高校经典教材同步辅导丛书

配套高等教育出版社·吴传生主编

经济数学

——概率论与数理统计（第二版）同步辅导及习题全解

主 编 张艺馨

◆ 知识点窍 ◆ 逻辑推理 ◆ 习题全解

◆ 全真考题 ◆ 名师执笔 ◆ 题型归类

中国水利水电出版社

www.waterpub.com.cn

高校经典教材同步辅导丛书

经济数学——概率论与数理统计

（第二版）

同步辅导及习题全解

主编　张艺馨

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书是与高等教育出版社出版、吴传生主编的《经济数学——概率论与数理统计》（第二版）一书配套的同步辅导和习题解答辅导书。

本书共有九章，分别是随机事件的概率、一维随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、样本及抽样分布、参数估计、假设检验、线性回归分析与方差分析。全书结构按教材内容安排，各章均包括知识网络图、知识点归纳、典型题型归类、习题全解、总习题五部分内容。全书按教材内容，针对各章节习题给出详细解答，思路清晰，逻辑性强，循序渐进地帮助读者分析并解决问题，内容详尽，简明易懂。

本书可作为高等院校学生学习"概率论与数理统计"课程的辅导教材，也可作为考研人员复习备考的辅导教材，同时可供教师备课、命题作参考资料。

图书在版编目（CIP）数据

经济数学概率论与数理统计（第二版）同步辅导及习题全解 / 张艺馨主编. -- 北京 : 中国水利水电出版社, 2012.8
（高校经典教材同步辅导丛书）
ISBN 978-7-5170-0044-0

Ⅰ. ①经… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①经济数学－高等学校－教学参考资料②概率论－高等学校－教学参考资料③数理统计－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①F224.0②O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第177898号

策划编辑：杨庆川　责任编辑：张玉玲　加工编辑：孙　丹　封面设计：李　佳

书　名	高校经典教材同步辅导丛书 **经济数学——概率论与数理统计（第二版）同步辅导及习题全解**
作　者	主编　张艺馨
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路1号D座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（发行部）、82562819（万水）
经　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：（010）88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　版	北京万水电子信息有限公司
印　刷	北京市梦宇印务有限公司
规　格	170mm×227mm　16开本　15.75印张　415千字
版　次	2012年9月第1版　2012年9月第1次印刷
印　数	0001—7000册
定　价	25.80元

前 言

POSTSCRIPT

吴传生主编的《经济数学——概率论与数理统计》(第二版)以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点成为这门课程的经典教材，被全国许多院校采用。

为了帮助读者更好地学习这门课程，掌握更多的知识，我们根据多年的教学经验编写了这本与此教材配套的《经济数学——概率论与数理统计(第二版)同步辅导及习题全解》。本书旨在使广大读者理解基本概念、掌握基本知识、学会基本解题方法与解题技巧，进而提高应试能力。

本书作为一种辅助性的教材，具有较强的针对性、启发性、指导性和补充性。考虑到这门课程的特点，我们在内容上作了以下安排：

1. **知识结构图**。系统、全面地涵盖了本章的知识点，使学生能一目了然地浏览本章内容的框架结构。

2. **知识点归纳**。对每章知识点做了简练概括，梳理了各知识点之间的脉络联系，突出各章主要定理及重要公式，使读者在各章学习过程中目标明确，有的放矢。

3. **典型题型归类**。该部分选取了一些具有启发性或综合性较强的经典例题，对所给例题先进行分析，再给出详细解答，意在抛砖引玉。

4. **习题全解**。教材中的课后习题丰富、层次多样，对许多基础性问题，从多个角度帮助学生理解基本概念和基本理论，促其掌握基本解题方法，并对教材的课后习题做了详细的解答。

