



荣德基 总主编

名师教师



# 点拔

## 高考数学 理科

配人教试验修订版

用科学的CETC差距理论策划创作

考点脉络化 考题高考化 考情精准化 考招奇效化

学苑出版社

学生  
+  
用书





荣德基 总主编

特级教师

# 点·线·面



## 高考数学 (理科)

学生用书

(配人教试验修订版)



总主编

NLIC2970260028

本册主编:张丽敏 刘爱玲

王明献 冯献玉

编写团队:荣德基高考命题研究专家组

学苑出版社

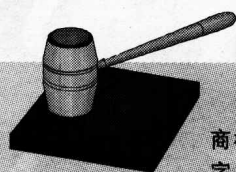


## 图书在版编目(CIP)数据

特级教师点拨. 高考数学/荣德基主编. —11版. —北京:学苑出版社,2007.4  
ISBN 978-7-5077-1288-9

I. 特... II. 荣... III. 数学课-高中-升学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 008461 号



# 律 师 声 明

据读者投诉并经调查,近来发现某些出版社在出版书籍时假冒、盗用注册商标“典点”二字,或者使用与“典点”读音、外形相近、相似的其他文字。这种违背诚信原则,混淆视听,欺骗和误导读者的行为,不仅严重违反了《中华人民共和国商标法》等一系列法律法规,侵害了北京典点瑞泰图文设计有限责任公司及读者的合法权益,而且还违背了市场经济社会公平竞争的基本准则,严重扰乱了市场秩序。为此,本律师受北京典点瑞泰图文设计有限责任公司的委托,发表如下声明:

1. “典点”二字为专用权属于北京典点瑞泰图文设计有限责任公司的注册商标,核定的商标类别为第16类印刷出版物和第41类书籍出版,商标注册证书号分别为:3734778和3734779。

2. 任何单位或者个人,未经北京典点瑞泰图文设计有限责任公司的书面许可使用,在书籍印制、出版时使用“典点”或者与此二字字形、字音相近、相似的其他文字为商标的,均属非法,北京典点瑞泰图文设计有限责任公司保留向任何一个印刷、出版、销售上述书籍的侵权人追究法律责任的权利。

3. 本律师同时提醒广大读者,购买书籍时请认准注册商标“典点”。

北京中济律师事务所

律师:段彦

侵权举报电话:(010) 81671395

2007年3月15日

责任编辑:王芳荣

封面设计:典点瑞泰

出版发行:学苑出版社

社址:北京市丰台区南方庄2号院1号楼 100079

网 址:www.book001.com

电子信箱:xueyuanyg@sina.com xueyuan@public.bta.net.cn

印 刷 厂:郑州欣隆印刷有限公司

开本尺寸:890×1240 1/16

印 张:25

字 数:756千字

版 次:1997年9月第1版 2007年4月第11版

印 次:2007年4月第1次印刷

定 价:38.60元

版权声明/版权所有 翻印必究

Come on!

打开你的心窗

“人生的道路都是由心来描绘的。所以，无论自己处于多么严酷的境遇之中，心头都不应为悲观的思想所萦绕。”

——稻盛和夫

## 第一篇章——节拍

打着《春暖花开》的节拍

春季已大踏步地走来

快点吧！打开你的心窗

对着春天许个心愿

阳光就会洒下来

柳絮儿正竞相地飘飞

你别总是站在操场发呆

把自信和速度送给你的脚步

让世界因你更精彩……

春季已大踏步地走来

快点吧！打开你的心窗

大地懂得打开心窗

于是被阳光染成金黄

山川懂得打开心窗

于是被清风拂成嫩绿

同学们懂得打开心窗

于是希望凝成水晶

四季在变换

有冷就有暖

春天是否让你好爽

清晨醒来揉揉你的眼

你会发现世界是那么的美……



## 第二篇章——春曲

《特级教师点拨高考》定能打开你的心窗！助你来年的六月五彩缤纷，莺歌燕舞！  
二百多个朝朝暮暮，日光与月光交替映照，《特级教师点拨高考》孕育于辛勤的汗水中；二百多个日日夜夜，灯光与星光交相辉映，《特级教师点拨高考》绽放于千万双求知的眼睛中！

《特级教师点拨高考》是冬季的瑞雪，汇集了“荣德基教育研究中心”“资深高考命题研究专家组”“顶级名校特级教师”三路强将付出的情；《特级教师点拨高考》是春天的鲜花，绽放了荣德基教辅专业团队贴心的爱；《特级教师点拨高考》是秋天的庄稼，收获莘莘学子美好的大学梦；《特级教师点拨高考》是高考场上忆起的良师，定能演绎理想的美丽华章！

柳絮儿也飞了，心情也亮了  
冰封的思绪，请用笑容解开  
风也变柔了，云也变清了  
烦恼的往事，被精卫投进汹涌的东海  
春季已大踏步地走来，快点吧！打开你的心窗  
同学们，快把耳朵叫醒，听！小草抽芽，蝓蝓弹琴……



荣德基

2007年4月于北京



# 目录

# CONTENTS

## 第一章 集合与简易逻辑

- 1 高考导航
- 1 第1讲 集合与集合运算
- 4 第2讲 不等式的解法
- 8 第3讲 逻辑联结词、四种命题与充分必要条件

## 第二章 函数

- 12 高考导航
- 12 第4讲 映射与函数、函数的定义域、解析式
- 16 第5讲 函数的单调性
- 20 第6讲 函数的奇偶性与周期性
- 23 第7讲 反函数
- 26 第8讲 指数函数与对数函数
- 31 第9讲 函数的图象
- 34 第10讲 函数的值域与最值
- 39 第11讲 利用函数知识解应用题
- 42 第12讲 函数的综合应用

## 第三章 数列

- 47 高考导航
- 47 第13讲 数列的概念
- 52 第14讲 等差数列与等比数列
- 57 第15讲 数列的应用

## 第四章 三角函数

- 61 高考导航
- 61 第16讲 三角函数的概念、同角三角函数的关系、诱导公式
- 66 第17讲 两角和与差、二倍角的公式
- 70 第18讲 三角函数的化简求值和证明
- 73 第19讲 三角函数的图象与性质
- 77 第20讲 函数  $y = A\sin(\omega x + \varphi)$  的图象和性质

- 82 第21讲 三角函数的最值
- 86 第22讲 三角函数的应用

## 第五章 平面向量

- 90 高考导航
- 90 第23讲 向量的概念、向量的加法、减法、实数与向量的积
- 94 第24讲 向量的数量积
- 98 第25讲 两点间距离公式、线段的定比分点与图形的平移
- 101 第26讲 解斜三角形

## 第六章 不等式

- 106 高考导航
- 106 第27讲 不等式的概念和性质
- 109 第28讲 不等式的证明
- 112 第29讲 绝对值不等式和含参数的不等式的解法
- 116 第30讲 不等式的应用

## 第七章 直线和圆的方程

- 120 高考导航
- 120 第31讲 直线的方程、两直线的位置关系
- 126 第32讲 简单的线性规划
- 130 第33讲 圆的方程、直线和圆的位置关系

## 第八章 圆锥曲线方程

- 136 高考导航
- 136 第34讲 椭圆
- 142 第35讲 双曲线
- 147 第36讲 抛物线
- 151 第37讲 直线和圆锥曲线的位置关系
- 155 第38讲 曲线和方程
- 159 第39讲 圆锥曲线的综合问题
- 164 第40讲 解析几何与向量



## 第九章 直线、平面、简单几何体

- 170 高考导航
- 170 第41讲 平面及其基本性质
- 173 第42讲 空间两直线
- 178 第43讲 直线和平面的位置关系
- 182 第44讲 直线与平面所成的角、三垂线定理
- 186 第45讲 两个平面平行的判定和性质
- 189 第46讲 二面角与两个平面垂直
- 194 第47讲 棱柱
- 198 第48讲 棱锥
- 203 第49讲 球
- 206 第50讲 空间距离
- 210 第51讲 平面图形的翻折
- 214 第52讲 空间向量及其运算
- 217 第53讲 空间向量的坐标运算

## 第十章 排列、组合、二项式定理和概率

- 223 高考导航
- 223 第54讲 分类计数原理与分步计数原理
- 225 第55讲 排列
- 228 第56讲 组合
- 231 第57讲 排列与组合的综合应用
- 233 第58讲 二项式定理
- 236 第59讲 随机事件的概率

- 238 第60讲 互斥事件有一个发生的概率
- 241 第61讲 相互独立事件同时发生的概率

## 第十一章 概率与统计

- 246 高考导航
- 246 第62讲 离散型随机变量的分布列
- 249 第63讲 离散型随机变量的期望和方差
- 252 第64讲 统计

## 第十二章 极限

- 257 高考导航
- 257 第65讲 数学归纳法
- 261 第66讲 数列的极限
- 265 第67讲 函数的极限与连续性

## 第十三章 导数

- 269 高考导航
- 269 第68讲 导数的概念及性质
- 273 第69讲 导数的应用

## 第十四章 数系的扩充——复数

- 277 高考导航
- 277 第70讲 复数的有关概念
- 279 第71讲 复数的代数形式及运算
- 283 参考答案及点拨



# 第一章 集合与简易逻辑

## 高考导航

### 高考命题趋势分析及应对策略

#### (一) 高考命题趋势分析

依据新课程标准,本章知识中集合语言作为基本的数学语言,主要用来表示有关的数学对象和提高运用数学语言进行交流的能力;简易逻辑主要用来准确表达数学内容和表述、论证自己的思想.因此2008年高考将继续体现本章知识的工具作用,多以小题形式出现,也会渗透在解答题的表述与推理之中,

1. 集合的考查重点是集合与集合之间的关系,将加强对集合的计算与化简的考查.

2. 含绝对值不等式、一元二次不等式及分式不等式的解法是高考必考内容.考查的方式主要有两种:一是单独考查,即有些年份求解含参数的不等式以大题的形式出现;二是作为中间过程常与不等式、三角、解析几何综合进行考查,试题以容易题和中档题为主.

3. 对于“充分条件与必要条件”、“命题的真伪”,主要是对数学概念要有准确的记忆和深层次的理解.以代数、三角、解析几何、立体几何的内容为载体,考查逻辑知识的运用(即判断命题的真与假)以及两个命题的充要条件.“充要条件”是每年高考的必考内容,单纯考查充要条件的题目一般是中档题,但有时与其他知识融合在一起,特别是从条件的充要性的角度来求解的综合题往往有一定的难度.

