高等數學學習叢書

偏微分方程

—原理及題解—

孫家樂
編著者 曹淑芳
楊琪瑜

中央圖書出版社出版

中央圖書出版社
大專用書
目錄備索
臺北市重慶南路一段一四一號二樓
郵政劃撥帳户：0000914-6 號
電話：(02) 2331-5726・2371-9893
傳真機：2331-1316

ISBN: 957-637-440-5

高等數學學習叢書

偏微分方程

—原理及題解—

孫家樂
東南大學教授

編著者 曹淑芳
東南大學教授

楊琪瑜
南京林業大學教授

中央圖書出版社出版

國家圖書館出版品預行編目資料

偏微分方程：原理及題解／孫家樂, 曹淑芳, 楊琪瑜編著. – 初版. -- 台北市：中央圖書, 民 89
面：　　公分. – (高等數學學習叢書)
ISBN: 957-637-440-5 (平裝)
1. 微分
314.22　　89001993

高等數學學習叢書

偏微分方程 — 原理及題解

編著者　孫家樂　曹淑芳　楊琪瑜

出版者　中央圖書出版社
新聞局出版事業登記證，
局版臺業字第○九二○號

發行者　林　在　高

發行所　中央圖書出版社
臺北市重慶南路一段一四一號二樓
電話：(02) 2331-5726・2371-9893
傳真：(02) 2331-1316
郵撥：0000914-6

排版者　重慶長山科技有限公司
重慶市南坪大石路信園公寓 2 號樓 1 單元 201 號
電話：(86-23) 62838934　62806054
郵政編碼：400060

印刷所　國順文具印刷行
板橋市中正路二一六巷二弄十三號

中華民國八十九年二月初版

定價新臺幣伍佰玖拾元整

ISBN: 957-637-440-5　　編號：3747

序　言

在物理、力學和其它自然科學以及工程技術中經常提出大量的偏微分方程問題。例如在水壩的溫度應力分析中需要研究熱的傳播問題,在大型水利工程中需要研究河渠的不穩定流問題,對地面地磁場的分佈進行分析就必須對高斯地磁理論進行研究,而這些研究都與偏微分方程有密切的聯繫。近年來隨着科學技術的發展,偏微分方程的應用範圍愈來愈廣,而對偏微分方程的深入研究反過來也推動了工程技術和工業生產的發展。因此與自然科學和工程技術的密切聯繫是偏微分方程的一個特點,由於偏微分方程與物理模型有密切的聯繫,故偏微分方程又稱爲數學物理方程。

與其它數學學科的密切聯繫,則是偏微分方程的另一個特點。在求解偏微分方程的過程中,我們就要用到例如常微分方程、富里葉級數、積分變換、保角映射、變分法等數學知識。由於需要用到的知識的廣泛性與多樣性,使初學者産生了許多不必要的困難。因此我們編了“偏微分方程原理及題解”這本書,其目的是幫助讀者理清不同偏微分方程所需用到的不同數學知識,抓住重點、分析難點、培養比較熟練的運算能力和綜合運用所學知識以提高分析問題、解決問題的能力。

由於不同物理現象往往歸結爲不同類型的偏微分方程,而不同類型的方程各有自己的基本理論與解題技巧,因此本書比較全面地介紹了偏微分方程中的三種典型方程:波動方程、熱傳導方程與位勢方程的各種不同定解問題的解法,通過各種不同典型的例題進行詳細分析並對一些基本原理作了定性的討論。本書共分七章,第一章是基本概念,討論典型方程的推導、方程化簡與分類;第二章爲預備知識,介紹偏微分方程中需要用到的衆多數學内容;第三、四、五、六章分别介紹偏微分方程中的各種常用解法;第七章則對偏微分方程的一些基本原理作定性的研究分析。每章自成體系,

讀者可按需要選學或參考有關内容。

本書可作爲應用數學專業、工科研究生和理工科有關專業的學生以及科技工作者學習偏微分方程的參考書。

本書的編寫方式有如下特點，即每章内容分三部分：基本原理、解答題和補充題。比較多的解答題能方便讀者自學與查詢，而相當數量的補充題，則附有提示、答案可供讀者練習之用。

