… 9

习题 1.3 …… 11

1.4　反函数与复合函数 …… 12

习题 1.4 …… 16

1.5　初等函数 …… 16

习题 1.5 …… 19

第二章　极限 …… 20

2.1　数列极限 …… 20

2.1.1　数列极限的概念 …… 20

2.1.2　收敛数列的性质与运算 …… 25

2.1.3　数列极限存在的两条准则 …… 29

习题 2.1 …… 33

2.2　函数极限 …… 34

2.2.1　函数极限的概念 …… 34

2.2.2　函数极限的性质、运算及存在条件 …… 42

2.2.3　两个重要极限 …… 47

2.2.4　无穷小量与无穷大量 …… 51

习题 2.2 …… 59

2.3　函数的连续性 …… 63

2.3.1　函数连续性的定义 …… 63

2.3.2　函数的间断点 …… 66

2.3.3　连续函数的运算 …… 68

2.3.4　初等函数的连续性 …… 71

2.3.5　闭区间上连续函数的基本性质 …… 73

习题 2.3 …… 75

第三章 一元函数微分学 …… 77

3.1 导数与微分 …… 77

3.1.1 导数的概念 …… 77

3.1.2 导数的四则运算法则 …… 88

3.1.3 反函数的导数 …… 92

3.1.4 复合函数的导数 …… 93

3.1.5 初等函数的导数 …… 95

3.1.6 高阶导数 …… 99

3.1.7 微分 …… 101

习题 3.1 …… 109

3.2 微分学基本定理 …… 111

3.2.1 中值定理 …… 112

3.2.2 洛必达法则 …… 118

3.2.3 泰勒定理 …… 125

习题 3.2 …… 131

3.3 导数的应用 …… 133

3.3.1 函数的单调性与极值 …… 133

3.3.2 函数的凹凸性与拐点 …… 138

3.3.3 曲线的渐近线 …… 140

3.3.4 函数的作图 …… 143

习题 3.3 …… 145

第四章 一元函数积分学 …… 148

4.1 不定积分与原函数 …… 148

习题 4.1 …… 150

4.2 不定积分的性质与基本积分表 …… 151

习题 4.2 …… 153

4.3 基本积分法 …… 154

4.3.1 第一换元积分法 …… 154

4.3.2 第二换元积分法 …… 158

4.3.3 分部积分法 …… 161

习题 4.3 …… 165

4.4 定积分的概念 …… 168

习题 4.4 …… 173

4.5 定积分的性质 …… 173

习题 4.5 …… 175

4.6 定积分的计算 …… 176

4.6.1 变上限的定积分 …… 176

4.6.2 牛顿－莱布尼茨公式 …… 179
4.6.3 定积分换元法 …… 181
4.6.4 定积分分部积分法 …… 184
习题 4.6 …… 185
4.7 应用定积分求平面图形的面积 …… 187
习题 4.7 …… 190
4.8 *广义积分 …… 191
习题 4.8 …… 197
第五章 多元函数微积分学 …… 198
5.1 极限与连续性 …… 198
习题 5.1 …… 204
5.2 偏导数与全微分 …… 205
习题 5.2 …… 214
5.3 二元函数的极值 …… 215
习题 5.3 …… 218
5.4 二重积分 …… 218
习题 5.4 …… 228
参考文献 …… 230
附录 A 本教程中一些定理和例子的证明 …… 231
附录 B 复习题及试卷示例 …… 253
附录 C 习题参考答案 …… 264
附录 D 常用数学公式和数学归纳法 …… 299
附录 E 希腊字母表 …… 304
附录 F 微积分创始人牛顿和莱布尼茨简介 …… 305

第一章　函数

函数的概念起源于对运动与变化的定量研究. 伽利略 (G. Galilei) 的落体运动定律, 爱因斯坦 (A. Einstein) 的质能转换公式都是用函数概念表达的. 微积分学的主要研究对象是函数. 本章将对中学已讲过的函数的概念和性质进行较系统的复习, 并作一些必要的补充, 为以后各章的学习作准备.