#### (二) 2008年 高考复习应对策略

1. 在复习中首先把握基础性知识,深刻理解本单元的基本

知识点、基本数学思想和基本数学方法.重点掌握集合、充分条件与必要条件的概念和运算方法.

2. 复习时把本章内容分成集合、不等式、简易逻辑三个小专题并进行系统的归纳,搞清重点、难点、易错点,及时总结方法规律,以达到事半功倍的效果.

3. 加强对数学思想方法的复习.本章运用的主要思想方法有:数形结合思想,化归思想,分类讨论思想、配方法、反证法等.

(1) 数形结合思想:利用图形、数轴和直角坐标系来帮助分析和理解有关集合之间的关系,进行集合运算;利用函数的图象求不等式的解.

(2) 化归思想:将集合化简或转化为熟知的代数、三角、几何问题等;将含绝对值的不等式化为不含绝对值的不等式;将一元二次不等式化为一元一次不等式组;将分式、简单高次不等式化为整式不等式.

(3) 分类讨论思想:利用分类讨论来解决集合之间的关系、(如  $A \subseteq B$  则分为  $A = \emptyset$ 、 $A = B$ 、 $A \subsetneq B$ ).解一元一次不等式和绝对值不等式.

(4) 配方法与反证法:利用反证法解决集合中元素的互异性.利用配方法,解决集合关系中求一元二次函数的值域.

4. 本章高考题型既会有基本的选择题和填空题,也会有小型的或大型的综合题.复习时既要熟练掌握基本题型,又要对一定难度的大型综合题进行针对性的准备.

## 第1讲 集合与集合运算



### I. 必记知识记牢

高文大册 不漏一字一句

#### 必记知识 1: 集合的有关概念.

(1) 子集: 对于两个集合  $A$  与  $B$ , 如果集合  $A$  的任何一元素都是集合  $B$  的元素, 那么集合  $A$  就是集合  $B$  的子集. 记作  $A \subseteq B$  (或  $B \supseteq A$ ). (2) 集合相等: 对于集合  $A, B$ , 如果  $A \subseteq B$  且  $B \subseteq A$  那么集合  $A$  与集合  $B$  相等, 记作  $A = B$ . (3) 真子集: 若  $A \subseteq B$ , 且存在  $x_0 \in B$ , 但  $x_0 \notin A$ , 则  $A$  是  $B$  的真子集, 记作  $A \subsetneq B$  或者若  $A \subseteq B$ , 且  $A \neq B$ , 则  $A$  是  $B$  的真子集. (4) 空集:  $\emptyset$  的集合叫空集, 用  $\emptyset$  表示. (5) 补集: 若  $A \subseteq S$ , 则由  $S$  中所有 不属于  $A$  的元素 组成的集合, 叫做  $S$  中子集  $A$  的补集(或 余集), 记作  $\complement_S A$ , 即  $\complement_S A = \{x | x \in S, \text{且 } x \notin A\}$ . 若集合  $S$  中含有我们所要研究的各个集合的全部元素, 则  $S$  就可以看作一个全集. (7) 交集: 由所有 属于集合  $A$  且属于集合  $B$  的元素 所组成的集合, 叫做  $A$  与  $B$  的交集, 记作  $A \cap B$ , 即  $A \cap B = \{x | x \in A, \text{且 } x \in B\}$ . (8) 并集: 由所有 属于集合  $A$  或属于集合  $B$  的元素 组成的集合, 叫做  $A$  与  $B$  的并集, 记作  $A \cup B$ , 即  $A \cup B = \{x | x \in A, \text{或 } x \in B\}$ .

#### 必记知识 2: 集合运算的有关性质.

(1)  $A \subseteq B, B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$ ;  $A \subseteq B, B \subseteq C$ , 则  $A \subseteq C$ . (2)  $\emptyset \subseteq A$ , 若  $A \neq \emptyset$ , 则  $\emptyset \subsetneq A$ . (3)  $A \cap A = A, A \cap \emptyset = \emptyset, A \cap B = B \cap A$ . (4)  $A \cup A = A, A \cup \emptyset = A, A \cup B = B \cup A$ . (5)  $A \supseteq A \cap B, A \subseteq A \cup B$ . (6)  $A \cap \complement_S A = \emptyset, A \cup \complement_S A = S$  ( $S$  为全集). (7)  $A \subseteq B$ , 则  $A \cap B = A, A \cup B = B$ .

#### 必记知识 3: 常用数集的表示符号及元素与集合、集合与集合的关系符号.

(1) 常用数集: 正整数集、自然数集、整数集、有理数集、实数集分别记作  $\mathbb{N}^+, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ .

(2) 元素与集合的关系符号为  $\in, \notin$ .

(3) 集合与集合的关系符号为  $\subseteq, \subsetneq, =, \supseteq, \not\subseteq$ .

#### 必记知识 4: 子集个数的计算公式及集合的元素个数.

(1) 集合子集个数的计算公式: 若  $\text{card}(A) = n (n \in \mathbb{N}^+)$ , 则集合  $A$  的子集个数为  $2^n$ , 非空子集个数为  $2^n - 1$ , 真子集个数为  $2^n - 2$ . (2)  $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$ .

必记知识参考答案: 1. (1) 任何一个元素; 元素;  $A \subseteq B, B \supseteq A$

(2)  $A \subseteq B, B \subseteq A, A = B$  (3)  $\in, \notin, \subseteq, \supseteq, \neq$  (4) 不含任何元素;  $\emptyset$

(5) 不属于; 余集;  $\complement_S A; \{x | x \in S, \text{且 } x \notin A\}$  (6) 全部 (7) 属于;

且;  $A \cap B; \{x | x \in A, \text{且 } x \in B\}$  (8) 或;  $A \cup B;$

$\{x | x \in A, \text{或 } x \in B\}$  2. (1)  $=, \subseteq$  (2)  $\subseteq, \subsetneq$  (3)  $A; \emptyset; =$

(4)  $A; A; =$  (5)  $\supseteq, \subseteq$  (6)  $\emptyset; \cup$  (7)  $A; B$  3. (1)  $\mathbb{N}^+$  (或  $\mathbb{N}_+$ );

$\mathbb{N}; \mathbb{Z}; \mathbb{Q}; \mathbb{R}$  (2)  $\in, \notin$  (3)  $\subseteq, \subsetneq, =, \supseteq, \not\subseteq$  4. (1)  $2^n; 2^n - 1; 2^n -$

$1; 2^n - 2$  (2)  $\text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$





## II. 考点过关

高歌猛进 不惧一城一池

### 考点详解及案例剖析

#### 一、基本考点

**考点 1. 元素与集合、集合与集合之间的关系.** (1)元素与集合之间的关系是从属关系,对于给定的一个元素和给定的一个集合,这个元素要么是这个集合中的元素,要么不是这个集合中的元素,二者必居其一,元素若是集合中的元素,则用符号“ $\in$ ”表示,元素若不是集合中的元素,则用符号“ $\notin$ ”表示.(2)集合与集合之间的关系是包含关系,对于两个给定的集合,它们之间要么具备包含关系,要么不具备包含关系.在处理集合与集合的关系时,一要注意区别“包含于”、“包含”、“真包含”、“不包含”这些概念的不同涵义与不同的表示方法. $A \subseteq B$ 与 $A \supseteq B$ 是互逆的, $A \subseteq B$ 与 $A \not\subseteq B$ 是互否的,而 $A \subseteq B$ 与 $B \supseteq A$ 是同义的.至于 $A \subsetneq B$ ,它等价于“ $A \subseteq B$ ,且 $A \neq B$ ”;换言之, $A \subseteq B$ 包括 $A=B$ , $A \subsetneq B$ 两种情况,其中必有一种且只有一种成立.关于 $A \subseteq B$ 与 $A \supseteq B$ 这对互逆的命题,一般不能同时成立;如果同时成立,那么 $A=B$ .二要注意看清集合中元素是什么,是点集还是数集,不要混淆.

[考题 1](07,北京东城模拟,5分) 设全集  $U = \mathbf{R}$ ,  $A =$

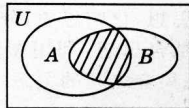


图 1-1-1

$\left\{x \mid \frac{x}{x+3} < 0\right\}$ ,  $B = \{x \mid x < -1\}$ , 则图 1-1-1 中阴影部分表示的集合为( )

- A.  $\{x \mid x > 0\}$       B.  $\{x \mid -3 < x < 0\}$   
C.  $\{x \mid -3 < x < -1\}$       D.  $\{x \mid x < -1\}$

◆ 考题 1:C 点拨:由  $\frac{x}{x+3} < 0$ , 得  $A = \{x \mid -3 < x < 0\}$ . 由题意  $A \cap B = \{x \mid -3 < x < -1\}$ . 考查分式不等式的解法、集合的运算等知识.

**考点 2. 集合的运算.** 集合的交集、并集、补集这三种运算是高考中最常考的内容.要解答好集合的运算题:一要正确运用各种运算的定义;二要注意运用各种运算的性质;三要灵活运用各种解题方法,如数形结合法(即运用图形和数轴分析解决问题)、特例法(即抽象集合具体化)等;四要注意集合的交集、并集、补集运算结果仍是集合而不是元素.

[考题 2](07,重庆模拟,5分) 设全集  $U = \{-1, 0, 1, 2, 4\}$ , 集合  $\complement_U M = \{-1, 1\}$ , 则集合  $M =$

- A.  $\{0, 2\}$       B.  $\{0, 4\}$       C.  $\{2, 4\}$       D.  $\{0, 2, 4\}$

◆ 考题 2:D 点拨:由补集的定义可知,  $U = \{-1, 0, 1, 2, 4\}$ ,  $\complement_U M = \{-1, 1\}$ , 所以  $M = \{0, 2, 4\}$

#### 二、能力与综合考点

**考点 3. 集合个数及元素个数问题(拓展考点)** 本考点的题型是以集合为背景,求满足条件的集合个数、集合的子集个数、集合中的元素个数等.常用的解法是:(1)图示法(即列举法);(2)子集个数公式.若  $\text{card}(A) = n$ , 则  $A$  的子集个数为  $2^n$ , 真子集个数为  $2^n - 1$ .

