国外计算机科学教材系列

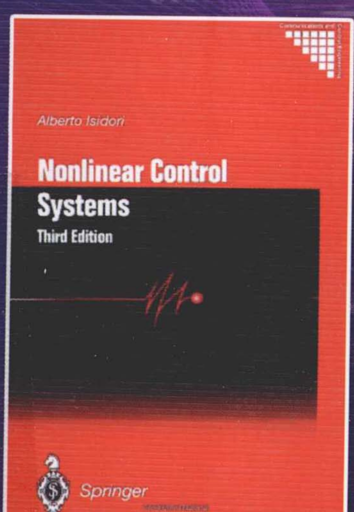
Springer

非线性控制系统

（第三版）（卷I）

Nonlinear Control Systems I

Third Edition



［意］ Alberto Isidori 著

王 奔 庄圣贤 译

電子工業出版社

PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

http://www.phei.com.cn

国外计算机科学教材系列

非线性控制系统

（第三版）（卷Ⅰ）

Nonlinear Control Systems I
Third Edition

[意] Alberto Isidori 著

王 奔 庄圣贤 译

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 · BEIJING

内容简介

本书是蜚声国际的自动控制领域专著，主要阐述应用微分几何理论设计非线性控制系统的方法。本书是作者结合20多年来的主要研究成果及教学经验历时十多年完成的。前三章介绍了非线性系统的基本理论及其相关的近世代数和几何基础理论；第4章和第5章叙述了单输入/单输出及多输入/多输出非线性系统的精确线性化方法；第6章和第7章进一步深入讨论了多输入/多输出非线性系统的输入/输出解耦问题；第8章陈述了输出跟踪和输出调节问题；第9章针对较弱的条件探讨了半全局线性化问题。附录A概述了所涉及的拓扑学及微分拓扑学的相关理论；附录B简述了中心流形理论及奇异摄动理论。前三章和附录介绍了本书的基础知识，其他各章则阐述了各种设计方法。

本书取材广泛，叙述清晰，论证严谨，文字简洁流畅，可作为自动控制专业高年级本科生和研究生的教材，也可作为其他相关领域的学者和工程师的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

非线性控制系统：第3版．卷I/(意)伊西多(Isidori, A.)著；王奔，庄圣贤译．
北京：电子工业出版社，2012.6
书名原文：Nonlinear Control Systems I
国外计算机科学教材系列
ISBN 978-7-121-17155-0

Ⅰ．①非…　Ⅱ．①伊…②王…③庄…　Ⅲ．①非线性控制系统-高等学校-教材　Ⅳ．①TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第106639号

策划编辑：谭海平
责任编辑：谭海平
印　　刷：
装　　订：涿州市京南印刷厂
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路173信箱　邮编　100036
开　　本：787×1092　1/16　印张：27.5　字数：704千字
印　　次：2012年6月第1次印刷
定　　价：75.00元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：(010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：(010)88258888。

出版说明

21世纪初的5至10年是我国国民经济和社会发展的重要时期，也是信息产业快速发展的关键时期。在我国加入WTO后的今天，培养一支适应国际化竞争的一流IT人才队伍是我国高等教育的重要任务之一。信息科学和技术方面人才的优劣与多寡，是我国面对国际竞争时成败的关键因素。

当前，正值我国高等教育特别是信息科学领域的教育调整、变革的重大时期，为使我国教育体制与国际化接轨，有条件的高等院校正在为某些信息学科和技术课程使用国外优秀教材和优秀原版教材，以使我国在计算机教学上尽快赶上国际先进水平。

电子工业出版社秉承多年来引进国外优秀图书的经验，翻译出版了“国外计算机科学教材系列”丛书，这套教材覆盖学科范围广、领域宽、层次多，既有本科专业课程教材，也有研究生课程教材，以适应不同院系、不同专业、不同层次的师生对教材的需求，广大师生可自由选择和自由组合使用。这些教材涉及的学科方向包括网络与通信、操作系统、计算机组织与结构、算法与数据结构、数据库与信息处理、编程语言、图形图像与多媒体、软件工程等。同时，我们也适当引进了一些优秀英文原版教材，本着翻译版本和英文原版并重的原则，对重点图书既提供英文原版又提供相应的翻译版本。