編者希望本書能對讀者起到一個不見面的輔導教師的作用，爲廣大讀者解憂排難，成爲他們的良師益友。

本書第一、二、三章由東南大學孫家樂教授編寫，第四、五、七章爲東南大學曹淑芳教授編寫，第六章爲南京林業大學楊琪瑜教授編寫。

由於編者水平所限，謬誤之處懇請讀者批評指正。

編者　1999.1

目　　錄

第一章　基本方程和定解問題

偏微分方程(partial differential equation)是以描述物理現象和物理過程爲主要研究對象的一門學科,故又稱爲數學物理方程(mathematical physics equation),因此它的特點之一就是與自然科學和工程技術有密切的聯繫。要求讀者通過對本章的學習能初步掌握如何將生産實際和科學研究中出現的一些物理模型(physical models)歸納爲偏微分方程的定解問題(problem of determining solution),同時通過對二階方程的分類與化簡使讀者進一步理解對本章下述三種典型方程討論的重要性。

第一節　偏微分方程的定義與推導

偏微分方程的定義

含有多個自變量、未知函數以及它的偏導數的關係式稱爲偏微分方程。若其中最高階的偏導數爲 n 階,則稱其爲 n 階偏微分方程(n order partial differential equation)。

例如方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}+a(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=f(x,y)$$

對未知函數 u 來説是一階偏微分方程,而下列方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f(x,y)$$

$$\nabla^4\phi=\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\phi}{\partial y^4}=0$$

分别爲二階偏微分方程與四階偏微分方程。

具有兩個自變量 x,y 的二階偏微分方程的一般形式爲

$$F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0 \tag{1.1}$$

若方程(1.1)具有形式

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+F_1\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \tag{1.2}$$

(其中 a_{11}, a_{12}, a_{22} 均爲 x, y 的函數)就稱方程(1.2)爲關於最高階導數爲綫性的偏微分方程。如果 a_{11}, a_{12}, a_{22} 不僅依賴於 x, y, 而且也是 u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ 的函數,此時就稱方程(1.2)爲擬綫性偏微分方程(quasilinear partial differential equation)。

如果方程的未知函數及其各階偏導數都是一次的,即

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+b_1\frac{\partial u}{\partial x}+b_2\frac{\partial u}{\partial y}+cu=f \tag{1.3}$$

其中 a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c 及 f 都是 x, y 的函數,這時就稱方程(1.3)爲二階綫性偏微分方程。如果(1.3)中的係數都是常數,則稱其爲二階常係數綫性偏微分方程(constant coefficient linear partial differential equation)。

如果(1.3)中 $f\equiv 0$, 則稱(1.3)爲齊次偏微分方程(homogeneous partial differential equation),否則稱爲非齊次偏微分方程(nonhomogeneous partial differential equation)。

例如方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+u^2=f(x,\ y)$$

是一個二階擬綫性非齊次偏微分方程(second order quasilinear nonhomogeneous partial differential equation)。方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a(x,\ y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2u=0$$

是一個二階綫性齊次偏微分方程(second order linear homogeneous partial differential equation)。而方程

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=u$$

就是一個一階非綫性偏微分方程(first order nonlinear partial differential equation)。

三種典型方程

一、波動方程

三維波動方程(three dimensional wave equation)爲

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{1.4}$$

或

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,\ y,\ z,\ t) \tag{1.5}$$

方程(1.4)是齊次方程,稱爲自由波動方程(free wave equation);(1.5)是非齊次方程,

稱爲强迫波動方程(forced wave equation)。

相應地一維、二維的波動方程分别爲

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,\ t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x,\ y,\ t)$$

一維波動方程也稱爲弦振動方程(vibrating string equation)。

二、熱傳導方程

三維熱傳導方程(three dimensional heat conduction equation)爲

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,\ y,\ z,\ t) \tag{1.7}$$

方程(1.6)爲無熱源(nonheater)的熱傳導方程,(1.7)爲有熱源的熱傳導方程。

相應地一維、二維的熱傳導方程分别爲

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,\ t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x,\ y,\ t)$$