[考题 3](06,江南十校联考,5分) 已知  $M = \{y \mid y = x + 1\}$ ,  $N = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ , 则集合  $M \cap N$  中元素的个数是( )

- A. 0      B. 1      C. 2      D. 无穷多个

◆ 考题 3:A 点拨: $M$  是数集,  $N$  是点集, 故两集合的交集是空集. 故  $M \cap N$  中元素的个数是 0, 故选 A.

◆ 总结提示:本题容易错选 C. 出错原因是没有看清楚集合元素的实质, 把  $M \cap N$  中的元素误认为是直线  $y = x + 1$  与圆  $x^2 + y^2 = 1$  的交点. 处理集合问题时, 先要弄清集合中的代表元素.

**考点 4. 集合与函数、方程、不等式等知识的联系(学科内综合考点)** 对集合问题的考查,往往与方程、不等式、函数等内容综合在一起进行考查,实质是借助集合语言考查方程、不等式的求解及函数定义域、值域的求法等问题.

[考题 4](07,四川模拟,5分) 集合  $M = \{x \mid |x - 3| \leq 4\}$ ,  $N = \{y \mid y = \sqrt{x - 2} + \sqrt{2 - x}\}$ , 则  $M \cap N$  等于( )

- A.  $\{0\}$       B.  $\{2\}$       C.  $\emptyset$       D.  $\{x \mid 2 \leq x \leq 7\}$

◆ 考题 4:A 点拨:因为  $M = \{x \mid -1 \leq x \leq 7\}$ , 对于  $N$ , 要使  $\sqrt{x - 2}$ ,  $\sqrt{2 - x}$  同时有意义就必须使  $x = 2$ , 从而  $y = 0$ , 所以  $N = \{0\}$ , 因为  $M \cap N = \{0\}$ , 所以选 A.

#### 三、创新考点

**考点 5. 集合中的新定义问题(信息处理考点)** 在集合问题中除了考查课本上的基本概念、基本运算外,还会考查一些新定义的集合问题,这类题型是高考题的创新题型,考查了学生的创新能力.解决好此类题的关键是理解透彻所给的新定义、正确运用新定义.

[考题 5](05,百校联盟,5分) 定义集合  $A$  与  $B$  的新运算:  $A * B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B \text{ 且 } x \notin A \cap B\}$ , 则  $(A * B) * A =$  ( )

- A.  $A \cap B$       B.  $A \cup B$       C.  $A$       D.  $B$

◆ 考题 5:D 点拨:作出图形可知答案为 D.

◆ 总结提示:解决抽象集合问题注意运用图示法.





### III. 三年高考真题演练

高级PK 不让一招一式

(283)

## 一、选择题

[回顾1] 考点 2,3(06, 辽宁,  $T_1$ , 5分) 设集合  $A = \{1, 2\}$ , 则满足  $A \cup B = \{1, 2, 3\}$  的集合  $B$  的个数是( )

A. 1      B. 3      C. 4      D. 8

[回顾2] 考点 5(06, 辽宁,  $T_5$ , 5分) 设  $\oplus$  是  $\mathbf{R}$  上的一个运算,  $A$  是  $\mathbf{R}$  的非空子集. 若对任意  $a, b \in A$ , 有  $a \oplus b \in A$ , 则称  $A$  对运算  $\oplus$  封闭. 下列数集对加法、减法、乘法和除法(除数不等于零)四则运算都封闭的是( )

A. 自然数集      B. 整数集      C. 有理数集      D. 无理数集

[回顾3] 考点 2(06, 重庆,  $T_1$ , 5分) 已知集合  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ,  $A = \{2, 4, 5, 7\}$ ,  $B = \{3, 4, 5\}$ , 则  $(\complement_U A) \cup (\complement_U B) =$  ( )

A.  $\{1, 6\}$       B.  $\{4, 5\}$       C.  $\{2, 3, 4, 5, 7\}$       D.  $\{1, 2, 3, 6, 7\}$

[回顾4] 考点 3,5(06, 山东,  $T_1$ , 5分) 定义集合运算:  $A \odot B = \{x | x = xy(x+y), x \in A, y \in B\}$ . 设集合  $A = \{0, 1\}$ ,  $B = \{2, 3\}$ , 则集合  $A \odot B$  的所有元素之和为( )

A. 0      B. 6      C. 12      D. 18

[回顾5] 考点 2,3,4(06, 陕西, 文  $T_1$ , 5分) 已知集合  $P = \{x \in \mathbf{N} | 1 \leq x \leq 10\}$ , 集合  $Q = \{x \in \mathbf{R} | x^2 + x - 6 = 0\}$ , 则  $P \cap Q$  等于( )

A.  $\{-2\}$       B.  $\{-3, 2\}$       C.  $\{3\}$       D.  $\{2\}$

[回顾6] 考点 1,2(05, 全国 I,  $T_2$ , 5分) 设  $I$  为全集,  $S_1, S_2, S_3$  是  $I$  的三个非空子集, 且  $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = I$ , 则下面论断正确的是( )

A.  $\complement_I S_1 \cap (S_2 \cup S_3) = \emptyset$       B.  $S_1 \subseteq (\complement_I S_2 \cap \complement_I S_3)$   
C.  $\complement_I S_1 \cap \complement_I S_2 \cap \complement_I S_3 = \emptyset$       D.  $S_1 \subseteq (\complement_I S_2 \cup \complement_I S_3)$

[回顾7] 考点 1,3(05, 湖北,  $T_1$ , 5分) 设  $P, Q$  为两个非空实数集合, 定义集合  $P+Q = \{a+b | a \in P, b \in Q\}$ . 若  $P = \{0, 2, 5\}$ ,  $Q = \{1, 2, 6\}$ , 则  $P+Q$  中元素的个数是( )

A. 9      B. 8      C. 7      D. 6

## 二、填空题

[回顾8] 考点 2,4(04, 上海,  $T_3$ , 4分) 设集合  $A = \{5, \log_2(a+3)\}$ , 集合  $B = \{a, b\}$ , 若  $A \cap B = \{2\}$ , 则  $A \cup B =$  \_\_\_\_\_.



### IV. 2008年考情预测

高瞻远瞩 不弃一草一木

## 预测 1: 集合与集合的关系.

预测根据: 这一考点一直是高考重点考查的内容, 它体现了重要的数学思想, 还可以考查同学们对基本概念的掌握及运用情况.

命题角度预测: 1. 给出具体集合(这些集合一般是以不等式形式给出的), 判断这些集合之间的包含关系. 2. 给出一些抽象集合的包含关系, 判断这些集合的交集、并集、补集间的关系(这些抽象集合有时会用图形给出). 3. 给出的集合里含有字母参数, 由集合间的关系求字母参数的取值范围. 4. 求集合的子集个数问题.

## 预测 2: 集合的运算.

预测根据: 这一考点高考中年年都考, 主要考查同学们的运算能力. 考查同学们解不等式及集合的交集、并集、补集的运算能力.

命题角度预测: 1. 用列举法给出集合, 直接进行集合间的交、并、补运算. 2. 用不等式给出集合, 求集合间的交、并、补运算.

## 预测 3: 定义新的集合概念或运算.

预测根据: 近几年高考命题突出创新能力的考查, 注重题目的新颖性. 主要考查同学们理解新概念, 运用新概念的能力. 这一能力正是高考所要考查的.

命题角度预测: 借助已有的集合知识, 定义新的集合概念或集合运算, 审题时要打破常规, 准确把握符号语言的意义.



### V. 第1讲过关测试卷

高度关注 不剪一毫一厘

(80分 60分钟) (283)

## 一、选择题(25分)

1. 考点 2,4(03, 北京, 5分) 设集合  $A = \{x | x^2 - 1 > 0\}$ ,  $B = \{x | \log_2 x > 0\}$ , 则  $A \cap B$  等于( )

A.  $\{x | x > 1\}$       B.  $\{x | x > 0\}$   
C.  $\{x | x < -1\}$       D.  $\{x | x < -1$  或  $x > 1\}$

2. 考点 3(02, 安徽, 5分) 设集合  $S = \{a, b, c, d, e\}$ , 包含  $\{a, b\}$  的  $S$  的子集共有( )

A. 2个      B. 3个      C. 5个      D. 8个

3. 考点 1(02, 全国, 5分) 设集合  $M = \left\{x \mid x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbf{N}\right\}$ ,

$N = \left\{x \mid x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$ , 则( )

A.  $M = N$       B.  $M \subseteq N$       C.  $M \supseteq N$       D.  $M \cap N = \emptyset$

4. 考点 1,2(05, 北师大附中高三综合练习, 5分) 已知集合  $A, B, I, A \subseteq I, B \subseteq I$ , 且  $A \cap B \neq \emptyset$ , 则下面关系正确的是( )

A.  $(\complement_I A) \cup (\complement_I B) = I$       B.  $(\complement_I A) \cup B = I$   
C.  $A \cup B = I$       D.  $(\complement_I (A \cap B)) \cup (A \cap B) = I$

5. 考点 2,3(04, 黄冈中学模拟, 5分) 已知集合  $M = \{\text{直线}\}$ ,  $N = \{\text{圆}\}$ , 则  $M \cap N$  中元素的个数为( )

A. 0      B. 1      C. 2      D. 0, 1, 2 其中之一

## 二、填空题(9分)

6. 考点 1,2,4(05, 宣武质量检测, 5分) 已知集合  $A = \{y | y = \sqrt{2x^2 - 3x + 1}, x \in \mathbf{R}\}$ ,  $B = \{y | y = x^2 - 2x - 3, x \in \mathbf{R}\}$ , 则  $A \cap B =$  \_\_\_\_\_.

7. 考点 2,4(02, 上海, 4分) 若全集  $I = \mathbf{R}$ ,  $f(x), g(x)$  均为  $x$  的二次函数,  $P = \{x | f(x) < 0\}$ ,  $Q = \{x | g(x) \geq 0\}$ , 则不等式组  $\begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) < 0 \end{cases}$  的解集可用  $P, Q$  表示为 \_\_\_\_\_.

## 三、解答题(9分)

8. 考点 1,2,4(9分) (1) 已知集合  $A = \{x | x^2 - ax + a^2 - 19 = 0\}$ , 集合  $B = \{x | \log_2(x^2 - 5x + 8) = 1\}$ , 集合  $C = \{x | m^{x^2 + 2x - 8} = 1, m \neq 0, |m| \neq 1\}$  满足  $A \cap B \neq \emptyset, A \cap C = \emptyset$ , 求实数  $a$  的值;

(2) 已知集合  $P = \{x | x^2 - 5x + 4 \leq 0\}$ ,  $Q = \{x | x^2 - 2bx + b + 2 \leq 0\}$  满足  $P \supseteq Q$ , 求实数  $b$  的取值范围.