在图书选题上，我们大都选择国外著名出版公司出版的高校教材，如Pearson Education培生教育出版集团、麦格劳-希尔教育出版集团、麻省理工学院出版社、剑桥大学出版社等。撰写教材的许多作者都是蜚声世界的教授、学者，如道格拉斯·科默(Douglas E. Comer)、威廉·斯托林斯(William Stallings)、哈维·戴特尔(Harvey M. Deitel)、尤利斯·布莱克(Uyless Black)等。

为确保教材的选题质量和翻译质量，我们约请了清华大学、北京大学、北京航空航天大学、复旦大学、上海交通大学、南京大学、浙江大学、哈尔滨工业大学、华中科技大学、西安交通大学、国防科学技术大学、解放军理工大学等著名高校的教授和骨干教师参与了本系列教材的选题、翻译和审校工作。他们中既有讲授同类教材的骨干教师、博士，也有积累了几十年教学经验的老教授和博士生导师。

在该系列教材的选题、翻译和编辑加工过程中，为提高教材质量，我们做了大量细致的工作，包括对所选教材进行全面论证；选择编辑时力求达到专业对口；对排版、印制质量进行严格把关。对于英文教材中出现的错误，我们通过与作者联络和网上下载勘误表等方式，逐一进行了修订。

此外，我们还将与国外著名出版公司合作，提供一些教材的教学支持资料，希望能为授课老师提供帮助。今后，我们将继续加强与各高校教师的密切联系，为广大师生引进更多的国外优秀教材和参考书，为我国计算机科学教学体系与国际教学体系的接轨做出努力。

电子工业出版社

教材出版委员会

译 者 序

非线性控制系统，就其数学本质来说，是围绕非线性常微分方程组展开的。与线性系统理论一样，非线性控制系统理论也分为分析和综合(设计)问题。

对于分析，主要考虑 Cauchy 问题，即求常微分方程组适合初始条件的解的问题。大体上说，只要满足一个 Lipschitz 条件，则 Cauchy 问题存在唯一解。遗憾的是，对于一般的常微分方程组，至今难于求得一般解。由此，各种定性理论应运而生，如对于系统原点的性质，将其分类为中心点、结点(稳定的与不稳定的)、焦点(稳定的与不稳定的)、鞍点以及高阶奇点。此外，对低阶系统还详细研究了它的自振(极限环)。分岔理论和突变理论也受到了重视，特别地，人们还认识到，非线性系统中存在奇特的混沌现象。定性分析的重点主要在于稳定性分析，通常所用的方法是 Lyapunov 直接法，但寻找一个 Lyapunov 函数是十分困难的。

鉴于非线性系统分析的巨大复杂性，以及建立非线性系统理论(与线性系统理论对应的理论，如可控性、可观性、标准形等)的巨大困难性，人们绕过分析而直接研究非线性系统的综合问题。所幸的是，应用微分几何理论，对非线性系统的精确线性化和解耦等问题取得了实质性的突破。本书就是对在非线性系统综合领域中所取得的最新成果的最好总结，是一本在国际上相当有影响的非线性控制系统专著，被业界誉为非线性控制领域的"圣经"。

本书的完成和出版，给作者带来了极大的国际声誉。至此之后，几乎所有与非线性控制系统相关的著作和教材都把它列入参考书目。相信本书中文版在国内的出版发行，能对我国的非线性控制理论的发展和应用起到积极的促进作用。

因为非线性控制系统本身极其复杂，其理论主要由数学学者完成，所以在非线性系统的文章和书籍中，大量充斥着令工科学者望而生畏的现代数学原理和公式，而正是工科学者肩负着实现非线性控制系统理论在各种工程实际领域中应用的任务。这就在理论与应用之间产生了一条巨大的鸿沟。本书是这种现象的极端体现。作者在前言中特别强调了微分几何的背景知识，并且特别把微分几何的重要概念安排在附录中，但对于没有微分几何基础的工科学者来说，仅仅阅读附录是远远不够的。为此，我们特别推荐以下参考书作为本书的背景材料。读者在掌握了这些参考书所涉及的数学基本原理后，再回过头阅读本书，应该不会有太大的困难。

《代数学引论》，第二版，聂灵沼，丁石孙著，高等教育出版社，2000 年

《应用泛函分析原理》，李广民，刘三阳编著，西安电子科技大学出版社，2003 年

《点集拓扑讲义》，第二版，熊金城编，高等教育出版社，1998 年

《微分流形初步》，第二版，陈维恒编著，高等教育出版社，2001 年

本书的基础是第 1 章至第 3 章和附录，这些章节不仅论述了相关的数学基本原理，而且定义和解释了贯穿全书的名词和术语。附录简介了拓扑学和微分拓扑学，包括微分流形、切空间等；前三章涉及了近世代数和泛函分析的基本概念。掌握了以上的背景知识，就掌握了开启理解本书的钥匙。