5. **总习题**。对教材的总习题做了详细的解答。

由于时间较仓促，编者水平有限，书中难免有疏漏之处，敬请各位同行和广大读者给予批评指正。

编者

2012 年 8 月

目录
contents

目录
contents

目录
contents

第一章

随机事件的概率

本章知识结构图

- 随机现象——统计规律性
- 随机试验
  - 可重复的随机试验
  - 不可重复的随机试验
- 随机事件
  - 样本空间和样本点基本事件、必然事件、不可能事件
  - 事件间的关系
    - 子事件
    - 和事件
    - 积事件
    - 差事件
    - 互斥事件
    - 对立事件
  - 运算法测
    - 交换律
    - 结合律
    - 分配律
    - 对偶律
- 随机事件的概率
  - 与频率的关系
  - 性质
    - 非负性
    - 规范性
    - 可列可加性
  - 古典概型的特点与计算
  - 几何概型的特点与计算
- 条件概率
  - 定义
  - 乘法公式
  - 全概率公式
  - 贝叶斯公式
- 独立性
  - 两个事件的独立性
  - 多个事件的独立性
- 主观概率*

知识点归纳

随机事件与样本空间

1 随机现象

可以进行大量重复试验或观察，且其结果呈现出某种规律性的不确定现象. 如在相同条件下，多次抛掷一枚均匀硬币，每次哪面朝上并不确定，但实际正面朝上的次数大约占到抛掷总次数的一半.

用 n 表示抛掷硬币的总次数，n_H 表示正面朝上的次数，$f_n(H)=\frac{n_H}{n}$表示出现正面的次数占抛掷总次数的比例，随着试验次数的增加，$f_n(H)$的值将逐渐稳定于 0.5. **随机现象的这种在大量重复试验中呈现出来的稳定性或固有规律性称为统计规律性.**

2 随机试验

随机试验指对随机现象进行观察，其通常具有如下特点：

(1)试验的可能结果不止一个，并且能实现试验的所有可能结果；

(2)进行试验前不能确定哪一个结果会出现；

(3)可以在相同的条件下重复进行.

在概率论中，随机试验通常用英文大写字母 E 来表示.

我们把不满足特点(3)的随机试验称为不可重复的随机试验，把同时满足特点(1)、(2)、(3)的随机试验称为可重复的随机试验.

3 样本空间

随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间，记为 Ω. Ω 中的元素(即 E 的每个结果)称为样本点. 样本点一般用 ω 表示，可记 $\Omega=\{\omega\}$.

4 随机事件

一般地，称试验 E 的样本空间 Ω 的子集为 E 的随机事件，简称事件，用 $A,B,\cdots$表示.

基本事件：由一个样本点组成的单点集(不能再分解).

必然事件：即试验 E 的样本空间 Ω.

不可能事件：不包含任何样本点的集合，记为 ϕ.

例 1 用集合的形式表示下列随机试验的样本空间与随机事件 A：抛一枚骰子，观察向上一面的点数；事件 A 表示“出现偶数点”；

【解】 设该试验的样本空间为 Ω，则

$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{$出现偶数点$\}=\{2,4,6\}$

事件的关系与运算

1 事件之间的关系

包含：若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记为 $A\subset B$.

相等：若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A=B$.

互不相容：若 $A\cap B=\phi$，则称事件 A 与事件 B 是互不相容的，或者是互斥的.

2 五种事件

子事件：若 $A\subset B$，此时事件 A 是事件 B 的子事件，即事件 A 发生必然导致事件 B 发生.

和事件：事件 $A\cup B=\{\omega|\omega\in A$ 或 $\omega\in B\}$称为事件 A 与事件 B 的和事件. 类似地，称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件；称 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$的和事件.

积事件：事件 $A\cap B=\{\omega|\omega\in A$ 且 $\omega\in B\}$称为事件 A 与事件 B 的积事件. 类似地，称 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件；称 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$的积事件.

差事件：事件 $A-B=\{\omega|\omega\in A$ 且 $\omega\notin B\}$称为事件 A 与事件 B 的差事件. 即事件 A 发生，事件 B 不发生的事件.

逆事件：事件 $\Omega-A$ 称为事件 A 的对立事件或逆事件，记作$\overline{A}$，即$\overline{A}=\Omega-A$.