## 四、课标新型题(37分)

9. (学科内综合题) 考点 1、2、4、5(05, 沈阳质检, 5分) 设  $A, B$  是非空集合, 定义  $A \times B = \{x | x \in A \cup B \text{ 且 } x \notin A \cap B\}$ . 已知:  $A = \{x | y = \sqrt{2x - x^2}\}$ ,  $B = \{y | y = 2^x, x > 0\}$ , 则  $A \times B$  等于 ( B )

- A.  $[0, 1] \cup (2, +\infty)$       B.  $[0, 1) \cup (2, +\infty)$   
C.  $[0, 1]$       D.  $[0, 2]$

10. (创新题) 考点 1、5(05, 黄冈质检, 5分) 集合  $P = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots, 2n-1, \dots\} (n \in \mathbb{N}_+)$ , 若  $a \in P, b \in P$ , 则  $a \oplus b \in P$ , 则运算  $\oplus$  可能是 ( D )

- A. 加法      B. 减法      C. 除法      D. 乘法

11. (创新题) 考点 1、3、5(04, 海淀第二学期期末练习, 5分) 已知  $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2\}$ . 定义集合  $A, B$  之间的运算 " $*$ ":  $A * B = \{x | x = x_1 + x_2, x_1 \in A, x_2 \in B\}$ , 则集合  $A * B$  中最大的元素是 5; 集合  $A * B$  的所有子集的个数为 8.

12. (巧题妙解) 考点 1、4(10分) 设  $A = \{x | -2 \leq x \leq a\}, B = \{y | y = 2x + 3, x \in A\}, C = \{z | z = x^2, x \in A\}$ , 且  $C \subseteq B$ , 求实数  $a$  的取值范围. B.  $[-1, 2a+3]$

$$x^2 \leq 2a+3 \quad \frac{1}{2} \leq a \leq 3$$

$$4 \leq 2a+3$$

## 第 2 讲

### 不等式的解法



### I. 必记知识记牢

高文大册 不漏一字一行

必记知识 1: 绝对值不等式及一元二次不等式的解集.

(1) 含绝对值不等式的解集:

结构形式	不等式的解集	结构形式	不等式的解集
$ x  < a, (a > 0)$	$\{x   -a < x < a\}$	$ x  > a, (a > 0)$	$\{x   x < -a \text{ 或 } x > a\}$
$ x  < a, (a = 0)$	$\emptyset$	$ x  > a, (a < 0)$	$\mathbb{R}$
$ x  < a, (a < 0)$	$\emptyset$	$ f(x)  < a, (a > 0)$	$\{x   -a < f(x) < a\}$
$ x  > a, (a > 0)$	$\{x   x < -a \text{ 或 } x > a\}$	$ f(x)  > a, (a > 0)$	$\{x   f(x) > a \text{ 或 } f(x) < -a\}$

(2) 一元二次不等式的解集:

判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 的图象			
一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a > 0)$ 的根	$x_1, x_2$	$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	$\emptyset$ (无实数根)
$ax^2 + bx + c \geq 0 (a > 0)$ 的解集	$\{x   x \leq x_1 \text{ 或 } x \geq x_2\}$	$\{x   x \neq -\frac{b}{2a}\}$	$\mathbb{R}$
$ax^2 + bx + c < 0 (a > 0)$ 的解集	$\{x   x_1 < x < x_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

必记知识 2: 解各种不等式的思路方法步骤.

(1) 解绝对值不等式的关键是利用绝对值的性质, 将含绝对值的不等式化为不含绝对值的不等式来求解, 去绝对值符号的方法有

13. (推理论述题) 考点 1、3、4、5(05, 江南十校联考, 12分) 设  $S$  为满足下列两个条件的实数所构成的集合: ①  $1 \notin S$ ; ② 若  $a \in S$ , 则  $\frac{1}{1-a} \in S$ , 求解下列问题:

- (1) 若数列  $\{2 \cdot (-1)^n\}$  中的项都在  $S$  中, 求  $S$  中所含元素个数最少的集合  $S^*$ ;
- (2) 在  $S^*$  中任取 3 个元素  $a, b, c$ , 求使  $abc = -1$  的概率;
- (3)  $S$  中所含元素个数一定是  $3n (n \in \mathbb{N}^*)$  个吗? 若是, 请给出证明; 若不是, 试说明理由.

有些绝对值不等式还可利用  $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$  求解.

(2) 解一元二次不等式时注意结合其对应的二次函数的求解.

(3) 解分式不等式的基本步骤为: 整理为标准型  $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$  (或  $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ ) 的形式, 然后转化为  $f(x)g(x) > 0$  (或  $f(x)g(x) < 0$ ) 用标根法求解.

(4) 解无理不等式的基本思路为: 化无理不等式为有理不等式.

(5) 简单的高次不等式的解法: 化成标准形式  $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) > 0$  (或  $P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) < 0$ ), 再利用表解法或数轴法写出解集.

(6) 含指数、对数的不等式的解法: 利用指数函数或对数函数的性质转化为有理不等式求解.

必记知识 3: 绝对值不等式、无理不等式、指数不等式、对数不等式的解集.

(1) 不等式  $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x) \text{ 或 } f(x) < -g(x)$ ; 不等式  $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x)$ . (2) ① 不等式  $\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow f(x) > g^2(x) \text{ 且 } g(x) > 0$ ; ② 不等式  $\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow f(x) < g^2(x) \text{ 且 } g(x) > 0$ . (3) ①  $a^{f(x)} > a^{g(x)} (0 < a < 1) \Leftrightarrow f(x) < g(x)$ ; ②  $a^{f(x)} > a^{g(x)} (a > 1) \Leftrightarrow f(x) > g(x)$ . (4)  $Aa^{2f(x)} + Ba^{f(x)} + C > 0$  (或  $Aa^{2f(x)} + Ba^{f(x)} + C < 0 (A \neq 0) \Leftrightarrow$  (设  $\log_a f(x) = t > 0$ ). (5) ①  $\log_a f(x) > \log_a g(x) (0 < a < 1) \Leftrightarrow f(x) < g(x)$ ; ②  $\log_a f(x) > \log_a g(x) (a > 1) \Leftrightarrow f(x) > g(x)$ . (6)  $A[\log_a f(x)]^2 + B\log_a f(x) + C > 0$  (或  $A[\log_a f(x)]^2 + B\log_a f(x) + C < 0 (A \neq 0) \Leftrightarrow$  (设  $\log_a f(x) = t \in \mathbb{R}$ ).

必记知识参考答案: 1. (1) ①  $\{x | -a < x < a\}$  ②  $\emptyset$  ③  $\emptyset$

④  $\{x | x > a \text{ 或 } x < -a\}$  ⑤  $\{x | x \in \mathbb{R} \text{ 且 } x \neq 0\}$  ⑥  $\mathbb{R}$

⑦  $\{x | -a < f(x) < a\}$  ⑧  $\{x | f(x) > a \text{ 或 } f(x) < -a\}$

(2) ①  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  ②  $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

③  $\{x | x > x_2 \text{ 或 } x < x_1\}$  ④  $\{x | x \in \mathbb{R} \text{ 且 } x \neq -\frac{b}{2a}\}$  ⑤  $\mathbb{R}$

⑥  $\{x | x_1 < x < x_2\}$  ⑦  $\emptyset$  ⑧  $\emptyset$

2. (1)公式法;平方法;零点分段讨论法;绝对值的几何意义;借助数轴 (2)图象 (3)移项不等式右端化为零,左端通分;不等式;序轴 (4)有理 (5)序轴标根 (6)单调

3. (1) $f(x) > g(x)$ 或 $f(x) < -g(x)$  (2) $-g(x) < f(x) < g(x)$

$$(2) \textcircled{1} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \text{或} \textcircled{II} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases}$$

$$\text{或} \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases}; \textcircled{2} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < [g(x)]^2 \end{cases}$$

(3) ① $f(x) < g(x)$ ; ② $f(x) > g(x)$

(4) $At^2 + Bt + C > 0$ (或 $At^2 + Bt + C < 0$ )( $A \neq 0$ )

$$(5) \textcircled{1} \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \text{或} g(x) > f(x) > 0$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \text{或} f(x) > g(x) > 0$$

(6) $At^2 + Bt + C > 0$ (或 $At^2 + Bt + C < 0$ )( $A \neq 0$ )



## II. 考点过关

高歌猛进 不惧一城一池



### 考点详解及案例剖析

#### 一、基本考点

**考点1. 一元一次不等式及一元二次不等式的解法.** 一元一次不等式的解法步骤:(1)化成标准型 $ax > b$ ;(2)求解集. $a > 0$ 时解集为 $\{x | x > \frac{b}{a}\}$ ; $a < 0$ 时解集为 $\{x | x < \frac{b}{a}\}$ ; $a = 0, b \geq 0$ 时,解集为 $\emptyset$ ; $a = 0, b < 0$ 时解集为 $\mathbf{R}$ .一元二次不等式的解法步骤:(1)化成标准型( $a > 0$ ), $ax^2 + bx + c > 0$ 或 $ax^2 + bx + c < 0$ ;(2)判断 $\Delta$ ,进一步求方程的根.(3)根据 $\Delta$ ,写解集( $a > 0$ ). $ax^2 + bx + c > 0$ ①, $ax^2 + bx + c < 0$ ②,若 $\Delta > 0$ ,则①的解集为 $\{x | x > x_2 \text{ 或 } x < x_1\}$ ,②的解集为 $\{x | x_1 < x < x_2\}$ ( $x_1, x_2$ 为方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根,且 $x_1 < x_2$ ).若 $\Delta = 0$ ,则①的解集为 $\{x | x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x \neq -\frac{b}{2a}\}$ ,②的解集为 $\emptyset$ .若 $\Delta < 0$ ,则①的解集为 $\mathbf{R}$ ,②的解集为 $\emptyset$ .

[考题1](07,辽宁模拟,5分)已知关于 $x$ 的不等式 $3ax + b > 0$ 的解集为 $\{x | x > 1\}$ ,则不等式 $(a+b)x + (2a-b) < 0$ 的解集为\_\_\_\_\_.