翻译的目的在于语言转换，使得读者可以全身心地专注于书籍本身的内容，而不必分心于不太熟悉的非母语语言。因此在翻译中，我们不但力求保持本书的原貌，同时也把书中的各种代词尽可能用名词表达，除非特别明显的代词。而且我们已尽量把书中的长句翻译成了短句，以使读者一目了然。

本书的第 1 章至第 4 章由庄圣贤翻译，第 5 章至第 9 章、附录、索引由王奔翻译，全书最终由王奔统一校核。

由于本书涉及的数学理论太多、太广、太抽象，尽管我们竭尽全力，费时半年，但仍常常感到力不从心。所以，不当、不贴切甚至有误之处也许难免，诚恳地欢迎各位专家学者给予批评指正，以便再次印刷时更正。我们的电子邮件地址是 rushing_wang@163. com 和 zhuangsx@sina. com。

再版译者序

近10年来，我国出版的中外学者关于非线性控制系统的教材和专著已达约10种，且在非线性系统控制理论的研究及在各工业领域的应用取得了长足的进步。在此背景下，电子工业出版社准备再次出版 Alberto Isidori 的名著《非线性控制系统》是一件可喜的事情。

非线性系统领域涉及的问题非常广泛，大体上说，分为分析和综合两部分。分析是围绕存在唯一解的非线性常微分方程的定性理论展开的，因为无论是线性常微分方程还是非线性常微分方程，都不可能用统一的方法求得一般解析解，所以只能针对常微分方程的结构来得出一些定性理论，如稳定性等，故各种稳定性理论应运而出。而综合（或设计）问题更为复杂，因此，通常的方法是将非线性系统转化为线性系统，在此基础上再实现这个线性系统的综合，然后，反过来推导出原非线性系统的综合。传统的线性化方法是局部线性化，在实际应用中，该方法对静态稳定性是有意义的，但对大扰动的动态稳定性显得力不从心。

本书不涉及分析问题，通篇都是针对仿射非线性系统阐述精确线性化问题。作者追本溯源，详细阐述和分析了精确线性化方法的来龙去脉，并对每一个结论给予了明确的数学证明，为精确线性化思路提供了一条清晰的脉络，是非线性控制系统领域中不可多得的一部专著。可是，精确线性化涉及的数学问题对工科学者或工程师来说过于深奥，如果只从应用的角度看，工科学者不必过于拘泥于严谨的数学过程，只需关注其结论和方法即可。这也是本书对于应用学者的意义所在。

本书中文版于2005年由电子工业出版社第一次出版，仅半年后，再次印刷出版。译者有一次与美国康奈尔大学江小东教授谈到该书在国内的发行状况时，他非常惊讶，认为在美国也不可能有如此惊人的发行量。

现在，电子工业出版社再次出版发行本书，说明我国从事非线性系统控制的人才越来越多，且在各个领域都得到了很好的推广应用，这使得译者十分欣慰。

再次出版之际，译者对全书译稿重新做了校对和文字韵色，并更正了个别不妥或错误之处。本书出版后，译者收到了一些读者指出的错误或不足，借此，对他们表示衷心的感谢！

王　奔

2012年3月28日

第二版前言

本书的目的在于以自成体系的描述方式介绍非线性系统理论基础,特别注重微分几何方法。本书可作为研究生教材,也可供从事反馈系统分析和设计的科学家和工程师参考。

本书的第一版写于 1983 年,当时我在圣路易斯市华盛顿大学系统科学与数学系任教。这个新版本综合了我后来所得到的教学经验,即 1987 年在伊利诺伊大学 Urbana-Champaign 分校所获得的教学经验,1987 年在位于 Oberpfaffenhofen 的 Carl-Cranz Gesellschaft 所获得的教学经验,1988 年在加州大学伯克利分校获得的教学经验。除了重点重新安排第一版的最后两章以外,这个新版本还增加了额外两章,因而在更基本的层面上展现了 1985 年以后出现的相关研究成果。