1.1　集合

本节简要介绍集合的基本概念、表示方法和本书常用的逻辑符号.

我们把具有某种性质的、确定的、有区别的事物的全体称为**集合**, 通常用大写字母 A, B, C 等表示. 集合中的事物称为**元素**, 常用小写字母 a, b, c 等表示. 若 a 是集合 A 的**元素**, 则称 a 属于 A, 记作 $a \in A$; 若 a 不是集合 A 的元素, 则称 a 不属于 A, 记作 $a \notin A$.

不含元素的集合称为**空集**, 记作 $\varnothing$. 若集合 A 只含有限个元素, 则称 A 是**有限集**. 若集合含无限多个元素, 则称它为**无限集**.

若集合 A 的任一元素都是集合 B 的元素, 则称 A 是 B 的**子集**, 记作 $A \subseteq B$. 若 $A \subseteq B$, 且存在 $b \in B$, 而 $b \notin A$, 则称 A 是 B 的**真子集**, 记作 $A \subsetneq B$. 空集是任何非空集合的真子集.

若集合 A 与 B 所含的元素完全相同, 则称 A 与 B **相等**, 记作 $A = B$. 显然, 对于集合 A 与 B, 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 则 $A = B$.

集合一般有两种表示方法:

(1) **列举法**: 把集合所包含的元素列举出来, 例如, $B = \{-1,\ 1\}$, $C = \{0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$;

(2) **示性法**: 给出集合的元素具有的性质, 写成

$$A = \{x \mid x \text{ 具有性质 } P\},$$

例如,

$$D = \{x \mid x \text{ 是满足 } x^2 - 1 = 0 \text{ 的实数}\},$$

$$E = \{x \mid x \text{ 是自然数}\},$$

$$F=\{x \mid x^2<0,\ x\text{ 是实数}\},$$

显然, $B=D$ 是有限集, $C=E$ 是无限集, F 是空集.

以下是本书常用的一些集合:

(1) **正整数集** $\mathbf{N}=\{x \mid x$ 为正整数$\}=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$;

(2) **实数集** (或称**实直线**) $\mathbf{R}=\{x \mid x$ 为实数$\}=(-\infty,+\infty)$, 这里符号 ∞ 读作“无穷大”, $+\infty$ 读作“正无穷大”, $-\infty$ 读作“负无穷大”.

设 $a,\ b\in\mathbf{R}$, 且 $a<b$, 则 $\mathbf{R}$ 及以下 (1) ~ (8) 所表示的集合统称为**区间**:

(1) **闭区间** $[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b,\ x\in\mathbf{R}\}$;

(2) **开区间** $(a,b)=\{x \mid a<x<b,\ x\in\mathbf{R}\}$;

(3) **左闭右开区间** $[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b,\ x\in\mathbf{R}\}$;

(4) **左开右闭区间** $(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b,\ x\in\mathbf{R}\}$;

(5) $(a,+\infty)=\{x \mid x>a,\ x\in\mathbf{R}\}$;

(6) $[a,+\infty)=\{x \mid x\geqslant a,\ x\in\mathbf{R}\}$;

(7) $(-\infty,a)=\{x \mid x<a,\ x\in\mathbf{R}\}$;

(8) $(-\infty,a]=\{x \mid x\leqslant a,\ x\in\mathbf{R}\}$,

其中 a 和 b 均称为区间的**端点**, 左 (右) 边的端点称为**左 (右) 端点**, 区间 (1) ~ (4) 称为**有限区间**, $\mathbf{R}$ 及区间 (5) ~ (8) 称为**无限区间**.

二维欧氏平面 $\mathbf{R}^2=\{(x,y) \mid x,\ y\in\mathbf{R}\}$.

三维欧氏空间 $\mathbf{R}^3=\{(x,y,z) \mid x,\ y,\ z\in\mathbf{R}\}$.

$\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^2$ 及 $\mathbf{R}^3$ 的元素也称为**点**.

$\mathbf{R}^2$ 的点 (x,y) 常用 $P(x,y)$ 或 $M(x,y)$ 等来表示, 简记为 P 或 M.