三、位勢方程

二維拉普拉斯方程(two dimensional Laplace equation)爲

$$\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{1.8}$$

二維泊松方程(poisson equation)爲

$$\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=g(x,\ y) \tag{1.9}$$

Δu(或 $\nabla^2 u$)稱爲拉普拉斯算符(Laplacian)。三維的拉普拉斯方程和泊松方程分别爲

$$\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

$$\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=g(x,\ y,\ z)$$

拉普拉斯算符在極座標(polar coordinates)、柱座標(circular cylindrical coordinates)和球座標(spherical coordinates)中分别是

$$\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

解 答 題

1. 有一長爲 l,兩端拉緊的弦,在平衡位置附近作垂直於直綫方向的微小橫振動,試求弦上各點的運動規律。

解: 爲了推導相應的偏微分方程,我們先作如下假設: 即將弦看成是“理想的弦”。

1° 弦是完全柔順的,即它不能反抗彎曲力矩,張力總是沿着弦在 x 點處的切綫方向;

2° 弦上各質點的水平位移與垂直位移相比可以忽略不計,即弦作橫向振動;

3° 弦作微小振動時,弦上任意一點的切綫斜率遠小於 1, 即 $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \ll 1$;

4° 弦細而輕,即自重忽略不計,並且運動只發生在平面內。

其次建立座標系用微元分析法進行分析。設 $u(x, t)$ 表示弦上各點在時刻 t 沿垂直於 x 方向的位移.取 x_1 到 x_2 這一段微元進行分析(見圖 1-1)。

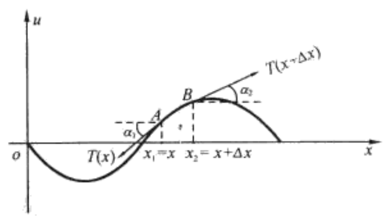

圖 1-1

微元弧長爲 $\Delta s = \int_x^{x+\Delta x}\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\,dx$, 由於 $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \ll 1$, 所以

$$\Delta s \approx \int_x^{x+\Delta x} dx = \Delta x$$

即弦在振動過程中並未伸長,由虎克(Hooke)定理知張力在運動過程中保持不變,即張力與時間無關。在 x_1 處的張力記爲 $T(x)$, 在 x_2 處的張力記爲 $T(x+\Delta x)$. 在 x_1 處,水平分力爲 $-T(x)\cos\alpha_1$, 垂直分力爲 $-T(x)\sin\alpha_1$; 在 x_2 處,水平分力爲 $T(x+\Delta x)\cos\alpha_2$, 垂直分力爲 $T(x+\Delta x)\sin\alpha_2$. 因爲是橫向振動,所以水平合力爲零,即

$$T(x+\Delta x)\cos\alpha_2 - T(x)\cos\alpha_1 = 0 \qquad \text{(A)}$$

由於 $\cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha_1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \approx 1$, 同理 $\cos\alpha_2 \approx 1$, 所以(A)式爲

$$T(x+\Delta x)-T(x)=0 \quad 即 \quad T(x+\Delta x)=T(x)=T\ (常數)$$

垂直方向的合力 $F=ma$. 設弦的綫密度爲 ρ, 微元弦 AB 在重心 $\bar{x}$ ($x\leqslant\bar{x}\leqslant x+\Delta x$) 處的位移爲 $u(\bar{x},t)$, 則

$$T(x+\Delta x)\sin\alpha_2-T(x)\sin\alpha_1=T(\sin\alpha_2-\sin\alpha_1)=\rho\cdot\Delta x\,\frac{\partial^2 u(\bar{x},t)}{\partial t^2}$$

因爲 $\sin\alpha_1\approx\tan\alpha_1=\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$, $\sin\alpha_2\approx\tan\alpha_2=\dfrac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}$, 所以有

$$T\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]=\rho\Delta x\,\frac{\partial^2 u(\bar{x},t)}{\partial t^2} \tag{B}$$