在过去几年中,微分几何已经证明是非线性控制系统分析和设计的一种有效方法,正如过去拉普拉斯变换、复变量理论和线性代数相对于线性系统的有效性一样。长期以来,人们关切的综合问题,如干扰解耦、非交互式控制、输出调节和输入输出响应的修正,在控制科学家不难掌握的数学概念的基础上,都能相当轻松地得到处理。本教材的目的在于使读者熟悉重要的方法和结论,并且使读者在不断出现的文献中能跟上新的重大进展。

本书的结构安排如下。第 1 章介绍不变分布,在非线性系统的内部结构分析中,这是一个基本工具。借助于这个概念,阐明一个非线性系统局部地呈现分解为"可达的/不可达的"部分和/或"可观测的/不可观测的"部分,这类似于 Kalman 为线性系统所介绍的那些概念。第 2 章在一定程度上解释全局分解可能存在,相应于整个状态空间进入"低维"可达性和/或不可区分性子空间的剖分。第 3 章描述可以表示一个非线性系统的输入-输出映射的各种"形式",并且提供实现理论的基础原理的简短描述。第 4 章说明,对于一个单输入单输出非线性系统,怎么求解一系列相关设计问题。解释了借助于反馈和坐标变换,非线性系统如何变换为线性的和可控的系统。讨论了在实现局部渐近稳定性的问题中,"零"概念的非线性对应对象所起的重要的作用,描述了渐近跟踪、模型匹配和干扰解耦的问题。所采用的方法是相当"基本的",因为仅仅要求一般性的数学工具。第 5 章对多变量非线性系统的一个特殊类型涵盖了类似的主题,即借助于静态反馈,能使这类系统是非交互的。对于这类系统,其分析是在第 4 章中介绍的分析的直接扩展。最后两章介绍了更广泛的多变量非线性系统类型,专注于输出调节、干扰解耦、经过静态反馈具有稳定性的非交互式控制和经过动态反馈的非交互式控制的问题的解。这两章中的分析主要基于若干重要的微分几何概念。为方便起见,这些微分几何概念放在第 6 章中单独处理。

本书不可能涵盖该领域中的所有最新成果。例如,本书省略了全局线性化和全局受控不变性理论,以及左、右可逆性概念及其控制理论结果。参考文献并不完整,只包含了实际采用的出版物和其他一些重要的著作。

读者应该熟悉线性系统理论的基本概念。虽然本书的重点在于微分几何概念于控制理论中的应用,但第 1 章、第 4 章和第 5 章的大多数内容并不要求读者对该领域有特殊的了解。不熟悉微分几何基本原理的读者在第一次阅读本书时,可以跳过第 2 章和第 3 章,在已经具备必

要的背景知识以后，再回过头来阅读这两章。为了使得这一版尽可能地自成体系，贯穿本书所应用的微分几何的重要概念在附录 A 中描述，但未给出证明。在每个设计问题的阐述中，还讨论了局部渐近稳定性问题。这里，预先假设读者已具备稳定性理论的基本知识。对于这些基本知识，读者还可以查阅众所周知的标准参考书。我们已将这些参考书中的不常见的一些特殊结果放在附录 B 中。

我要对以下人士表达诚挚的谢意。A. Ruberti 教授，感谢他持之以恒的鼓励；J. Zaborszky，P. Kokotovic，J. Ackermann，C. A. Desoer 教授，感谢他们给我提供了在学术机构中讲述本书主题的机会；M. Thoma 教授，在我准备写这本书时，他一直表示了极大的兴趣。我深受A. J. Krener 教授的恩惠，在一个联合研究课题的过程中，我学到了许多方法并应用于本书。我要感谢 C. I. Byrnes 教授，我和他一起参与了深入的研究课题，还要感谢 T. J. Tarn，J. W. Grizzle 和 S. S. Sastry 教授，是他们使得我有机会和他们一起合作了若干相关的研究问题。我还要感谢 M. Fliess，S. Monaco 和 M. D. Di Benedetto 教授，感谢他们有价值的建议。

Alberto Isidori

罗马

1989 年 3 月

目　　录

第 1 章　控制系统的局部分解 ······ 1

1.1　引言 ······ 1
1.2　标记法 ······ 4
1.3　分布 ······ 10
1.4　Frobenius 定理 ······ 18
1.5　微分几何观点 ······ 27
1.6　不变分布 ······ 32
1.7　控制系统的局部分解 ······ 39
1.8　局部可达性 ······ 41
1.9　局部可观测性 ······ 54