$\mathbf{R}^3$ 的点 (x,y,z) 常用 $P(x,y,z)$ 或 $M(x,y,z)$ 等表示, 在不发生混淆的情况下, 也简记为 P 或 M.

对于集合 A 与 B, 定义如下集合:

集合 $\{x \mid x\in A$ 或 $x\in B\}$ 称为 A 与 B 的**并集**, 记为 $A\cup B$;

集合 $\{x \mid x\in A$ 且 $x\in B\}$ 称为 A 与 B 的**交集**, 记为 $A\cap B$;

集合 $\{x \mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$ 称为 A 与 B 的**差集**, 记为 $A\backslash B$.

集合 A 与 B 的并集、交集及差集如图 1.1.1 阴影部分所示.

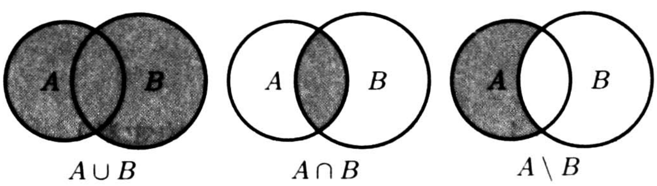

图 1.1.1

例如, 设 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{3,\ 4\}$, 则

$$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\},\qquad A\cap B=\{3\},\qquad A\backslash B=\{1,\ 2\}.$$

本书常用邻域和空心邻域的概念, 现定义如下, 其中 $\delta\in\mathbf{R}$ 且 $\delta>0$.

设 $a\in\mathbf{R}$, 点 a 的 **δ 邻域**是指集合

$$U_\delta(a)=(a-\delta,a+\delta),$$

点 a 的**空心 δ 邻域**是指集合

$$U_\delta^\circ(a)=U_\delta(a)\backslash\{a\}=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta).$$

设 $P_0(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$, 点 P_0 的 δ 邻域是指集合

$$U_\delta(P_0)=\{(x,y)\mid\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta,\quad x,\ y\in\mathbf{R}\}.$$

设 $P_0(x_0,y_0,z_0)\in\mathbf{R}^3$, 点 P_0 的 δ 邻域是指集合

$$U_\delta(P_0)=\{(x,y,z)\mid\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\delta,\quad x,\ y,\ z\in\mathbf{R}\}.$$

以下是本书常用的逻辑符号:

1. “$\forall$” 表示“对每一个”、“对任意一个”. 例如,

“$\forall\,x\in\mathbf{R}$” 表示“对任意一个实数 x”.

2. “$\exists$” 表示“存在某个”、“至少存在一个”. 例如,

“$\exists\,n\in\mathbf{N}$” 表示“在正整数集 $\mathbf{N}$ 中存在这样的数 n”.

3. “$\Leftrightarrow$” 表示“充分必要”、“等价于”. 例如, “$P_1\Leftrightarrow P_2$”表示“P_2 是 P_1 成立的充分必要条件”、“P_1 等价于 P_2”. 又如, 设 $\delta,\ a\in\mathbf{R}$ 且 $\delta>0$, 则

$$\begin{aligned}
|x-a|<\delta\quad&\Leftrightarrow\quad a-\delta<x<a+\delta\quad\Leftrightarrow\quad x\in(a-\delta,a+\delta),\\
0<x-a<\delta\quad&\Leftrightarrow\quad a<x<a+\delta\quad\Leftrightarrow\quad x\in(a,a+\delta),\\
0<a-x<\delta\quad&\Leftrightarrow\quad a-\delta<x<a\quad\Leftrightarrow\quad x\in(a-\delta,a).
\end{aligned}$$

1.2　函数的概念

一、函数的定义

定义 1.2.1 (映射) 给定非空集合 D 和 M, 若按对应法则 f, D 中每个元素 x, M 中有唯一确定的元素 y 与之对应, 则称 f 是 D 到 M 的**映射**, 记作

$$f: D \to M \quad \text{或} \quad y = f(x),\ x \in D,$$

其中 $y = f(x)$ 称为 x 在 f 下的**像**, x 称为 y 的**原像** (见图 1.2.1).