3 事件之间的运算规律

设 A、B、C 为三个事件，则有如下规律：

交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

对偶律(德·摩根定律)：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

例 2 设 A、B、C 是三个事件，用 A、B、C 表示下列事件：

(1)A 发生，B 与 C 不发生；(2)A、B、C 至少有一个不发生.

【分析】 (1)B 与 C 不发生即$\overline{B}$与$\overline{C}$的积事件发生；(2)即$\overline{A}$、$\overline{B}$、$\overline{C}$的和事件发生，也可以考虑用对偶律来表示.

【解】 (1)$A\overline{B}\overline{C}$；(2)$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$或$\overline{ABC}$.

随机事件的频率与概率

1 事件的频率

频率：在相同的条件下重复进行了 n 次试验，如果事件 A 在这 n 次试验中出现了 n_A 次，则称比值$\frac{n_A}{n}$为事件 A 发生的频率，记为 $f_n(A)$，即 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$.

频率的性质：

(1) 非负性：$f_n(A)\geqslant 0$；

(2) 规范性：$f_n(\Omega)=1$；

(3) 有限可加性：若 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是一组两两互不相容的事件，则 $f_n(\bigcup\limits_{i=1}^{k}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{k}f_n(A_i)$

2 事件的概率

概率的公理化定义：设 E 是随机试验，Ω 是其样本空间，对 E 的每一个事件 A，将其对应于一个实数，记为 $P(A)$，称为事件 A 的概率，如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件：

(1) 非负性：对任一个事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$；

(2) 规范性：对必然事件 Ω，有 $P(\Omega)=1$；

(3) 可列可加性：设 $A_1,A_2,\cdots$ 是两两互不相容的事件，即对于 $i\neq j$，$A_iA_j=\phi$，$i,j=1,2,\cdots$，则有 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(A_i)$.

概率的性质：

性质 1　$P(\phi)=0$；

性质 2(有限可加性)　设 $A_1,A_2,\cdots A_n$ 两两互不相容，则 $P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$；

性质 3　若事件 A 和 B 满足 $A\subset B$，则有 $P(B-A)=P(B)-P(A)$，$P(B)\geqslant P(A)$；

推论　对任意两个事件 A 和 B，有 $P(B-A)=P(B)-P(AB)$；

性质 4　对任意事件 A，$P(A)\leqslant 1$；

性质 5　对任一事件 A，有 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

加法公式：　对任意两个事件 A,B，有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

例 3　设 A 和 B 为两个随机事件，证明：$P(AB)\leqslant P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$.

【证明】 $\because AB\subset A\cup B$，由性质 3 可得，$P(AB)\leqslant P(A\cup B)$

又 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

而 $P(AB)\geqslant 0$

$\therefore P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$

综上可得：$P(AB)\leqslant P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$

3 等可能概型(古典概型)

等可能概型(古典概型)的定义：

若随机试验具有如下两个特征：

(1)试验的样本空间只含有有限个元素，即 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$；

(2)试验中每个基本事件发生的可能性相同，即

$$P(\{\omega_1\})=P(\{\omega_2\})=\cdots=P(\{\omega_n\})$$

则该随机试验称为等可能概型或古典概型.

等可能概型(古典概型)中事件 A 的概率计算公式：

$$P(A)=\sum_{j=1}^{k}P(\{\omega_{i_j}\})=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 所包含的基本事件数}}{\Omega\text{ 中基本事件总数}}$$

例 4 掷两枚骰子，求事件 A 为出现的点数之和等于 3 的概率.

【分析】 一个随机试验联系一个样本空间，正确地写出试验的样本空间是解题的关键. 这里的一次试验是：先掷一枚骰子，记下所出现的点数 $i(i=1,2,\cdots,6)$；然后再掷另一枚骰子，记下所出现的点数 $j(j=1,2,\cdots,6)$，因而基本事件是 (i,j).