第 2 章　控制系统的全局分解 ······ 60

2.1　Sussmann 定理与全局分解 ······ 60
2.2　控制李代数 ······ 64
2.3　观测空间 ······ 67
2.4　线性系统和双线性系统 ······ 71
2.5　实例 ······ 77

第 3 章　输入-输出映射和实现理论 ······ 82

3.1　Fliess 泛函展开式 ······ 82
3.2　Volterra 级数展开式 ······ 87
3.3　输出不变性 ······ 90
3.4　实现理论 ······ 94
3.5　最小实现的唯一性 ······ 103

第 4 章　单输入单输出系统非线性反馈的基本理论 ······ 106

4.1　局部坐标变换 ······ 106
4.2　通过反馈达到精确线性化 ······ 114
4.3　零动态 ······ 126
4.4　局部渐近稳定性 ······ 135
4.5　渐近输出跟踪 ······ 140
4.6　扰动解耦 ······ 144
4.7　高增益反馈 ······ 148
4.8　关于精确线性化的补充结论 ······ 152
4.9　具有线性误差动态的观测器 ······ 159
4.10　实例 ······ 166

第 5 章　多输入多输出系统的非线性反馈的基本理论 …… 172
5.1　局部坐标变换 …… 172
5.2　经过反馈的精确线性化 …… 178
5.3　非交互式控制 …… 189
5.4　经过动态扩展实现相对阶 …… 195
5.5　实例 …… 206
5.6　输入-输出响应的精确线性化 …… 217

第 6 章　状态反馈的几何理论:工具 …… 229
6.1　零动态 …… 229
6.2　受控不变分布 …… 244
6.3　在 ker(dh)中的最大受控不变分布 …… 248
6.4　可控性分布 …… 260

第 7 章　非线性系统的几何理论:应用 …… 265
7.1　经过状态反馈的渐近稳定 …… 265
7.2　扰动解耦 …… 267
7.3　经过静态反馈具有稳定性的非交互控制 …… 268
7.4　具有稳定性的非交互控制的必要条件 …… 284
7.5　具有稳定性的非交互控制的充分条件 …… 291

第 8 章　跟踪与调节 …… 303
8.1　非线性系统中的稳态响应 …… 303
8.2　输出调节问题 …… 306
8.3　全信息情况下的输出调节 …… 310
8.4　误差反馈情况下的输出调节 …… 316
8.5　结构性稳定调节 …… 326

第 9 章　单输入单输出系统的全局反馈设计 …… 334
9.1　全局标准形式 …… 334
9.2　全局渐近稳定性的实例 …… 338
9.3　半全局稳定性实例 …… 343
9.4　Artstein-Sontag 定理 …… 351
9.5　全局扰动衰减的实例 …… 353
9.6　经过输出反馈的半全局稳定性 …… 361

附录 A …… 369

附录 B …… 395

参考文献 …… 415

索引 …… 423

第 1 章　控制系统的局部分解

1.1　引言

本章分别从输入和状态及状态和输出之间相互作用的观点对**非线性**控制系统进行分析，以建立起许多与**线性**控制系统的一些基本特性之间所存在的类似关系。为方便起见，也为讨论非线性系统的这些类似特性奠定良好的基础，首先从与通常方法略微不同的角度来复习一下线性系统理论的一些基础知识。

回顾一个具有 m 个输入和 p 个输出的线性多变量控制系统，借助于一组一阶线性微分方程组，可知其在状态空间的通常描述形式为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{1.1}$$

式中，x 表示**状态**向量（$\mathbb{R}^n$ 中的一个元素），u 表示**输入**向量（$\mathbb{R}^m$ 中的一个元素），y 表示**输出**向量（$\mathbb{R}^p$ 中的一个元素）。A,B,C 均为具有适当维数的实数矩阵。

业已证明输入和状态、状态和输出这两方面之间的相互作用分析对于理解大量相关控制问题的可解性起着至关重要的作用，如通过反馈的特征值配置、二次型价值准则的最小化、扰动抑制、渐近输出调节问题等。分析这种相互作用的主要工具是于 1960 年前后由 Kalman 提出的**可达性**和**可观性**概念，以及相应的控制系统分别**分解**为“可达/不可达”和“可观/不可观”的理论。本节将回顾这些分解的某些相关内容。