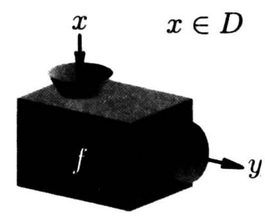

图 1.2.1

定义 1.2.2 设 $f: D \to M$.

(1) 若对于不同的 x_1, $x_2 \in D$, 有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 f 是**单射**;

(2) 若对于每一个 $y \in M$, 有 $x \in D$ 使得 $y = f(x)$, 则称 f 是**满射**;

(3) 若 f 既是单射又是满射, 则称 f 是 **一一对应**.

定义 1.2.3 设 $f: D \to M$, 且 $M \subseteq \mathbf{R}$.

(1) 若 $D \subseteq \mathbf{R}$, 则称 f 是 D 上的**一元函数**[①], 称 x 为**自变量**, y 为**因变量**.

(2) 若 $D \subseteq \mathbf{R}^2$, 则称 f 是 D 上的**二元函数**, 记为

$$z = f(x, y),\ (x, y) \in D \quad \text{或} \quad z = f(P),\ P \in D,$$

其中 P 表示点 $P(x, y)$, 称 x, y 为自变量, z 为因变量.

(3) 若 $D \subseteq \mathbf{R}^3$, 则称 f 是 D 上的**三元函数**, 记为

$$u = f(x, y, z),\ (x, y, z) \in D \quad \text{或} \quad u = f(P),\ P \in D,$$

其中 P 表示点 $P(x, y, z)$, 称 x, y 和 z 为自变量, u 为因变量.

---

① 函数的概念最早由苏格兰数学家和天文学家葛列格里 (J. Gregory, 1638 ~ 1675) 在 1667 年定义: "函数是这样的一个量: 它是从一些其他量经过一系列的代数运算而得到的, 或者经过任何其他可以想象到的运算得到的". 当时的数学家们主要研究具体函数、具体计算, 不大考虑抽象问题. 1667 ~ 1837 年, 函数的概念经过了一系列的演变. 德国数学家狄利克雷 (P. G. L. Dirichlet, 1805 ~ 1859) 用一种新观点来观察数学, 在 1837 年给出了 (一元) 函数的定义: "如果给定区间上的每一个 x 值, 都有唯一的 y 值与它对应, 那么 y 是 x 的函数". 从此, 人们开始考察和研究函数的各种性质, 数学实现了从具体到抽象、从研究计算到研究性质、从研究现实世界到研究理想世界的三个转变. 直到 19 世纪集合论诞生后, 才出现比函数概念更一般的映射的概念. 映射的概念是德国数学家戴德金 (J. W. R. Dedekind, 1831 ~ 1916) 在 1887 年给出的.

以上三种情况中, 集合 D 称为函数 f 的**定义域**, 对于 $w\in D$, $y=f(w)$ 称为 f 在点 w 的**函数值**, 集合

$$f(D)=\{f(w)\mid w\in D\}$$

称为函数 f 的**值域**, 称函数 f 在 E 上有定义是指 $E\subseteq D$, 当 E 为区间 (a,b), $(a,+\infty)$, $(-\infty,a)$, $\mathbf{R}$ 或某点的 (空心) 邻域时, 通常也称 f 在 E 内有定义.

如果函数用一个分析式 $y=f(x)$ 表达, 当没有标明它的定义域时, 我们就认为 f 的定义域是使这一表达式有意义的全体 x 的集合. 例如,

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1},\quad g(x)=\frac{1}{x}\quad 和\quad h(x)=\cos x$$

的定义域分别为 $\mathbf{R}\backslash\{1\}$, $\mathbf{R}\backslash\{0\}$ 和 $\mathbf{R}$.

若函数 f 与 g 有相同的定义域 D, 而且对于任意 $x\in D$, 有 $f(x)=g(x)$, 则称 f 与 g **相等**.

例如, $f(x)=|x|$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$ 相等, $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $g(x)=x+1$ 不相等.