考题1:  $\{x | x > \frac{5}{2}\}$  点拨:理解一元一次不等式解集的含义是解本题的突破口.由题意得不等式 $3ax + b > 0$ 的解为 $x > -\frac{b}{3a}$ 且 $3a > 0$ , $-\frac{b}{3a} = 1$ ,所以 $b = -3a(a > 0)$ ,所以不等式 $(a+b)x + (2a-b) < 0$ 可化为 $-2ax + 5a < 0$ ,即 $2ax > 5a$ ,因为 $a > 0$ ,所以 $x > \frac{5}{2}$ ,即不等式 $(a+b)x + (2a-b) < 0$ 的解集为 $\{x | x > \frac{5}{2}\}$ .

**考点2. 含绝对值的不等式的解法.** 解含绝对值不等式的基本思路是去掉绝对值符号,转化为不含绝对值符号的不等式.而去绝对值符号的方法有:公式法、平方法、零点分段讨论法.而有些绝对值不等式还可以利用绝对值的几何意义,借助数轴直接求解.

[考题2](07,北京东城模拟,5分)若关于 $x$ 的不等式 $x^2 - 2|x| + a \geq 0$ 恒成立,则实数 $a$ 的取值范围是\_\_\_\_\_.

考题2:  $[1, +\infty)$  点拨:本题考查含绝对值的不等式问题.

**考点3. 简单的一元高次不等式的解法.** 一元高次不等式的解法思路是化高次为低次.解法步骤如下:(1)化成标准型 $P(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) > 0$ (或 $P(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) < 0$ ),利用表解法或序轴标根法写出解集.(2)化成标准型后,用标根法步骤如下:①将每个因式的根标在数轴上;②从右上方依次通过每个点画出曲线,奇次根依次穿过,偶次根空而不过;③根据曲线显示的 $P(x)$ 值的符号变化写出不等式的解集.

[考题3]解下列不等式:

(1)  $(x^2 - 4x - 5)(x^2 + 8) < 0$ ;

(2)  $(x+2)(x+1)^2(x-1)^3(2-x) < 0$ .

考题3解:(1)因为 $x^2 + 8$ 恒大于零,故原不等式等价于 $x^2 - 4x - 5 < 0$ ,即 $(x-5)(x+1) < 0$ ,所以 $-1 < x < 5$ ,即原不等式的解集为 $\{x | -1 < x < 5\}$ .

(2)原不等式等价于 $(x+2)(x+1)^2(x-1)(x-2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \neq 0, \\ (x+2)(x-1)(x-2) > 0, \end{cases}$ 将不等式对应方程的根标在序轴上,如图1-2-1,由图知,原不等式的解集为 $\{x | -2 < x < -1 \text{ 或 } -1 < x < 1 \text{ 或 } x > 2\}$ .

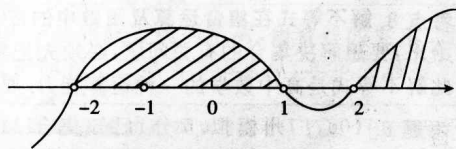


图1-2-1

**总结提示:**(1)注意恒正、恒负的因式可以去掉,但去掉恒正的因式不等号不改变方向,而去掉恒负的因式不等号要改变方向.(2)一定要把各因式的最高次项的系数变为正值,否则很容易出错.(3)注意不等号带等号和不带等号的差别.

**考点4. 简单的分式不等式的解法.** 分式不等式的解法思路是化分式为整式,解法步骤如下:(1)化成标准型 $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ (或 $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ )( $g(x) \neq 0$ , $f(x)$ 是关于 $x$ 的代数式);(2)同解变形 $f(x) \cdot g(x) > 0$ (或 $f(x) \cdot g(x) < 0$ );(3)通过一元高次不等式的求解步骤完成.

注意:解不等式时,一定要注意不等式中未知数允许取值的范围,这个范围可称为不等式的定义域.

解 $f(x) \geq 0$ 型的不等式,同解变形为 $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$ 或 $f(x) = 0$ .

[考题4]解下列不等式:

(1)  $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x - 3} < 0$

考题4解:(1)原不等式同解于 $(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 2x - 3) < 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1)(x-3)(x+1) < 0$ .将 $(x-2)(x-1)(x-3)(x+1) = 0$ 的根标在序轴上,如图1-2-2,然后从序轴的上方,且从序轴的右侧开始画曲线,得到五个区域,则序轴上方的区域就使得函数值为正,序轴下方的区域使函数值为负.

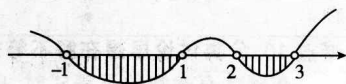


图1-2-2



<0. 由图可知,原不等式的解集为 $(-1,1) \cup (2,3)$ .

(2)  $x + \frac{2}{x+2} > 2$ .  $(2)x + \frac{2}{x+1} - 2 > 0 \Rightarrow \frac{x^2 + x + 2 - 2x - 2}{x+1} > 0 \Rightarrow (x^2 - x)(x+1) > 0 \Rightarrow x(x-1)(x+1) > 0 \Rightarrow$ 解集为 $(-1,0) \cup (1,+\infty)$ .

总结提示:解分式不等式先移项,通分整理为 $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ (或 $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ )的形式,此处注意把 $f(x), g(x)$ 的最高次项的系数变为正数,然后把方程 $f(x)=0, g(x)=0$ 的根在数轴上按从左到右,所有根按由小到大的顺序标出,最大根右侧的区域 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 一定为正,然后依次正、负交替出现,直接在数轴可得到结论.若是选择题,也可采取特殊值检验法.特别提示:解分式不等式,当分子、分母中有公因式,约分时,要注意变形的等价性,当有重因式时,要注意对重因式的处理.

**考点 5. 最简单的指数不等式与对数不等式的解法.** 解指数、对数不等式的常用方法有:(1)同底法:能化成同底数先化成同底,再根据指数、对数函数的单调性,转化为代数不等式,底是参数时要注意对其进行讨论,并时刻注意对数的真数大于零的限制条件.(2)转化法:多用于指数不等式,通过两边取对数转化成对数不等式(注意转化的等价性).(3)换元法:多用于不等式两边是和差的形式,或取对数后再换元,并注意所换“元”的范围.对于指数、对数不等式只要求会解一些简单的不等式,新教材中对指数、对数不等式降低了要求,近几年涉及的不多,但考纲中也没有明确指出这种不等式的解法不考,因此,对这两种不等式的解法不宜加深加宽.

**【考题 5】**(06, 济南模拟, 5分) 已知  $R$  为全集,  $A = \{x | \log_{\frac{1}{2}}(3-x) \geq -2\}$ ,  $B = \{x | \frac{5}{x+2} \geq 1\}$ , 则  $(\complement_R A) \cap B$  是 ( )

**【考题 5】B** 点拨: 由  $A: \log_{\frac{1}{2}}(3-x) \geq -2 \Rightarrow 0 < 3-x \leq 4 \Rightarrow -1 \leq x < 3$ , 则  $\complement_R A = \{x | x < -1 \text{ 或 } x \geq 3\}$ ,  $B: \frac{5}{x+2} \geq 1 \Rightarrow \frac{5}{x+2} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{x-3}{x+2} \leq 0 \Rightarrow -2 < x \leq 3$ , 所以  $(\complement_R A) \cap B = \{x | -2 < x < -1 \text{ 或 } x = 3\}$ , 故选 B.

A.  $\{x | -2 < x \leq -1 \text{ 或 } x = 3\}$   
 B.  $\{x | -2 < x < -1 \text{ 或 } x = 3\}$   
 C.  $\{x | -1 < x < 3 \text{ 或 } x = -2\}$   
 D.  $\{x | -1 < x \leq 3 \text{ 或 } x = -2\}$

## 二、能力与综合考点

**考点 6. 无理不等式的解法(拓展考点)** 教材中虽然没有单独对无理不等式进行讲解,但在处理某些问题时会涉及一些简单的无理不等式,无理不等式也可以理解为初中学习过的无理方程的一种延伸.解无理不等式的整体思路是化无理为有理.主要掌握以下两种无理不等式的理法:(1)  $\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow (I) \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0 \end{cases}$  或  $(II) \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) > [g(x)]^2. \end{cases}$  (2)  $\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < [g(x)]^2. \end{cases}$

**【考题 6】**不等式  $\sqrt{4x-x^2} < x$  的解集是 ( )

**【考题 6】C** 点拨: 原不等式等价于  $\begin{cases} 4x-x^2 \geq 0, \\ x > 0, \\ 4x-x^2 < x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 4, \\ x > 0, \\ x > 2 \text{ 或 } x < 0 \end{cases} \Rightarrow 2 < x \leq 4$ . 故选 C.

A. (0, 2)      B. (2, +∞)  
 C. (2, 4]      D.  $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

**考点 7. 多种不等式的综合题(学科内综合考点)**

在一个不等式中往往既有分式,又有绝对值,或有根式或有指数,或有对数,遇到这样的不等式该如何解?对这样的不等式要先从整体上看它是什么不等式,而不要从局部看.它是什么不等式就按解什么不等式的方法去解.

**【考题 7】**(06, 北海模拟, 4分) 不等式  $|x| > \frac{1}{x}$  的解集为 \_\_\_\_\_.

**【考题 7】** $\{x | x < 0 \text{ 或 } x > 1\}$  点拨: 本题从整体看是含绝对值的不等式,因此按绝对值不等式求解. 解法一: ①当  $x > 0$  时,不等式化为:  $x > \frac{1}{x}, x^2 > 1$ , 求得  $x > 1$ ; ②当  $x < 0$  时,不等式  $|x| > \frac{1}{x}$  恒成立. 则  $x < 0$ ; 综上得原不等式的解集为  $\{x | x < 0 \text{ 或 } x > 1\}$ . 解法二:  $|x| > \frac{1}{x} \Leftrightarrow x > \frac{1}{x}$  或  $x < -\frac{1}{x}$ , 即  $\frac{x^2-1}{x} > 0$  ①或  $\frac{x^2+1}{x} < 0$  ②. ①的解为  $x > 1$  或  $-1 < x < 0$ , ②的解为  $x < 0$ . 所以原不等式的解为  $\{x | x > 1 \text{ 或 } x < 0\}$ .

总结提示:解不等式时,首先要分清不等式的种类,是哪类不等式就按那类不等式解法去解.