【解】 样本空间为 Ω

基本事件总数为 $n=N(\Omega)=36$，A 所含基本事件数为 $(1,2)$ 和 $(2,1)$，即 $k=N(A)=2$，则 $P(A)=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}=\dfrac{2}{36}=\dfrac{1}{18}$

4 几何概型

几何概型的定义：保留古典概型的等可能性，而允许试验的所有可能结果为直线上的一条线段，平面上的一区域或空间中的一立体等具有无限多个结果的情形，称具有这种性质的试验模型为几何概型.

几何概型中事件 A 的概率计算公式：

$$P(A)=\frac{A\text{ 事件的几何度量值}}{\text{样本空间的几何度量值}}$$

若在一个面积为 $S(\Omega)$ 的区域 Ω 中等可能地任意投点，此处“等可能”的含义是：点落入 Ω 中任何区域 A 的可能性的大小与区域 A 的面积 $S(A)$ 成正比，而与其位置和形状无关. 记事件 $A=\{$点落入区域 $A\}$，则有 $P(A)=tS(A)$，其中 t 为比例常数，由 $P(\Omega)=tS(\Omega)=1$ 知 $t=\dfrac{1}{S(\Omega)}$，从而 $P(A)=\dfrac{S(A)}{S(\Omega)}$

条件概率、全概率公式与贝叶斯公式

1 条件概率

条件概率的定义：设 A 和 B 是两个事件，且 $P(A)>0$，称 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率.

可以验证，条件概率 $P(\cdot|A)$ 满足概率公理化定义中的三条公理，即

(1)对每个事件 B，有 $P(B|A)\geqslant 0$；

(2)$P(\Omega|A)=1$；

(3)设 $B_1,B_2,\cdots$ 是两两互不相容的事件，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \mid A\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(B_i \mid A)$$

根据具体的情况，可选用下列两种方法之一来计算条件概率 $P(B|A)$：

(1)在缩减后的样本空间 Ω_A 中计算；

(2)在原来的样本空间 Ω 中，直接由定义计算.

乘法公式：设 $P(A)>0$，则有 $P(AB)=P(B|A)P(A)$.

一般地，若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 $n(n\geqslant 2)$ 个事件，且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则由归纳法可得：

$P(A_1A_2\cdots A_{n-1})=P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})P(A_{n-1}|A_1A_2\cdots A_{n-2})\cdots P(A_2|A_1)P(A_1)$

例 5 有一个靶子，由甲先射一枪，射中的概率为 0.4，若甲没射中，则由乙射，乙射中的概率为 0.5，求靶子是由乙射中的概率.

【分析】 解此题要注意条件“若甲没射中，则由乙射”，也就是说事件{乙射中}的条件是事件{甲没射中}发生，由此用条件概率及乘法公式来解答.

【解】 设事件 A 为甲射中靶子，事件 B 为乙射中靶子，则样本空间 Ω 为

$$\Omega=A\cup\overline{A}B\cup\overline{AB}$$

且 $B=\overline{A}B,P(B)=P(\overline{A}B),P(B|A)=0.5$

所以 $P(B)=1-P(A)-P(\overline{AB})=1-0.4-P(\overline{A})P(\overline{B}|\overline{A})=1-0.4-0.6\times0.5=0.3$

2 **全概率公式及贝叶斯公式**

划分：设 Ω 为试验 E 的样本空间，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 E 的一组事件，若

(1) $B_iB_j=\phi;i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n$;

(2) $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=\Omega$.

则称 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为样本空间的一个划分.

全概率公式：设试验 E 的样本空间为 Ω，A 为 E 的事件，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是 Ω 的一个划分，且 $P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$P(A)=P(A\mid B_1)P(B_1)+\cdots+P(A\mid B_n)P(B_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A\mid B_i)P(B_i)$$

已知所有可能“原因”发生的概率，求“结果”发生的概率，这一类问题称为全概率问题，而全概率公式可以通过综合分析一个较为复杂的事件发生的各种不同原因、情况或途径及其可能性求得该事件发生的概率.