设一元函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D, 则 $\mathbf{R}^2$ 的子集

$$\{(x,y)\mid y=f(x),\ x\in D\}$$

称为函数 f 的**图像**.

图 1.2.2 的三个图中, 前两个是一元函数的图像, 第三个不是.

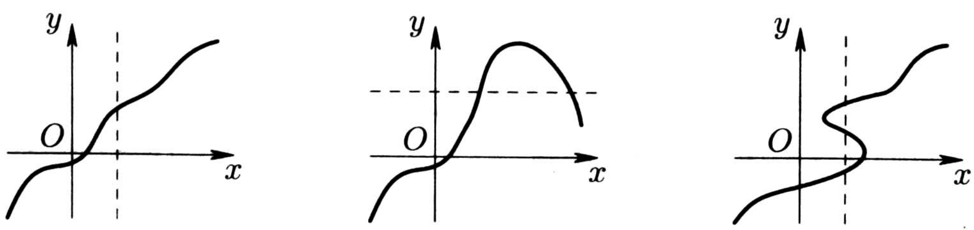

图 1.2.2

注 一条垂线与一个函数的图像至多相交于一点 (当此直线通过定义域 D 的点时交于一点, 否则不交).

本书的前四章主要研究一元函数, 第五章主要研究二元函数, 相关结论有些可推广到三元或更多元函数的情形.

二、函数的四则运算、表示法

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域分别为 D_1 和 D_2, 且 $D = D_1 \cap D_2 \neq \varnothing$. 定义 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 D 上的和、差及积的运算如下:

$$F(x) = f(x) + g(x),\ x \in D,$$
$$G(x) = f(x) - g(x),\ x \in D,$$
$$H(x) = f(x)g(x),\ x \in D.$$

当 $D^* = D \backslash \{x \mid g(x) = 0\} \neq \varnothing$ 时, 定义 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的商如下:

$$L(x) = \frac{f(x)}{g(x)},\ x \in D^*.$$

一元函数最常用的表示法有如下三种:

1. 解析法: 即自变量和因变量之间的函数关系借助公式 (或分析式) 表达, 例如, $y = x^2$, $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, $y = \sqrt{1+\sin x}$ 等. 本书主要讨论用解析法表示的函数, 这对理论研究很方便.

2. 表格法: 即将一系列自变量的值与对应的函数值列成表, 如对数表、三角函数表等. 此表示法不但可以避免函数研究中麻烦的计算, 而且可以表示不知解析表达式的函数, 在社会实践中经常使用, 例如,

2011 年上半年我国消费者物价指数 (CPI) 表①

x (月份)	1	2	3	4	5	6
y (CPI)	104.90	104.90	105.40	105.30	105.50	106.40

3. 图示法: 即函数可由坐标平面上的曲线来表示, 如自动记录器, 可以把大气压力与时间的关系用曲线表示出来.

有些函数在其定义域不同部分用不同的公式表达, 我们称这类函数为**分段函数**.

例 1.2.1 $y = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$

此函数记作 $y = \operatorname{sgn} x$, 称为**符号函数**②, 其图像见图 1.2.3.

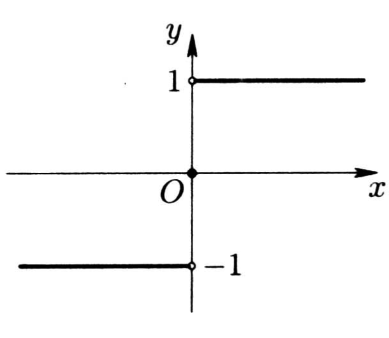

图 1.2.3

① 数据来自国家统计局网站 http://www.stats.gov.cn/.

② sgn 是拉丁文 signum (符号) 的缩写.

例 1.2.2 取整函数:

$$y = [x],$$

其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 显然, 当 $x \in [n,\ n+1)$ (n 为整数) 时, $y = n$ (见图 1.2.4).