利用微分中值定理得

$$T\,\frac{\partial^2 u(x+\theta\Delta x,t)}{\partial x^2}\Delta x=\rho\Delta x\,\frac{\partial^2 u(\bar{x},t)}{\partial t^2}\quad (0<\theta<1)$$

消去 Δx 再令 $\Delta x\to 0$, 此時 $x+\theta\Delta x\to x$, $\bar{x}\to x$, 於是得

$$T\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\rho\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

記 $T/\rho=a^2$, 就得没有外力作用下的弦振動方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{C}$$

當存在外力作用時, 設在 x 處的外力密度爲 $F(x,t)$, 則在小弦段 AB 上所受外力爲 $\int_x^{x+\Delta x}F(x,t)dx$, 於是 (B) 式變成

$$T\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]+\int_x^{x+\Delta x}F(x,t)dx=\rho\Delta x\,\frac{\partial^2 u(\bar{x},t)}{\partial t^2}$$

利用微分中值定理及積分中值定理得

$$T\,\frac{\partial^2 u(x+\theta\Delta x,t)}{\partial x^2}\Delta x+F(x+\lambda\Delta x,t)\Delta x=\rho\Delta x\,\frac{\partial^2 u(\bar{x},t)}{\partial t^2}\quad (0<\theta,\ \lambda<1)$$

消去 Δx 再令 $\Delta x\to 0$, 即得

$$T\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+F(x,t)=\rho\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

記 $T/\rho=a^2$, $F(x,t)/\rho=f(x,t)$, 就得到有外力作用下的弦振動方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t) \tag{D}$$

方程 (C) 和 (D) 又稱爲一維波動方程。方程 (C) 爲齊次方程, 方程 (D) 爲非齊次方程。

若用同樣方法討論薄膜振動, 就得二維波動方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t)$$

若討論電磁波振動, 就得三維波動方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t)$$

2. 考慮一來一往平行的高頻傳輸綫(沿 x 軸方向),每單位長度的綫間電容爲 C, 每單位長度迴路的電感爲 L. 電路中的電流 i 和電壓 v 不僅是時間 t 的函數而且也隨 x 而變,分别記爲 $i(x, t)$ 和 $v(x, t)$, 試求 $i(x, t)$, $v(x, t)$ 所滿足的方程(該方程稱爲高頻輸電綫方程,又稱電報方程)。

解: 考慮微元段 $(x, x+\Delta x)$, 若電導與電阻所産生的效應可以忽略,根據克希霍夫(Kirchhoff)定律: 電壓降應等於電動勢之和,即

$$v-(v+\Delta v)\approx L\Delta x\frac{\partial i}{\partial t}$$

小段兩端的電流並不相等,這是由於兩綫之間的電容 $C\Delta x$ 上有充放電。因此

$$i-(i+\Delta i)\approx C\Delta x\frac{\partial v}{\partial t}$$

所以

$$\frac{\Delta v}{\Delta x}\approx -L\frac{\partial i}{\partial t},\quad \frac{\Delta i}{\Delta x}\approx -C\frac{\partial v}{\partial t}$$

令 $\Delta x\to 0$ 即得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial x}=-L\dfrac{\partial i}{\partial t}\\[2mm] \dfrac{\partial i}{\partial x}=-C\dfrac{\partial v}{\partial t}\end{cases}\quad 亦即\quad \begin{cases}-\dfrac{1}{L}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 i}{\partial x\partial t}\\[2mm] \dfrac{\partial^2 i}{\partial x\partial t}=-C\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}\end{cases}$$

於是得到電壓 v 滿足的方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{1}{LC}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

同理可得電流 i 滿足的方程

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}=\frac{1}{LC}\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}$$

記 $\dfrac{1}{LC}=a^2$, 即得高頻輸電綫方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}$$