例 6 某种产品由工厂的甲、乙、丙三个车间生产，它们的产量份额分别为 $\frac{1}{5}$、$\frac{2}{5}$、$\frac{2}{5}$，其次品率分别为 5%、4%、3%，现将他们生产的产品混放在一起，并从中任取一件产品，求它是次品的概率为多少？

【分析】 此题为非常典型且简单的全概率问题.

【解】 设 B_1、B_2、B_3 为任取一件产品，分别取到甲、乙、丙三个车间生产的产品的事件，设 A 为任取一件产品为次品，此处 B_1、B_2、B_3 构成样本空间的一个划分，由条件知道

$$P(B_1)=\frac{1}{5},P(B_2)=\frac{2}{5},P(B_3)=\frac{2}{5}$$

$$P(A|B_1)=5\%,P(A|B_2)=4\%,P(A|B_3)=3\%$$

有

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)\\&=\frac{5}{100}\times\frac{1}{5}+\frac{4}{100}\times\frac{2}{5}+\frac{3}{100}\times\frac{2}{5}=\frac{19}{500}\end{aligned}$$

贝叶斯公式：设试验 E 的样本空间为 Ω，A 为 E 的事件，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是 Ω 的一个划分，且 $P(A)>0,P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(A\mid B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A\mid B_j)P(B_j)}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

贝叶斯公式也称为“后验概率”公式. 在已知结果发生的情况下，贝叶斯公式可以求得导致该事

件发生的各种原因、情况或途径的可能性大小.

例 7 已知男人中有5%是色盲患者,女人中有0.25%是色盲患者.现从男女人数相等的人群中随机地挑选一人,恰好是色盲患者,问此人是男性的概率是多少?

【解】 令事件 A={随机地选一人是女性},对立事件$\overline{A}$={随机地选一人是男性}.因人群中男女人数相等,所以 $P(A)=P(\overline{A})=\frac{1}{2}$,且 A、$\overline{A}$是样本空间的一个划分.事件 C={随机地挑选一人恰好是色盲}.已知

$$P(C|A)=\frac{0.25}{100},P(C|\overline{A})=\frac{5}{100}$$

由全概率公式得

$$\begin{aligned}P(C)&=P(A)P(C|A)+P(\overline{A})P(C|\overline{A})\\&=\frac{1}{2}\times\frac{0.25}{100}+\frac{1}{2}\times\frac{5}{100}=0.2625\end{aligned}$$

由贝叶斯公式得

$$P(\overline{A}|C)=\frac{P(\overline{A}C)}{P(C)}=\frac{P(\overline{A})P(C|\overline{A})}{P(C)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{5}{100}}{0.2625}=0.9524$$

事件的相互独立性

1 两个事件相互独立

定义:设 A、B 是两个事件,如果满足 $P(AB)=P(A)P(B)$,则称事件 A 和 B 相互独立,简称 A 和 B 独立.

定理 1:若事件 A 与事件 B 相互独立,则 A 与$\overline{B}$、$\overline{A}$与 B、$\overline{A}$与$\overline{B}$也分别相互独立.

2 多个事件相互独立

定义:设 A_1、A_2、A_3 是三个事件,如果满足等式

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)$$
$$P(A_2A_3)=P(A_2)P(A_3)$$
$$P(A_1A_3)=P(A_1)P(A_3)$$
$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

则称事件 A_1、A_2、A_3 相互独立.

推广到 n 个事件,设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 $n(n\geqslant 2)$个事件,如果对其中任意 2 个,任意 3 个,…,任意 n 个事件的积事件,其概率都等于各事件的概率之积,则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

定理 1:如果 $n(n\geqslant 2)$个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立,则将其中任何 $m(1\leqslant m\leqslant n)$个事件换成相应的对立事件,形成的 n 个新事件仍相互独立.

定理 2:若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个相互独立的事件,则这 n 个事件中至少有一个发生的概率为

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=1-\prod_{i=1}^{n}[1-P(A_i)]$$

例 8 设事件 A 和 B 相互独立,且 $P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)=\frac{1}{4}$,求 $P(A)$和 $P(B)$.