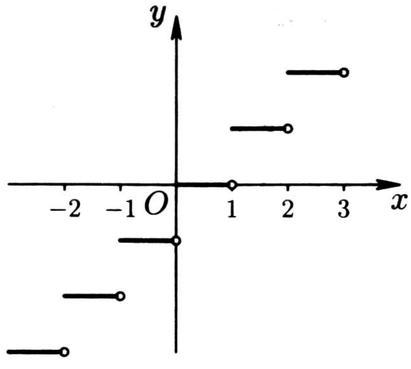

图 1.2.4

有些函数只能用语言来描述.

例 1.2.3 狄利克雷①函数:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数}, \end{cases}$$

此函数的定义域为 $\mathbf{R}$ (其示意图见图 1.2.5).

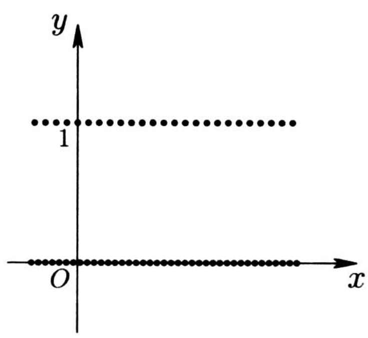

图 1.2.5

例 1.2.4 设 $A \subset \mathbf{R}$, 定义函数

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \in \mathbf{R} \backslash A, \end{cases}$$

此函数称为数集 A 上的**特征函数**. 特别地, 当 A 是有理数集时, 函数 $\chi_A(x)$ 就是狄利克雷函数 $D(x)$. 当

$$A = (-\infty, -1), \quad A = [0,1] \quad 及 \quad A = (1,2)$$

时, 函数

$$\chi_{(-\infty,-1)}(x), \quad \chi_{[0,1]}(x) \quad 及 \quad \chi_{(1,2)}(x)$$

的图像分别见图 1.2.6 中的左图、中图和右图.

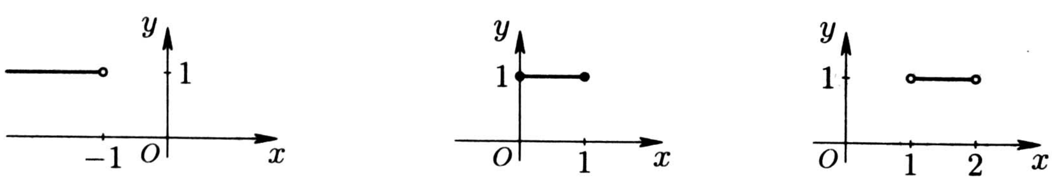

图 1.2.6

① 狄利克雷 (P. G. L. Dirichlet) 在 1829 年给出这个函数. 它是历史上第一个间断函数, 没有解析式, 图像不能准确显示, 无实际背景, 它的出现使函数的概念从解析式、几何直观以及客观世界的束缚中解放出来.

例 1.2.5 黎曼[①]函数:

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & x=\dfrac{m}{n}\in(0,1)\ (m,\ n\ \text{为正整数},\ \dfrac{m}{n}\ \text{为既约分数}),\\ 0, & x=0,\ 1\ \text{或}\ (0,1)\ \text{中的无理数},\end{cases}$$

其示意图如图 1.2.7 所示.

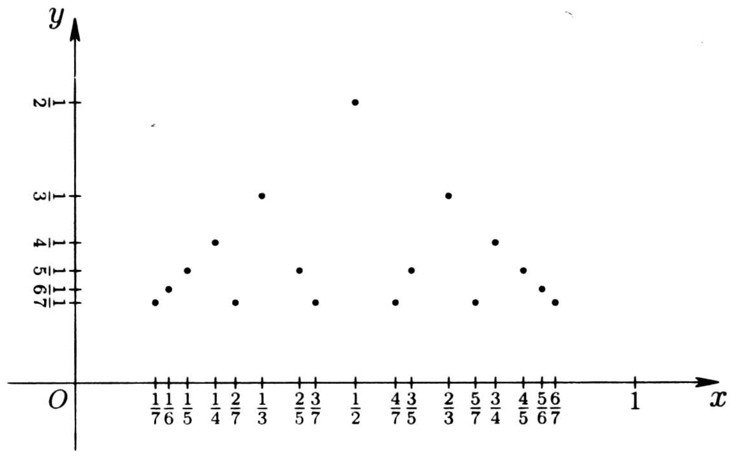

图 1.2.7

习题 1.2

1. 求下列函数的定义域:

(1) $\dfrac{\sin x}{x}$; (2) $\dfrac{2x}{\cos x}$;

(3) $x^2+\sqrt{x-1}$; (4) $\cos x+\cot x$;

(5) $\dfrac{5x+1}{x^2-3x+2}$; (6) $\sqrt{2+x-x^2}$;

(7) $\lg(x^2-9)$; (8) $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

2. 求下列函数的值域:

(1) $5+\cot x$; (2) $\sqrt{x}-1$;

(3) $2-3^{-x}$; (4) $\sqrt{1-x^2}$.

3. 设函数 $f(x)=x^2+3x+5$, 求 $f(-1)$, $f(-x)$, $f(x+h)$.

① 黎曼 (B. Riemann, 1826 ~ 1866) 是德国数学家.

4. 作出函数 $y=\dfrac{|x|}{x}$ 与 $y=\dfrac{|x-1|}{x-1}$ 的图像.

5. (1) 设函数 $f(x)=|x|$, $h>0$. 求 $f(1)$, $f(0)$, $f(-1)$, $f(h)-f(0)$, $f(-h)-f(0)$;

(2) 作出函数 $y=|x|$ 的图像, 并用其作出 $y=|x|-1$, $y=|x|+1$, $y=-|x|$, $y=-|x|+1$, $y=|x-1|$, $y=|x+1|$ 以及 $y=|x-1|+1$ 的图像.

1.3 函数的几种特性

定义 1.3.1 (有界性) 设函数 $f(x)$ 在 E 上有定义. 若存在常数 $M>0$, 使得对于任意的 $x\in E$, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)|\leqslant M, \tag{1.1}$$

则称 $f(x)$ 在 E 上**有界**, 否则称 $f(x)$ 在 E 上**无界**①.

若 (1.1) 式在 $f(x)$ 的定义域上成立, 则称 $f(x)$ 有界, M 为 $f(x)$ 的界. 若函数 $f(x)$ 以 M 为界, 因为对于定义域内的一切点 x, 有 $-M\leqslant f(x)\leqslant M$, 所以 $y=f(x)$ 的图像介于平行线 $y=-M$ 与 $y=M$ 之间.

例 1.3.1 $y=\cos x$ 为有界函数, 因为 $|\cos x|\leqslant 1$, 1 为其界 (任何一个大于 1 的数都是它的界); 符号函数 $y=\operatorname{sgn}x$ 与狄利克雷函数 $y=D(x)$ 是有界的; $y=\tan x$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{8},\dfrac{\pi}{8}\right)$ 及 $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上均是有界的, 但在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上无界; 取整函数 $y=[x]$ 是无界的. $y=2\sin x$, $y=\sin x$, $y=\dfrac{1}{2}\sin x$ 均为有界函数 (见图 1.3.1).

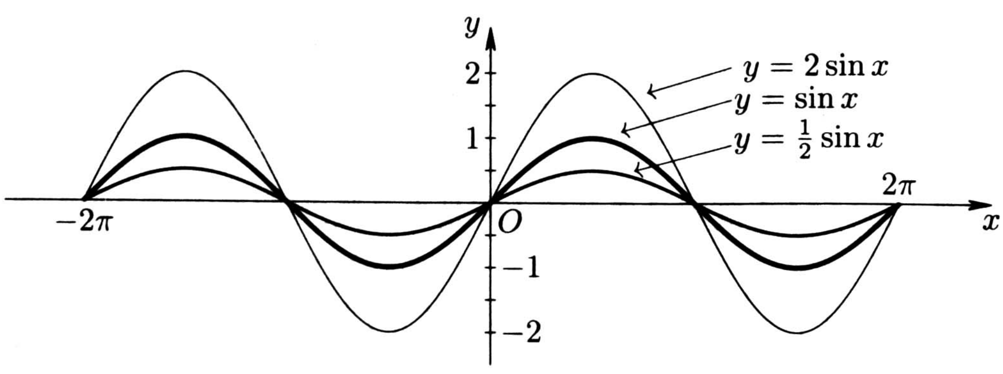

图 1.3.1

定义 1.3.2 (单调性) 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义. 若对于 I 上的任意两点