考虑方程(1.1)所示的线性系统，并假设$\mathbb{R}^n$ 中存在一个 d 维子空间 V，该子空间具有如下性质：

(i) V 为 A 下的**不变**子空间，即对所有 $x \in V$，有 $Ax \in V$。

不失一般性，在可能的坐标变换后，可假定 V 的子空间是一组形如 $v = \mathrm{col}(v_1, \cdots, v_d, 0, \cdots, 0)$ 的向量，即所有向量的最后 $n-d$ 个元素为零。如果是这种情况，由于 V 为 A 下的不变子空间，那么该矩阵必具有如下形式的块三角结构：

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

式中，$n-d$ 行、d 列的左下块元素为零。

此外，如果子空间 V 使得：

(ii) V 包含矩阵 B 的**像**（即值域-空间），即对所有 $u \in \mathbb{R}^m$，有 $Bu \in V$，那么在同一坐标变换后，矩阵 B 具有如下形式：

$$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

即 B 的最后 $n-d$ 行元素为零。

因此,在状态空间中进行坐标变换后,如果存在满足条件(i)和(ii)的子空间 V,那么方程(1.1)的第一个等式可分解为如下形式:

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u$$
$$\dot{x}_2 = A_{22}x_2$$

这里分别用 x_1 和 x_2 表示由点 x 中前 d 个和后 $n-d$ 个新坐标所形成的向量。

这样得到的表达形式对研究系统在控制 u 作用下的行为特别有用。在任意时刻 T,$x(T)$ 的坐标为

$$\begin{aligned} x_1(T) &= \exp(A_{11}T)x_1(0) + \int_0^T \exp(A_{11}(T-\tau))A_{12}\exp(A_{22}\tau)\mathrm{d}\tau x_2(0) + \\ &\quad \int_0^T \exp(A_{11}(T-\tau))B_1u(\tau)\mathrm{d}\tau \\ x_2(T) &= \exp(A_{22}T)x_2(0) \end{aligned}$$

由上式可知,由 x_2 表示的坐标集与输入 u 无关,而只与时间 T 有关。特别地,如果用 $x^\circ(T)$ 表示这样的点,即对所有 $t\in[0,T]$ 有 $u(t)=0$ 时,在时刻 $t=T$ 所到达的$\mathbb{R}^n$ 中的点,也就是点

$$x^\circ(T) = \exp(AT)x(0)$$

那么可知任意从 $t=0$ 时刻的状态 $x(0)$ 出发,在时刻 T 到达的状态,必具有 $x^\circ(T)+v$ 的形式,其中 v 是 V 中的一个元素。

以上论述仅仅阐明了状态 x 在时刻 T 可达的必要条件,即可表示为 $x=x^\circ(T)+v$ 的形式,其中 $v\in V$。然而,在如下的附加假设下:

(iii) V 是满足条件(i)和(ii)的一个**最小**子空间(即包含于任意满足条件(i)和(ii)的$\mathbb{R}^n$ 的其他子空间),则该条件也是充分条件。事实上,由线性系统理论可知条件(iii)满足,当且仅当

$$V = \mathrm{Im}(B\ AB \cdots A^{n-1}B)$$

式中,Im(·)表示一个矩阵的像,且在这一假设下,偶对(A_{11},B_1)为**可达**对,即满足条件

$$\mathrm{rank}(B_1\ A_{11}B_1 \cdots A_{11}^{d-1}B_1) = d$$

换言之,它具有如下性质,即对于每个 $x_1\in\mathbb{R}^d$,存在一个定义于$[0,T]$上的输入 u,满足

$$x_1 = \int_0^T \exp(A_{11}(T-\tau))B_1u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

从而可知,如果 V 使得条件(iii)也得到满足,那么从初始状态 $x(0)$ 出发,系统就有可能在时刻 T 到达形如 $x^\circ(T)+v$ 的每一个状态,其中 $v\in V$。

以上分析可使我们做如下考虑。给定线性控制系统(1.1),设 V 为$\mathbb{R}^n$ 中满足条件(i)和(ii)的最小子空间。则对于 V,存在$\mathbb{R}^n$ 到如下形式子集的一个**剖分**:

$$S_p = \{x\in\mathbb{R}^n : x = p + v, v\in V\}$$

它由如下特性描述:始于 $x(0)$,在时刻 T 可达的点集,恰好与包含点 $\exp(AT)x(0)$ 的(剖分

的)元素相一致,即与子集 $S_{\exp(AT)x(0)}$ 相一致。还应注意,这些集合(如该剖分中的元素)是与向量 V 平行的 d 维平面(见图 1.1)。

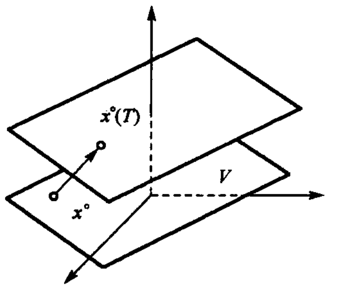


图 1.1

为了考察状态与输出之间的相互作用,我们采用与上述相类似的分析方法。在此,考虑 $\mathbb{R}^n$ 中具有下列性质的另一个 d 维子空间 W:

(i) W 为 A 下的不变子空间。

(ii) W 包含于矩阵 C 的核(零空间),即对所有 $x \in W$,有 $Cx = 0$。

(iii) W 为满足(i)和(ii)的最大子空间(即包含 $\mathbb{R}^n$ 中的任意满足(i)和(ii)的其他子空间)。

性质(i)和(ii)意味着状态空间中存在坐标变换,该变换使得控制系统方程(1.1)可分解为如下形式:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u \\
\dot{x}_2 &= A_{22}x_2 + B_2u \\
y &= C_2x_2
\end{aligned}$$

在新坐标系中,W 中的元素为满足 $x_2 = 0$ 的点。此分解表明由 x_1 表示的一组坐标对输出 y 没有任何影响。因此,任意两个 x_2 坐标相等的初始状态在任意输入下产生相同的输出,即它们是**不可区分**的。实际上,因为其 x_2 坐标相等的两个状态之差是 W 中的一个元素,所以可以推出任意两个状态(它们的差是 W 中的一个元素)的确是不可区分的。

依次地,性质(iii)保证只有如此描述的状态对(即在 W 中存在差异)是相互不可区分的。事实上,从线性理论可知性质(iii)满足,当且仅当

$$W = \ker\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \cdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

式中,ker(·)表示矩阵的核。若是这种情况,则偶对 (C_2, A_{22}) 为**可观测**对,即满足条件

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} C_2 \\ C_2A_{22} \\ \cdots \\ C_2A_{22}^{n-d-1} \end{pmatrix} = n - d$$

换言之,它具有如下性质:

$$C_2\exp(A_{22}t)x_2 = 0,\text{对所有 } t \geqslant 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

因此,其差不属于 W 的任意两个初始状态是相互可区分的,特别地,通过在零输入下所产生的输出,可将它们区分开来。

再者,可以由如下的考虑来综合上面的讨论。给定一个线性控制系统,设 W 为$\mathbb{R}^n$ 中满足(i)和(ii)的最大子空间,则对于 W,存在$\mathbb{R}^n$ 到如下形式子集的一个分解:

$$S_p = \{x \in \mathbb{R}^n : x = p + w, w \in W\}$$

该分解由如下特性描述:与点 p 不可区分的点集恰好与包含点 p 的剖分的元素相一致,即与集合 S_p 本身相一致。如前面的分析那样,我们再次注意到这些集合是与 W 平行的平面。

本章的剩余几节及下一章将推导非线性控制系统的类似分解。

1.2 标记法

借助于如下类型的一组方程,将以状态空间的形式研究具有 m 个输入 $u_1,\cdots,u_m$ 和 p 个输出 $y_1,\cdots,y_p$ 的多变量非线性系统:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x)u_i \\ y_i &= h_i(x), \qquad 1 \leqslant i \leqslant p \end{aligned} \tag{1.2}$$

假定状态

$$x = (x_1,\cdots,x_n)$$

属于$\mathbb{R}^n$ 中的一个开集 U。

描述方程(1.2)的映射 $f,g_1,\cdots,g_m$ 为一个定义在开集 U 上的$\mathbb{R}^n$ 值映射;通常,$f(x)$,$g_1(x),\cdots,g_m(x)$表示其在 U 中特定点 x 上的取值。为方便起见,这些映射可用实变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的 n 维实值函数的向量表示,即

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1,\cdots,x_n) \\ f_2(x_1,\cdots,x_n) \\ \cdots \\ f_n(x_1,\cdots,x_n) \end{pmatrix}, \quad g_i(x) = \begin{pmatrix} g_{1i}(x_1,\cdots,x_n) \\ g_{2i}(x_1,\cdots,x_n) \\ \cdots \\ g_{ni}(x_1,\cdots,x_n) \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