它們均滿足一維波動方程。

3. 設有長爲 l 的均質柔軟弦,一端固定,在重力作用下處於鉛垂平衡位置。現在拉它一下然後再放手使之作微小振動,試求振動方程。

解: 取 $x_1=x$, $x_2=x+\Delta x$ 這一段微元(圖 1-2), 它的兩端張力爲 T_1, T_2. 由於在重力作用下故在 x_1 處的張力爲

$$T_1=(l-x)\rho g\quad (\rho 爲綫密度)$$

在 x_2 處的張力

$$T_2=(l-x-\Delta x)\rho g$$

微元水平方向的合力爲

$$T_2\sin\alpha_2 - T_1\sin\alpha_1$$

由於 $\sin\alpha \approx \tan\alpha = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$，故有

$$\begin{aligned} T_2\sin\alpha_2 - T_1\sin\alpha_1 &= (l-x-\Delta x)\rho g \frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - (l-x)\rho g \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \\ &= \rho g\Delta x \frac{\partial}{\partial x}\left\{[l-(x+\theta\Delta x)]\frac{\partial u(x+\theta\Delta x,t)}{\partial x}\right\} \quad 0<\theta<1 \end{aligned}$$

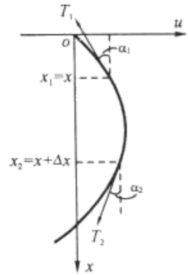

圖 1－2

設 $\bar{x}$ 爲微元的重心座標（$x \leqslant \bar{x} \leqslant x+\Delta x$），則由牛頓(Newton)第二定律得

$$\rho g\Delta x \frac{\partial}{\partial x}\left\{[l-(x+\theta\Delta x)]\frac{\partial u(x+\theta\Delta x,t)}{\partial x}\right\} = \rho\Delta x \frac{\partial^2 u(\bar{x},t)}{\partial t^2}$$

消去 Δx 再令 $\Delta x \to 0$ 即得垂直弦的微小振動方程爲

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g\frac{\partial}{\partial x}\left[(l-x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]$$

我們亦可從動量定律來分析。由於微元在水平方向的合力爲

$$\rho g(l-x_2)\frac{\partial u(x_2,t)}{\partial x} - \rho g(l-x_1)\frac{\partial u(x_1,t)}{\partial x}$$

由動量定律

$$\int_{t_1}^{t_2}\rho g\left[(l-x_2)\frac{\partial u(x_2,t)}{\partial x} - (l-x_1)\frac{\partial u(x_1,t)}{\partial x}\right]dt = \int_{x_1}^{x_2}\rho\left[\frac{\partial u(x,t_2)}{\partial t} - \frac{\partial u(x,t_1)}{\partial t}\right]dx$$

即

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} g\frac{\partial}{\partial x}\left[(l-x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]dxdt = \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dxdt$$

故得振動方程爲

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g\frac{\partial}{\partial x}\left[(l-x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]$$

4. 已知有一物體 G，試推導在熱傳導過程中溫度所滿足的方程。

解：設 $u(x,y,z,t)$ 爲 G 的內點 (x,y,z) 處在時刻 t 的溫度，n 爲曲面元素 ΔS 在點 (x,y,z) 處的法向，並規定 n 指向 ΔS 的正側。根據富里葉(Fourier)熱傳導定理，在 Δt 時間內從 ΔS 的負側流向正側的熱量爲

$$\Delta Q = -K(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial n}\Delta S\Delta t$$

其中 $K(x,y,z)$ 爲物體在點 (x,y,z) 處的熱傳導係數，$\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 爲溫度函數在 (x,y,z) 處沿 n 的方向導數。

對於 G 內任意一個封閉曲面 S 從 t_1 到 t_2 時間內流入 S 的熱量爲

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2}\left[\iint_S K\frac{\partial u}{\partial n}dS\right]dt$$

記 S 所圍的區域爲 Ω，而 Ω 內溫度升高所吸收的熱量爲

$$Q_2 = \iiint_{\Omega} C(x, y, z)\rho(x, y, z)[u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)]dxdydz$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\iiint_{\Omega} C(x, y, z)\rho(x, y, z)\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t}dxdydzdt$$