① 定义如下: 对于任何一个正数 M (无论 M 多大), 都存在 $x_0\in E$ 使得 $|f(x_0)|>M$, 则称 $f(x)$ 在 E 上无界.

x_1 与 x_2, 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ [或 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$] 成立, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上**单调递增** (或**单调递减**).

若将上面的 "$\leqslant$" (或 "$\geqslant$") 改成 "$<$" (或 "$>$"), 则称 $f(x)$ 在区间 I 上**严格单调递增** (或**严格单调递减**).

以上四类函数统称为**单调函数**, I 称为**单调区间**.

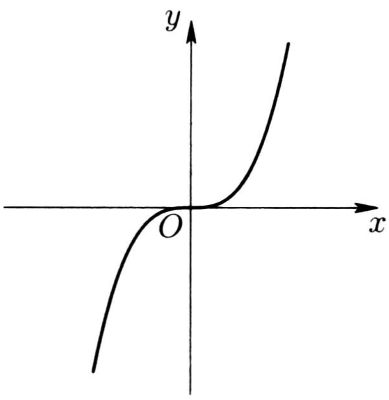

图 1.3.2

例 1.3.2 函数 $y = x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上是严格单调递增的, 因为当 x_1 与 x_2 异号时, 若 $x_1 < x_2$, 则总有 $x_1^3 < x_2^3$. 当 x_1 与 x_2 同号时, 因等式 $x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$ 右边第二个因式恒为正, 故 $x_1^3 - x_2^3$ 与 $x_1 - x_2$ 同号. 因 $x_1 < x_2$, 故 $x_1^3 < x_2^3$ (见图 1.3.2).

例 1.3.3 符号函数 $\operatorname{sgn} x$ 与取整函数 $[x]$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 函数 $|x|$ 在 $(-\infty, 0]$ 上严格单调递减, 在 $[0, +\infty)$ 上严格单调递增, 在 $\mathbf{R}$ 上不是单调函数. 狄利克雷函数 $D(x)$ 不是单调函数.

定义 1.3.3 (**奇偶性**) 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 即当 $x \in D$ 时必有 $-x \in D$. 若对任意 $x \in D$, 都有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为**奇函数**; 若对任意 $x \in D$, 都有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

由定义知, 奇函数的图像关于原点对称, 偶函数的图像关于 y 轴对称. 若奇函数 $f(x)$ 的定义域 D 包含原点 O, 则 $f(0) = 0$.

例 1.3.4 函数 $\sin x$, $\tan x$, x^3, $\operatorname{sgn} x$ 以及 $\sin \dfrac{1}{x}$ (见图 2.2.9) 均为奇函数;

函数 $\cos x$, x^2, $|x|$ 以及 $\cos \dfrac{1}{x}$ (见图 2.2.10) 均为偶函数;

函数 $f(x) = \sin x + \cos x$ 既不是偶函数也不是奇函数: 因为 $f(0) = 1 \neq 0$, 所以不是奇函数; 又 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$, $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$, 这样 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \neq f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$, 所以也不是偶函数;

取整函数 $f(x) = [x]$ 既不是偶函数也不是奇函数:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -1,\ f\left(\frac{1}{2}\right) = 0,\ f\left(-\frac{1}{2}\right) \neq f\left(\frac{1}{2}\right),\ \text{且}\ f\left(-\frac{1}{2}\right) \neq -f\left(\frac{1}{2}\right).$$

定义 1.3.4 (**周期性**) 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 若存在常数 $T > 0$, 使得对任意 $x \in D$, $x \pm T \in D$ 且

$$f(x + T) = f(x) \tag{1.2}$$