**考点 8. 解不等式在集合运算及函数中的应用(学科内综合考点)** 集合问题常与解各种不等式综合考查,因为集合常以不等式形式给出,要想解决集合的有关问题,必须先把集合中的元素满足的不等式解出.而求函数的定义域的实质就是解不等式或不等式组,因此解不等式是高中数学的一种运算能力.要求对各种不等式都要快速、准确地解出.

**【考题 8】**(06, 广州模拟, 5分) 已知集合  $M = \{x | x^2 - 1 < 0\}$ ,  $N = \{x | \frac{x}{x-1} < 0\}$ , 则下列关系中正确的是 ( )

**【考题 8】C** 点拨: 先求出  $M, N$ , 再判断  $M, N$  的关系. 由  $x^2 - 1 < 0$  得  $-1 < x < 1$ , 由  $\frac{x}{x-1} < 0$  得  $0 < x < 1$ . 所以  $M = \{x | -1 < x < 1\}$ ,  $N = \{x | 0 < x < 1\}$ , 所以  $N \subseteq M$ .

A.  $M=N$       B.  $M \subseteq N$       C.  $N \subseteq M$       D.  $M \cap N = \emptyset$

**考点 9. 数形结合法在解不等式中的应用(拓展考点)**

有些不等式经过变形不能转化为代数不等式,这种不等式叫超越不等式,这类不等式的一般解法就是数形结合法.

**【考题 9】**(03, 全国,  $T_{14}$ , 4分) 使  $\log_2(-x) < x+1$  成立的  $x$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

**【考题 9】** $(-1, 0)$  点拨: 设  $f(x) = \log_2(-x), g(x) = x+1$ , 在同一坐标系中作出  $f(x), g(x)$  的图象, 如图 1-2-3 所示. 由图 1-2-3 知, 当  $-1 < x < 0$  时,  $f(x) < g(x)$ , 即不等式  $\log_2(-x) < x+1$  的解集为  $x \in (-1, 0)$ .

总结提示:要想运用数形结合法必须把条件中的数量关系通过图形表现出来,然后通过图形直接观察出问题的答案或找到解决问题的思路.

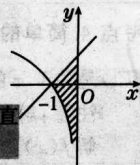


图 1-2-3

**考点 10. 分类讨论思想在解不等式中的应用(拓展考点)**

在解含有参数的不等式时,由于参数在不同的范围内不等式对应的方程的根的大小关系不同,或对应的函数的单调性不同,因此就需要对参数进行合理的分类,求出参数在不同的范围内对应的不等式的解集.

[考题 10] (07, 天津模拟, 12 分) 解关于  $x$  的不等式  $\frac{x-a}{x-a^2} < 0 (a \in \mathbf{R})$ .

考题 10 解: 先把分式不等式化为整式不等式后求解.  $\frac{x-a}{x-a^2} < 0 \Leftrightarrow (x-a)(x-a^2) < 0$ . (1) 若  $a=0$ , 则  $a=a^2=0$ , 故不等式为:  $x^2 < 0$ , 无解. 解集为  $\emptyset$ ; (2)  $a=1$ , 则  $a=a^2=1$ , 故不等式为:  $(x-1)^2 < 0$ , 无解, 解集为  $\emptyset$ ; (3) 若  $0 < a < 1$ , 则  $a^2 < a$ , 所以  $a^2 < x < a$ , 故解集为  $\{x | a^2 < x < a\}$ . (4) 若  $a < 0$  或  $a > 1$ , 则  $a^2 > a$ , 所以  $a < x < a^2$ , 故解集为  $\{x | a < x < a^2\}$ .

总结提示: 注意分类讨论和解含绝对值不等式运用的分段讨论是不同的, 分类讨论的结果不并在一起, 而分段讨论的结果要并在一起.



### III. 三年高考真题演练

高级PK 不让一招一式

(283)

#### 一、选择题

[回顾 1] 考点 1、8 (06, 陕西, 理  $T_1$ , 5 分) 已知集合  $P = \{x \in \mathbf{N} | 1 \leq x \leq 10\}$ , 集合  $Q = \{x \in \mathbf{R} | x^2 + x - 6 \leq 0\}$ , 则  $P \cap Q$  等于 ( )

- A.  $\{1, 2, 3\}$     B.  $\{2, 3\}$     C.  $\{1, 2\}$     D.  $\{2\}$

[回顾 2] 考点 1、2、8 (06, 福建, 理  $T_4$ , 5 分) 已知全集  $U = \mathbf{R}$ , 且  $A = \{x | |x-1| > 2\}$ ,  $B = \{x | x^2 - 6x + 8 < 0\}$ , 则  $(\complement_U A) \cap B$  等于 ( )

- A.  $[-1, 4)$     B.  $(2, 3)$     C.  $(2, 3]$     D.  $(-1, 4)$

[回顾 3] 考点 5、8 (06, 山东,  $T_3$ , 5 分) 设  $f(x) = \begin{cases} 2e^{x-1}, & x < 2, \\ \log_3(x^2-1), & x \geq 2. \end{cases}$  则不等式  $f(x) > 2$  的解集为 ( )

- A.  $(1, 2) \cup (3, +\infty)$     B.  $(\sqrt{10}, +\infty)$   
C.  $(1, 2) \cup (\sqrt{10}, +\infty)$     D.  $(1, 2)$

[回顾 4] 考点 4、5、7、10 (05, 辽宁,  $T_6$ , 5 分) 若  $\log_{2a} \frac{1+a^2}{1+a} < 0$ , 则  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $(\frac{1}{2}, +\infty)$     B.  $(1, +\infty)$     C.  $(\frac{1}{2}, 1)$     D.  $(0, \frac{1}{2})$

[回顾 5] 考点 3、4 (04, 全国 IV,  $T_3$ , 5 分) 不等式  $\frac{x(x+2)}{x-3} < 0$  的解集为 ( )

- A.  $\{x | x < -2, \text{ 或 } 0 < x < 3\}$     B.  $\{x | -2 < x < 0, \text{ 或 } x > 3\}$   
C.  $\{x | x < -2, \text{ 或 } x > 0\}$     D.  $\{x | x < 0, \text{ 或 } x > 3\}$

#### 二、填空题

[回顾 6] 考点 4、5、7 (06, 江苏,  $T_{16}$ , 4 分) 不等式

$\log_2(x + \frac{1}{x} + 6) \leq 3$  的解集为 \_\_\_\_\_.

[回顾 7] 考点 1、5、6、7、8 (05, 江苏,  $T_{15}$ , 4 分) 函数  $y = \sqrt{\log_{0.5}(4x^2 - 3x)}$  的定义域为 \_\_\_\_\_.

#### 三、解答题

[回顾 8] 考点 1、4、5、7、8 (05, 北京春招,  $T_{17}$ , 12 分) 设函数

$f(x) = \lg(2x-3)$  的定义域为集合  $M$ , 函数  $g(x) = \sqrt{1 - \frac{2}{x-1}}$  的定义域为集合  $N$ . 求 (1) 集合  $M, N$ ; (2) 集合  $M \cap N, M \cup N$ .



### IV. 2008 年考情预测

高瞻远瞩 不弃一草一木

预测 1: 解不等式在集合中的应用.

预测根据: 这一考点一直是高考的热点, 2008 年高考仍会有很多省市对这一考点进行考查.

命题角度预测: 集合中的元素满足的条件以各种各样的不等式给出, 求集合之间的交、并、补运算或判断集合之间的包含、相等关系. 要解决集合问题必须先解集合中的不等式.

预测 2: 解不等式和函数、导数、数列等内容的结合.

预测根据: 函数内容贯穿高中数学学习的始终, 研究函数问题离不开求函数的定义域, 求函数的定义域就是解不等式或不等式组, 而函数的单调性的判断要通过其导函数大于零或小于零得到, 因此也是解不等式. 数列中探求数列的最大(或最小)项问题, 就是转化为解不等式问题.

命题角度预测: 给出函数表达式, 求函数的定义域或利用导数法求函数的单调区间问题, 给出数列的通项或求和公式确定其最大(或最小)项或前多少项的和最大(或最小)问题, 都需解不等式或不等式组.

预测 3: 解不等式在解析几何中的应用.

预测根据: 解析几何中的点到直线的距离, 两直线的夹角、直线与圆锥曲线相交等问题一直是高考的重点, 2008 年高考这部分内容仍会重点考查.

命题角度预测: 某点到某直线的距离大(或小)于某个值, 两条直线的夹角在某一范围内, 直线与某一曲线交于不同的两点, 直线被曲线截得的弦长在某一范围内等问题都需转化为解不等式问题.



### V. 第 2 讲过关测试卷

高度关注 不弃一毫一厘

(90 分 60 分钟) (284)

#### 一、选择题 (25 分)

1. 考点 1、2、8 (06, 四川, 5 分) 已知集合  $A = \{x | x^2 - 5x + 6 \leq 0\}$ , 集合  $B = \{x | |2x-1| > 3\}$ , 则集合  $A \cap B =$  ( )

- A.  $\{x | 2 \leq x \leq 3\}$     B.  $\{x | 2 \leq x < 3\}$   
C.  $\{x | 2 < x \leq 3\}$     D.  $\{x | -1 < x < 3\}$

2. 考点 4、8 (06, 重庆模拟, 5 分) 函数  $f(x)$  和  $g(x)$  的定义域都

是  $\mathbf{R}$ , 且  $f(x) \geq 0$  的解集为  $(1, 2)$ ,  $g(x) \geq 0$  的解集为空集, 则

$\frac{f(x)}{g(x)} > 0$  的解集是 ( )

- A.  $(1, 2)$     B.  $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$   
C.  $(-1, 1) \cup [2, +\infty)$     D.  $[1, 2]$

3. 考点 5、8 (05, 江西文, 5 分) 函数  $f(x) = \frac{1}{\log_2(-x^2 + 4x - 3)}$  的定义域为 ( )



- A.  $(1,2) \cup (2,3)$       B.  $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$   
 C.  $(1,3)$       D.  $[1,3]$

4. 考点 6、8 (04, 全国 III, 5 分) 设函数  $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & x < 1, \\ 4 - \sqrt{x-1}, & x \geq 1, \end{cases}$  则使得  $f(x) \geq 1$  的自变量  $x$  的取值范围为( )

- A.  $(-\infty, -2] \cup [0, 10]$       B.  $(-\infty, -2] \cup [0, 1]$   
 C.  $(-\infty, -2] \cup [1, 10]$       D.  $[-2, 0] \cup [1, 10]$

5. 考点 1、8、10 (04, 湖北, 5 分) 设集合  $P = \{m \mid -1 < m < 0\}$ ,  $Q = \{m \in \mathbf{R} \mid mx^2 + 4mx - 4 < 0 \text{ 对任意实数 } x \text{ 恒成立}\}$ , 则下列关系中成立的是( )

- A.  $P \subseteq Q$       B.  $Q \subseteq P$       C.  $P = Q$       D.  $P \cap Q = \emptyset$

二、填空题(10分)

6. 考点 4 (06, 合肥模拟, 4 分) 不等式  $x \geq \frac{x+3}{x-1}$  的解集是 \_\_\_\_\_

7. 考点 1、5、7、10 (6 分) 设等比数列  $\{a_n\}$  的公比为  $q$ , 前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $S_n > 0$  对任意的  $n \in \mathbf{N}^*$  都成立, 则  $q$  的取值范围为 \_\_\_\_\_

三、解答题(22分)

8. 考点 1、5 (05, 百校联盟, 11 分) 已知关于  $x$  的方程  $2a^{2x-2} - 9a^{x-1} + 4 = 0$  有一根是 2.