【分析】 由 A 和 B 相互独立,可知 A 与 $\overline{B}$、$\overline{A}$ 与 B 也是相互独立的.

【解】

$$P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})=P(A)[1-P(B)]=\frac{1}{4}$$

$$P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B)=[1-P(A)]P(B)=\frac{1}{4}$$

解方程组得

$$P(A)=\frac{1}{2},P(B)=\frac{1}{2}$$

主观概率

对于不可重复进行的试验,只要符合概率的公理化定义的三个基本条件,我们就可以定义概率,称之为主观概率,它的确定依赖于经验所形成的个人信念,或是依赖于对历史信息的提炼、概括和应用.

典型题型归类

随机试验、样本空间、随机事件

例 9 写出下列随机试验的样本空间:

(1)记录一个小班一次数学考试的平均分数(以百分制记分);

(2)对某工厂出厂的产品进行检查,合格的记上"正品",不合格的记上"次品",如果连续查出 2 个次品就停止检查,或检查 4 个产品就停止检查,记录检查结果;

(3)在单位圆内任意取一点,记录其坐标.

【分析】 我们可设该小班有 n 个同学,每个人的分数可能的取值为 0,1,2,…,100,则 n 个分数和的可能取值为 $0,1n,2n,\cdots,100n$.

【解】 (1)设该小班有 n 个人,平均分的可能取值有 $\frac{0}{n},\frac{1}{n},\cdots\frac{100n}{n}$,则样本空间为

$$S=\left\{\frac{k}{n}\,\middle|\,k=0,1,2,\cdots,100n\right\}$$

(2)可设 A 表示正品,$\overline{A}$ 表示次品,则样本空间为

$$S=\left\{\begin{array}{l}(\overline{A},\overline{A}),(A,\overline{A},\overline{A}),(\overline{A},A,\overline{A},\overline{A}),(\overline{A},A,\overline{A},A),(\overline{A},A,A,\overline{A}),(A,A,\overline{A},\overline{A}),(A,\overline{A},A,\overline{A}),\\(A,\overline{A},A,A),(\overline{A},A,A,A),(A,A,\overline{A},A),(A,A,A,\overline{A}),(A,A,A,A)\end{array}\right\}$$

(3)设任取一点的坐标为 (x,y),则样本空间为

$$S=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$$

概率的性质、古典概型与几何概型

例 10 设 A、B、C 是三事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=P(BC)=0$，$P(AC)=\frac{1}{8}$，求 A、B、C 至少有一个发生的概率.

【分析】 看到题目条件应想到可用概率的加法公式.

【解】 $P(ADBDC)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)=\frac{3}{4}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$，

其中由 $P(AB)=P(BC)=0$，而 $ABC\subset AB$，可知 $P(ABC)=0$.

例 11 从 5 双不同的鞋子中任取 4 只，问这 4 只鞋子中至少有两只鞋子配成一双的概率是多少？

【分析】 利用概率的性质，从 A 的对立事件出发，有 $P(A)+P(\overline{A})=1$

【解】 设事件 $A\{4$ 只鞋子中至少有两只配成一双$\}$

法一：$\overline{A}\{4$ 只鞋中无任两只可配成一双$\}$，10 只鞋中任取 4 只的所有可能的组合数为 C_{10}^4，则样本空间 S 有 C_{10}^4 个基本事件；$\overline{A}$ 为以 5 双鞋中任取 4 双，再从每双中任取一只，有 $C_5^4 2^4$ 种取法.

所以
$$P(\overline{A})=\frac{C_5^4\cdot 2^4}{C_{10}^4}=\frac{5\times 2^4}{210}=\frac{8}{21}$$
$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{8}{21}=\frac{13}{21}$$

【分析】 利用组合法直接计算事件的基本事件数，从而求得 $P(A)$.