描述方程(1.2)的函数 $h_1,\cdots,h_p$ 也为定义在 U 上的实值函数,而 $h_1(x),\cdots,h_p(x)$表示在特定点 x 上的取值。为了与式(1.3)相一致,这些函数可表示成如下形式:

$$h_i(x) = h_i(x_1,\cdots,x_n) \tag{1.4}$$

在下面的讨论中,假定映射 $f,g_1,\cdots,g_m$ 和函数 $h_1,\cdots,h_p$ 在其论域中是**光滑的**,即式(1.3)和式(1.4)中的所有元素为具有任意阶连续偏导数的 $x_1,\cdots,x_n$ 的实值函数。在某些场合,这一假设可用更强的假设替代,即假设所讨论的函数在其定义域中是**解析的**。

方程(1.2)描述了许多工程应用中有意义的大多数物理系统,当然也包括线性系统。后者恰好具有方程(1.2)的形式,只要$f(x)$是关于 x 的线性函数,即

$$f(x) = Ax$$

那么对于某个 $n\times n$ 阶实数矩阵 A, $g_1(x),\cdots,g_m(x)$ 为 x 的常值函数,即

$$g_i(x) = b_i$$

式中, $b_1,\cdots,b_m$ 为 $n\times 1$ 维实数向量,而 $h_1(x),\cdots,h_p(x)$ 也是 x 的线性函数,即

$$h_i(x) = c_i x$$

式中, $c_1,\cdots,c_p$ 是 $1\times n$ 维(行)实数向量。

以后将遇到的关于物理控制系统的许多例子,都可用形如式(1.2)的方程来建模。注意,作为式(1.2)的一个状态空间,仅考虑$\mathbb{R}^n$ 中的一个子集 U,而可不考虑整个$\mathbb{R}^n$ 空间本身。这种情况或者对应于由这些方程本身所建立的一个约束(这些方程的解或许不可在整个$\mathbb{R}^n$ 空间自由运动),或者对应于在输入中所特别施加的约束,例如,为避开状态空间中可能发生某类"奇异"的一些点。我们将在后面对该问题进行详细的说明。当然,在大多数场合,可设 $U=\mathbb{R}^n$。

映射 $f,g_1,\cdots,g_m$ 是将 U 中的每个点 x 指派到$\mathbb{R}^n$ 中的一个向量的光滑映射,即 $f(x)$, $g_1(x),\cdots,g_m(x)$。因此,它们常被称为定义在 U 上的光滑**向量场**。为方便起见,我们在许多场合通常将向量场与一个称之为**对偶向量场的对偶**对象放在一起来处理,对偶向量场是光滑映射,该映射将(子集 U 上的)每一点 x 指派到**对偶空间**$(\mathbb{R}^n)^*$中的一个元素。

正如我们立即将要看到的,可以很自然地将光滑对偶向量场(定义在$\mathbb{R}^n$ 的一个子集 U 上)等同于 x 的光滑函数的 $1\times n$ 维(行)向量。由回顾可知,向量 V 的对偶空间 V^*是定义在 V 上的所有**线性**实值函数的集合。一个 n 维向量空间的对偶空间本身也是一个 n 维向量空间,其中的元素称为**对偶向量**。当然,同任何其他的线性映射一样,V^* 中的一个元素 w^* 可以用一个矩阵表示。特别地,因为 w^*是从 n 维向量空间 V 到一维空间$\mathbb{R}$的一个映射,所以该表示是仅仅由单行元素构成的矩阵,即一个行向量。基于这些理由,我们可以把$(\mathbb{R}^n)^*$看做是全部 n 维行向量的集合,且$(\mathbb{R}^n)^*$的任意子空间可描述为某组 n 维行向量的全部线性组合的集族(例如,具有 n 个列的某个矩阵的行向量)。注意,如果

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

是表示 V 中一个元素的列向量,且

$$w^* = [w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_n]$$

是表示 V^* 中一个元素的行向量,那么在 v 处 w^* 的"值"由以下的积给出:

$$w^* v = \sum_{i=1}^{n} w_i v_i$$

在大多数情况下,如同文献中经常出现的情况一样,我们将以**内积**的形式来表示 v 处的 w^* 的值,记为 $\langle w^*, v\rangle$,而不是简单地写成 $w^* v$。

现在假定 $\omega_1,\cdots,\omega_n$ 为定义在$\mathbb{R}^n$ 的一个开子集 U 上的实变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的光滑实值函数,并考虑如下的行向量:

$$\omega(x) = (\omega_1(x_1,\cdots,x_n)\omega_2(x_1,\cdots,x_n)\cdots\omega_n(x_1,\cdots,x_n))$$