- (1) 求实数  $a$  的值;  
 (2) 若  $0 < a < 1$ , 求关于  $x$  的不等式  $2a^{2x-2} - 9a^{x-1} + 4 < 0$  的解集.

9. 考点 4、10 (05, 北海模拟, 11 分) 已知关于  $x$  的不等式

$$\frac{a(x-1)}{x-2} > 2 \text{ 的解集为 } A, \text{ 且 } 3 \notin A.$$

- (1) 求实数  $a$  的取值范围;  
 (2) 求集合  $A$ .

四、课标新型题(33分)

10. (探究题) 考点 1、7、8、10 (11 分) 已知二次项系数为负值的二次函数  $f(x)$ , 对于任何  $x \in \mathbf{R}$ ,  $f(2-x) = f(2+x)$  总成立, 问:  $f(1-2x^2)$  与  $f(1+2x-x^2)$  满足什么条件时才能使  $-2 < x < 0$  成立.

11. (创新题) 考点 1 (11 分) 已知  $m < n$ , 试写出一个一元二次不等式  $ax^2 + bx + c > 0$ , 使它的解集为  $(-\infty, m) \cup (n, +\infty)$ , 这样的不等式是否唯一? 要使不等式能唯一被确定, 需添加什么条件?

12. (推理论证题) 考点 4、8 (04, 上海春招, 11 分) 已知实数  $p$  满足不等式  $\frac{2x+1}{x+2} < 0$ , 试判断方程  $x^2 - 2x + 5 - p^2 = 0$  有无实根, 并给出证明.

## 第 3 讲 逻辑联结词、四种命题与充分必要条件



### I. 必记知识记牢

高文大册 不漏一字一句

必记知识 1: 命题及充要条件的有关概念.

(1) 命题: 可以判断真假的语句叫做命题. (2) 逻辑联结词: “且”、“或”、“非” 这些词叫做逻辑联结词. (3) 简单命题与复合命题: 不含逻辑联结词的命题是简单命题, 由简单命题与逻辑联结词构成的命题是复合命题. (4) 真值表: 表示命题的真假的表叫真值表. (5) 四种命题: 若用  $p$  和  $q$  分别表示原命题的条件和结论, 用  $\neg p$  和  $\neg q$  分别表示  $p$  和  $q$  的否定, 则四种命题的形式为: 原命题: 若  $p$  则  $q$ ; 逆命题: 若  $q$  则  $p$ ; 否命题: 若  $\neg p$  则  $\neg q$ ; 逆否命题: 若  $\neg q$  则  $\neg p$ . (6) 充分条件: 如果  $A$  成立, 那么  $B$  成立, 即  $A \Rightarrow B$ , 则  $A$  是  $B$  成立的充分条件. (7) 必要条件: 如果  $A$  成立, 那么  $B$  成立, 即  $A \Rightarrow B$ , 则  $B$  是  $A$  成立的必要条件. (8) 充要条件: 如果  $A$  既是  $B$  成立的充分条件, 又是  $B$  成立的必要条件, 则  $A$  是  $B$  成立的充要条件.

必记知识 2: 复合命题的真假及充分必要条件的判定方法.

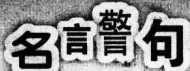
(1) 复合命题的真假的判定方法: 通过真值表判定. (2) 充要条件的判断方法: 常用推出符号  $\Rightarrow$  来判断两个命题之间的

充要关系.

必记知识 3: 复合命题的真假与构成它的简单命题的真假的关系及四种命题的关系.

(1) 复合命题的真假与构成它的简单命题的真假关系:  $p$  或  $q$ , 一真即真;  $p$  且  $q$ , 一假即假;  $\neg p$  与  $p$  真假相反. (2) 四种命题间的真假关系: 原命题为真, 它的逆命题不一定为真, 它的否命题和逆否命题不一定为真, 但一个命题的逆命题与它的否命题同真同假, 即互为逆否命题的两个命题是等价的.

必记知识参考答案: 1. (1) 真假 (2) “或”; “且”; “非” (3) 逻辑联结词; 简单命题; 逻辑联结词 (4) 真假 (5)  $q; p; \neg p; \neg q; \neg \neg p$  (6)  $A \Rightarrow B$ ; 充分条件 (7)  $B; A$  (8) 充分条件; 必要条件; 充要条件 2. (1) 真值表 (2) “ $\Rightarrow$ ” 3. (1) 真; 假; 逆否; 逆命题; 否命题; 逆命题; 否命题; 逆否命题



不登高山, 不知天之高也; 不临深溪, 不知地之厚也.



## II. 考点过关

高歌猛进 不惧一城一池

### 考点详解及案例剖析

#### 一、基本考点

**考点 1. 复合命题的构成及其真假的判定.** 由简单命题和逻辑联结词构成的命题是复合命题. 逻辑联结词有“或”、“且”、“非”三种,“或”是具有“选择”性的逻辑联结词;“且”是具有“兼有”性的逻辑联结词;“非”是具有否定性的逻辑联结词,它们有时可以有意义不同的说法,如“既是  $p$  又是  $q$ ”实际是“ $p$  且  $q$ ”,还有有些命题省略了逻辑联结词,如“菱形的对角线互相垂直平分”实际是菱形的对角线互相垂直且菱形的对角线互相平分. 复合命题的真假可根据真值表来判定,但首先要正确判断构成其简单命题的真假(数学中的定义、公理、公式、定理均为真命题). 真值表如右表.

$p$	$q$	非 $p$	$p$ 或 $q$	$p$ 且 $q$
真	真	假	真	真
真	假	假	真	假
假	真	真	真	假
假	假	真	假	假

**【考题 1】**(07,北京东城模拟,5分)已知两个不同的平面  $\alpha, \beta$  和两条不重合的直线  $m, n$ ,有下列四个命题

- ①若  $m \parallel n, m \perp \alpha$ , 则  $n \perp \alpha$  ②若  $m \perp \alpha, m \perp \beta$ , 则  $\alpha \parallel \beta$   
 ③若  $m \perp \alpha, m \parallel n, n \subset \beta$ , 则  $\alpha \perp \beta$  ④若  $m \parallel \alpha, \alpha \cap \beta = n$ , 则  $m \parallel n$ .

其中正确命题的个数是( )

- A. 0个 B. 1个 C. 2个 D. 3个

**【考题 1】D** 点拨:①正确,两条平行线中的一条垂直于一个平面,则另一条必垂直于此平面;②正确,垂直于同一直线的两平面平行. ③正确,由于  $m \parallel n, m \perp \alpha \Rightarrow n \perp \alpha$ , 又  $n \subset \beta$  故  $\alpha \perp \beta$ ;④错误,依据线面平行的性质,若一条直线平行一个平面,则此直线与经过该直线的平面与此平面的交线互相平行,条件中不确定  $m$  是否在平面  $\beta$  内.

**考点 2. 四种命题的关系.** 原命题与其逆否命题同真同假. 否命题与逆命题同真同假(它们是一对逆否命题);原命题与逆命题及否命题的真假关系不定. 由于互为逆否的两个命题同真同假,当一个命题的真假难以判定时,判定其逆否命题的真假,往往会收到奇效,这体现了等价转化的数学思想与方法.

**【考题 2】**给定命题:若  $a^2 + b^2 = 0$ , 则  $a, b$  全为零,下面说法中正确的是( )

- A. 逆命题:若  $a, b$  全不为零, 则  $a^2 + b^2 \neq 0$   
 B. 否命题:若  $a^2 + b^2 \neq 0$ , 则  $a, b$  全为零  
 C. 逆否命题:若  $a, b$  不全为零, 则  $a^2 + b^2 \neq 0$   
 D. 以上都不对

**【考题 2】C** 点拨:“ $a, b$  全为零”的否定应是“ $a, b$  不全为零”,而不是“ $a, b$  全不为零”;“逆否命题”是原命题的“既逆又否”的命题. 它与原命题同真假. 故答案为 C.

**总结提示:**本题的实质是以给定的一个命题作为原命题,写出相应的逆命题,否命题,逆否命题,而并不需要判断命题本身的真假.

**考点 3. 反证法.** 当一个命题的结论以“最(至)多”、“最(至)少”、“唯一”或否定性等形式出现时,宜用反证法来证明. 反证法证明命题的一般步骤如下:(1)假设命题的结论不成立,即假设结论的反面成立;(2)从这个假设出发,经过推理论证,得出矛盾;(3)由矛盾判定假设不正确,从而肯定命题的结论正确.

**【考题 3】**若  $x, y \in \mathbf{R}_+$ , 且  $x + y > 2$ , 求证  $\frac{1+x}{y} < 2$  或  $\frac{1+y}{x} < 2$  中至少有一个成立.

**【考题 3】证明:**假设  $\frac{1+x}{y} < 2$  和  $\frac{1+y}{x} < 2$  都不成立, 则有  $\frac{1+x}{y} \geq 2$  和  $\frac{1+y}{x} \geq 2$  同时成立.

因为  $x > 0$  且  $y > 0$ , 所以  $1+x \geq 2y$  且  $1+y \geq 2x$ . 两式相加, 得  $2+x+y \geq 2x+2y$ ,

所以  $x+y \leq 2$ , 这与已知条件  $x+y > 2$  矛盾, 因此  $\frac{1+x}{y} < 2$  和  $\frac{1+y}{x} < 2$  中至少有一个成立.