其中 $C(x, y, z)$ 爲比熱，$\rho(x, y, z)$ 爲物體的密度。由熱量守恒定律可知流入的熱量應等於物體溫度升高所吸收的熱量，於是

$$\int_{t_1}^{t_2}\iint_{S} K\frac{\partial u}{\partial n}dSdt = \int_{t_1}^{t_2}\iiint_{\Omega} C\cdot\rho\frac{\partial u}{\partial t}dxdydzdt$$

由高斯(Gauss)公式得

$$\iint_{S} K\frac{\partial u}{\partial n}dS = \iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]dxdydz$$

所以有

$$\int_{t_1}^{t_2}\iiint_{\Omega}\left\{C\rho\frac{\partial u}{\partial t} - \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]\right\}dxdydzdt = 0$$

由於時間間隔 $[t_1, t_2]$ 及區域 Ω 的任意性，而被積函數又是連續的，所以得

$$C\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

若物體均勻且各向同性，則 C，K，ρ 皆爲常數，於是得

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \quad a^2 = \frac{K}{C\rho} \tag{A}$$

方程 (A) 稱爲三維熱傳導方程。

若物體 G 內有熱源，熱源密度爲 $F(x, y, z, t)$，則溫度所滿足的方程爲

$$C\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial u}{\partial z}\right) + F(x, y, z, t)$$

若物體均勻且各向同性，則得三維非齊次熱傳導方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(x, y, z, t) \tag{B}$$

在熱傳導問題中若無熱源或熱源與時間 t 無關，則當溫度達到穩定時方程 (A) 就轉化成拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

而方程 (B) 就轉化成泊松方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = g(x, y, z), \quad g = -\frac{f}{a}$$

若用同樣方法討論一根細桿或一塊薄板的熱傳導問題，相應地就可得到一維及二維的熱傳導方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x, y, t)$$

5. 有一溶質在溶液中擴散,它在溶液中各點的濃度用函數 $u(x, y, z, t)$ 表示。試求 u 所滿足的擴散方程(diffusion equation)。

解:在區域 G 中任意取一個閉曲面 S,所包圍的區域爲 Ω,則由擴散理論中的涅爾恩斯特(Nernst)實驗定理:溶液在時間 Δt 内流過曲面 ΔS 的質量 ΔM 和 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 成正比,即

$$\Delta M=-D\frac{\partial u}{\partial n}dSdt \quad (D\text{ 爲擴散係數})$$

於是在時間 $[t_1, t_2]$ 内流進曲面 S 的質量爲

$$M=\int_{t_1}^{t_2}\iint_S D\frac{\partial u}{\partial n}\,dSdt$$

在 $[t_1, t_2]$ 時間内位於 Ω 内溶質的改變爲

$$M=\iiint_\Omega[u(x, y, z, t_2)-u(x, y, z, t_1)]dxdydz=\int_{t_1}^{t_2}\iiint_\Omega\frac{\partial u}{\partial t}\,dxdydzdt$$

由高斯公式

$$\iint_S D\frac{\partial u}{\partial n}\,dS=\iiint_\Omega\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]dxdydz$$

故得

$$\int_{t_1}^{t_2}\iiint_\Omega\left[\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]dxdydzdt=0$$

由於 t_1, t_2, Ω 的任意性及函數的連續性得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

若擴散係數 D 爲常數,則擴散方程爲

$$\frac{\partial u}{\partial t}=D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

此方程與熱傳導方程相同。

6. 設有半徑爲 R 的均勻圓盤,在 $t=0$ 時作用有密度爲 Q_0(常數)的均勻分佈熱源,並設圓内任何點處的溫度只依賴於點到圓心的距離,試求其熱傳導方程。

解:這是二維非齊次熱傳導方程問題:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\frac{Q_0}{C\rho}$$

由於是圓盤,故可選取極座標方程 $\begin{cases}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\end{cases}$,依題意溫度只與點到圓心的距離 ρ 有關,故溫度函數 u 可表成 $u(\rho, t)$,此時 $\frac{\partial u}{\partial\varphi}=0$,因此

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial u}{\partial\rho},\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\frac{\partial u}{\partial\rho}$$