法二：考虑 A 的基本事件数，任取 4 只鞋能配成一双的取法有 $C_5^1C_2^2C_4^2 2^2$ 种，能配成两双的取法有 $C_5^2C_2^2$ 种，则 A 有$(C_5^1C_2^2C_4^2 2^2+C_5^2C_2^2)$个基本事件，则
$$P(A)=\frac{C_5^1C_2^2C_4^2 2^2+C_5^2C_2^2}{C_{10}^4}=\frac{130}{210}=\frac{13}{21}$$

例 12 从$[0,1]$中随机地取两个数，其积不小于 $\frac{3}{16}$，求其和不大于 1 的概率.

【分析】 这是一道利用几何概型求解的题，应联想到在二维平面作图计算求解.

【解】 设所取的两数为 x 和 y，则有
$$0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1.$$
将(x,y)看作平面 xoy 上一点的直角坐标，则所有的基本事件可用图中正分形区域内的点表示出来，即样本空间所对应的几何区域为边长是 1 的正方形，因而 $S(a)=1$.

又设事件 $A\{x$ 和 y 的积不小于$\frac{3}{16}$，其和不大于 $1\}$

即有
$$xy\leqslant\frac{3}{16},x+y\leqslant 1$$

则 C_A 是在正方形 $OABC$ 内由双曲线 $xy=\frac{3}{16}$ 和直线 $x+y=1$ 所围成的曲边形，如图 1-1 所示.

解方程组$\begin{cases} xy=\dfrac{3}{16} \\ x+y=1 \end{cases}$

易求得点 M 与 N 的坐标分别为$\left(\frac{1}{4}和\frac{3}{4}\right)$、$\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$，则

$$S(G_A)=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}(1-x)\mathrm{d}x-\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}\frac{3}{16}\frac{\mathrm{d}x}{x}$$
$$=\frac{1}{4}-3\ln\frac{3}{16}$$
$$=0.044$$

所以

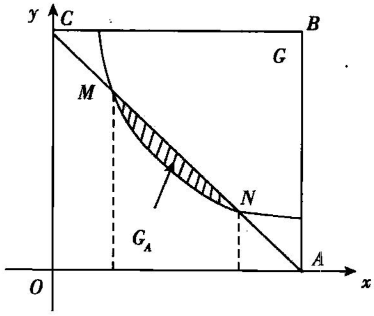

图 1-1　围成的曲边形

$$P(A)=\frac{S(GA)}{S(G)}=0.044$$

条件概率、加法公式与乘法公式

例 13　已知 $P(A)\frac{1}{4}$，$P(B|A)=\frac{1}{3}$，$P(A|B)=\frac{1}{2}$，求 $P(A\cup B)$

【分析】　利用加法公式与乘法公式求解.

【解】　由概率的乘法公式，得

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$$

又 $P(AB)=P(B)P(A|B)$，则

$$P(B)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}$$

由概率的加法公式 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=P(AB)$，可得

$$P(A\cup B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$$

全概率公式与贝叶斯公式，事件的独立性

例 14　设根据以往记录的数据分析，某船只运输的某种物品损坏的情况共有三种：损坏 2%（事件 A_1），损坏 10%（事件 A_2），损坏 90%（事件 A_3）. 且知 $P(A_1)=0.8$，$P(A)=0.15$，$P(A_3)=0.05$. 现从已被运输的物品中随机地取 3 件，发现这 3 件都是好的（事件 B）. 试求 $P(A_1|B)$、$P(A_2|B)$、$P(A_3|B)$（设物品件数很多，取出一件后不影响取后一件是否为好品的概率）.

【分析】　事件 $A_i=\{$损坏情况为第 i 种$\}(i=1,2,3)$，A_1、A_2、A_3 是样本空间的一个划分. 又因物品件数很多，不放回抽样近似看作放回抽样，所以任取 3 件时，是否是好品相互独立.

【解】　因任取 3 件是否为好品相互独立，则 $P(B|A_1)=0.98^3$，$P(B|A_2)=0.90^3$，$P(B|A_3)=0.10^3$
由全概率公式，得