**总结提示:**反证法的理论依据是互为逆否命题的两个命题等价, 转化为探索原命题的逆否命题的真假. 当结论的反面有多种情形时, 必须把各种情形一一驳倒后, 才能肯定原命题正确.

**考点 4. 充分必要条件的判断.** 要判断命题的条件与结论的充要关系, 首先要分清命题的条件是什么, 结论是什么, 在此基础上, 如果由条件能推出结论来, 那么这个条件是结论成立的充分条件; 反过来, 如果由结论能推出条件来, 那么, 这个条件是结论成立的必要条件. 注意:  $A$  是  $B$  的充分条件, 与  $B$  是  $A$  的必要条件, 这两句话是完全等价的, 它们是同一个逻辑关系“ $A \Rightarrow B$ ”的不同表达方法.

**【考题 4】**(07,北京东城模拟,5分)已知  $f(x) = x^3$ , 则实数  $a > b$  是  $f(a) > f(b)$  的( )

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件  
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

**【考题 4】C** 点拨:本题主要考查充分必要条件的判断. 由题知,  $a > b \Rightarrow f(a) = a^3 > f(b) = b^3$ , 而当  $f(a) = a^3 > f(b) = b^3$  时,  $a^3 > b^3 \Rightarrow a > b$ , 所以实数  $a > b$  是  $f(a) > f(b)$  的充要条件.

#### 二、能力与综合考点

**考点 5. 充要条件的判定方法(拓展考点)** (1)定义法(考点 4 讲过). (2)等价法, 即利用  $A \Rightarrow B$  与  $\neg B \Rightarrow \neg A$ ;  $B \Rightarrow A$  与  $\neg A \Rightarrow \neg B$ ;  $A \Leftrightarrow B$  与  $\neg A \Leftrightarrow \neg B$  的等价关系, 对于条件或结论是不等关系(否定形式)的命题, 一般运用等价法. (3)利用集合间的包含关系判断, 若  $A \subset B$ , 则  $A$  是  $B$  的充分条件或  $B$  是  $A$  的必要条件; 若  $A = B$ , 则  $A$  是  $B$  的充要条件. 注意: 当确定条件为不充分或不必要的条件时, 常用构造反例的方法来说明.

**【考题 5】**(07,华中师大模拟,5分)“ $m=1$ ”是“函数  $f(x) = |x-m|$  在区间  $[1, +\infty)$  上为增函数”的( )

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件  
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

**【考题 5】A** 点拨:数形结合, 当  $m=1$  时函数  $f(x) = |x-m|$  在区间  $[1, +\infty)$  上为增函数, 当函数  $f(x) = |x-m|$  在区间  $[1, +\infty)$  上为增函数时  $m \leq 1$ , 故  $m=1$  是函数  $f(x) = |x-m|$  在区间  $[1, +\infty)$  上为增函数的充分不必要条件.

**考点 6. 命题的真假、充要条件的判定与数学其他内容的联系(学科内综合考点)**

充要条件的判定就是判定一个命题的真假, 若“若  $A$  则  $B$ ”是真命题, 则条件  $A$  是  $B$  的充分条件, 条件  $B$  是  $A$  的必要条件. 若“若  $A$  则



$B$ 是真命题且“若  $B$  则  $A$ ”也是真命题,则条件  $A$  是  $B$  的充要条件.而“充要条件”是高中数学的基础,它贯穿于高中数学的各个章节,是高考必考内容,所以它涉及的内容也遍布高中数学的所有内容.有代数,有几何,有解析,有立体.因此要想正确判定,必须运用其他数学知识.

- 【考题 6】**(07,北京东城模拟,5分)已知  $p:|2x-3|<1, q:x^2-3x-4<0$ ,则  $p$  是  $q$  的( )
- A. 充分不必要条件    B. 必要不充分条件  
C. 充要条件    D. 既不充分也不必要条件

**◆ 考题 6: A 点拨:**由已知  $|2x-3|<1 \Leftrightarrow -1<2x-3<1 \Leftrightarrow 1<x<2$ .由  $x^2-3x-4<0$  得  $-1<x<4$ ,所以  $p:1<x<2, q:-1<x<4$ .故  $p$  是  $q$  的充分不必要条件.考查了绝对值不等式、一元二次不等式的解法及简易逻辑的知识.

## 三、创新考点

**考点 7. 否命题与命题的否定**(探究性考点) 一个命题的否命题与命题的否定是不同的.若  $p$  表示命题,非  $p$  叫做命题  $p$  的否定,如果原命题为“若  $p$  则  $q$ ”,那么它的否命题是“若非  $p$  则非  $q$ ”,即:否命题既否定条件,又否定结论,而原命题的否定是“若  $p$  则非  $q$ ”,即命题的否定只否定命题的结论.

一些常见词语和词语的否定见下表.

词语	是	都是	大于( $>$ )	所有的	任一个	至少一个	至多一个
词语的否定	不是	不都是	不大于( $\leq$ )	某些	某个	一个也没有	至少两个

- 【考题 7】**写出下述命题的否定及否命题:
- (1) 两组对边平行的四边形是平行四边形.  
(2) 正整数 1 既不是质数也不是合数.
- ◆ 考题 7 解:**(1) 命题的否定形式为“两组对边平行的四边形不是平行四边形”.  
将命题改写成“若  $p$  则  $q$ ”的形式为“若一个四边形的两组对边都平行,则它是平行四边形”,因此命题的否命题为“若一个四边形至少有一组对边不平行,则它不是平行四边形”.  
(2) 命题的否定形式为“正整数 1 是质数或者是合数”.  
将命题改写成“若  $p$  则  $q$ ”的形式为“若一个正整数是 1,则它既不是质数也不是合数”,因此命题的否命题为“若一个正整数不是 1,则它是质数或者是合数”.
- ◆ 总结提示:**若一个命题条件和结论不明显时可以把命题改写成“若  $p$  则  $q$ ”的形式.



## III. 三年高考真题演练

高级PK 不让一招一式

(284)

### 一、选择题

**【回顾 1】**考点 4.6(06,北京,  $T_2$ , 5分) 若  $a$  与  $b-c$  都是非零向量,则“ $a \cdot b = a \cdot c$ ”是“ $a \perp (b-c)$ ”的( )

- A. 充分而不必要条件    B. 必要而不充分条件  
C. 充分必要条件    D. 既不充分也不必要条件

**【回顾 2】**考点 3.4.6(06,上海,  $T_{14}$ , 4分) 若空间中有四个点,则“这四个点中有三点在同一直线上”是“这四个点在同一平面上”的( )

- A. 充分非必要条件    B. 必要非充分条件  
C. 充分必要条件    D. 既非充分又非必要条件

**【回顾 3】**考点 4.6(06,江西,文  $T_3$ , 5分) 下列四个条件中,  $p$  是  $q$  的必要不充分条件的是( )

- A.  $p: a > b, q: a^2 > b^2$     B.  $p: a > b, q: 2^a > 2^b$   
C.  $p: ax^2 + by^2 = c$  为双曲线,  $q: ab < 0$   
D.  $p: ax^2 + bx + c > 0, q: \frac{c}{x^2} + \frac{b}{x} + a > 0$

**【回顾 4】**考点 4.5.6(06,山东,  $T_8$ , 5分) 设  $p: x^2 - x - 20 > 0$ ,

$q: \frac{1-x^2}{|x|-2} < 0$ ,则  $p$  是  $q$  的( )

- A. 充分不必要条件    B. 必要不充分条件  
C. 充要条件    D. 既不充分也不必要条件

**【回顾 5】**考点 4.5.6(05,湖南,理  $T_8$ , 5分) 集合  $A =$

$\{x \mid \frac{x-1}{x+1} < 0\}, B = \{x \mid |x-b| < a\}$ .若“ $a=1$ ”是“ $A \cap B \neq \emptyset$ ”的充分条件,则  $b$  的取值范围可以是( )

- A.  $-2 \leq b < 0$     B.  $0 < b \leq 2$   
C.  $-3 < b < -1$     D.  $-1 \leq b < 2$

**【回顾 6】**考点 1.4.6(05,湖北,  $T_2$ , 5分) 对任意实数  $a, b, c$ ,给出下列命题:①“ $a=b$ ”是“ $ac=bc$ ”的充要条件;②“ $a+5$  是无理数”是“ $a$  是无理数”的充要条件;③“ $a>b$ ”是“ $a^2>b^2$ ”的充分条件;④“ $a<5$ ”是“ $a<3$ ”的必要条件.其中真命题的个数是( )

- A. 1    B. 2    C. 3    D. 4

**【回顾 7】**考点 1.4.6(04,福建,  $T_3$ , 5分) 命题  $p$ :若  $a, b \in \mathbf{R}$ ,则  $|a|+|b|>1$  是  $|a+b|>1$  的充分而不必要条件.命题  $q$ :函数  $y = \sqrt{|x-1|-2}$  的定义域是  $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$ .则( )

- A. “ $p$  或  $q$ ”为假    B. “ $p$  且  $q$ ”为真  
C.  $p$  真  $q$  假    D.  $p$  假  $q$  真

### 二、填空题

**【回顾 8】**考点 2.7(05,江苏,  $T_{13}$ , 4分) 命题“若  $a>b$ ,则  $2^a > 2^b - 1$ ”的否命题为\_\_\_\_\_.



## IV. 2008年考情预测

高瞻远瞩 不弃一草一木

**预测 1: 充分必要条件.**

预测根据:“充要条件”是高中数学的基础,它贯穿于高中数学学习的始终,是高考的必考内容.

命题角度预测:考查内容有两个方面:一是充要条件自身内容的考查.二是以数学其他知识为载体对充要条件知识进行考查.考查形式主要是选择题,有时也会是填空题形式.一般不会出大题,若出大题,只会是大题中的一问.

**预测 2: 四种命题及命题真假的判断.**

预测根据:四种命题以往高考考得有点少,属于冷点,但有时出题就在冷点处.命题真假的判断也贯穿于高中数学学习的始终,是一个常考知识点.

命题角度预测:给出一个命题,让判断其逆命题或否命题的真假.命题真假的判断,给出的命题内容可以是中学数学中的任何内容,以不定项选择题或填空题形式出现的可能性最大.

**预测 3: 反证法及复合命题的真假.**

预测根据:反证法及复合命题的真假以前考得较少,属冷点.

名言警句

不飞则已,一飞冲天;一鸣则已,一鸣惊人.