智文天下
ZHIWENTIANXIA

GAODENGSHUXUE
QUANCHENGXUEXIZHIDAOYUXITIJINGJIE

高等数学

全程学习指导与习题精解

（同济六版）

滕加俊　滕兴虎　编著

重点难点提示
典型例题分析
课后习题全解
考研真题精解
同步测试检验
权威全面全能
考试考研无敌

东南大学出版社
Southeast University Press

内容提要

《高等数学》是所有工科学生必修的一门重要基础课程，也是各专业研究生人学考试必考科目。上海同济大学应用数学系主编的《〈高等数学〉第六版》是众多高校高等数学课程的首选教材。为了帮助广大同学扎实地掌握高等数学的精髓和解题技巧，提高解答各种题型的能力，我们编写了本辅导教材。本辅导教材由以下几个部分组成：1. 基本要求、重点与难点；2. 主要概念与公式；3. 重、难点解答；4. 典型例题分析；5. 课后习题全解；6. 考研真题精解；7. 同步测试题。本书内容编排合理，实用性强，是广大高等数学学习者不可或缺的一本参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学全程学习指导与习题精解：同济六版/滕加俊，滕兴虎编著. —南京：东南大学出版社，2012.6
ISBN 978-7-5641-3588-1

Ⅰ.①高… Ⅱ.①滕… ②滕… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 123366 号

高等数学全程学习指导与习题精解(同济六版)

编　　著	滕加俊　滕兴虎	责任编辑	刘　坚
电　　话	(025)83793329/83362442(传真)	电子邮件	liu-jian@seu.edu.cn
出版发行	东南大学出版社	出 版 人	江建中
社　　址	南京市四牌楼 2 号	邮　　编	210096
销售电话	(025)83793191/83792174/83792214/83794121/83794174/57711295(传真)		
网　　址	www.seupress.com	电子邮件	press@seu.edu.cn
经　　销	全国各地新华书店	印　　刷	南京新洲印刷有限公司
开　　本	880mm×1230mm　1/32	印　　张	22　字　数　900 千
版　　次	2012 年 6 月第 1 版　2012 年 6 月第 1 次印刷		
书　　号	ISBN 978-7-5641-3588-1		
定　　价	29.80 元		

前　言

《高等数学》是所有工科学生必修的一门重要基础课程，也是各专业研究生入学考试必考科目。《高等数学》中的概念复杂多样，从基础的变量、函数和极限到复杂的导数、微分和积分，形成了一个无比精密的庞大系统。这个系统不仅内容丰富，更重要的是结构严密、无懈可击。上海同济大学应用数学系主编的《〈高等数学〉第六版》以体系完整、层次清晰、深入浅出的特点成为众多高校高等数学课程的首选教材。为了帮助广大同学扎实地掌握高等数学的精髓和解题技巧，提高解答各种题型的能力，我们编写了本辅导教材。

本辅导教材由以下几个部分组成：

1. 基本要求、重点与难点：给出了每一章的基本要求及该章的重点和难点内容。

2. 主要概念与公式：列出了每一章的基本概念、重要定理和重要公式，突出必须掌握或考试中出现频率较高的核心内容。

3. 重点、难点解答：列出了每一章的重点、难点内容，并对重点、难点内容给出了详细的归纳与解答，以帮助广大同学对相应内容理解得更加透彻。

4. 典型例题分析：精选每一章内容所涉及的重要题型，并进行了详细的解答，以帮助广大同学更好地掌握和理解相关题型的解法，达到举一反三，触类旁通的效果。

5. 课后习题全解：对教材中课后每一道习题均给出了详细的解答，以帮助广大同学回顾、巩固、深化每一章的内容讲解。

6. 考研真题精解：精选历年硕士研究生入学考试试题中具有代表性的题目进行了详细的分析和解答。这些题目涉及内容广、题型多、解题技巧性强，可以进一步帮助广大同学举一反三、触类旁通、开拓解题思路，更好地掌

握《高等数学》的基本内容和解题方法。

7. 同步测试题：根据《高等数学》课程考试和考研内容，在每一章设计了一套同步测试题，目的是给广大同学提供练习机会，帮助广大同学进一步消化知识、夯实基础、提高能力，同时检验自己对高等数学知识的掌握程度，找出差距，以便更好地学好高等数学。

本辅导教材由解放军理工大学应用数学教研室滕兴虎、滕加俊、毛磊、陆小庆、颜超、吴欧、张晓蓉、刘希强、戴毅、王璞、张瑰，以及胡俊、卢月、张月娇、刘娟等编写，全书由滕加俊教授、滕兴虎讲师统稿。在本书的策划、编写、审稿等方面得到了东南大学出版社刘坚博士和戴季东老师的大力支持和热情帮助，在此表示感谢。由于作者水平有限，书中不妥之处在所难免，敬请广大同行和读者批评指正。

编者
2010 年 8 月

目　录

第一章　函数与极限

第二章　导数与微分

第三章　微分中值定理与导数的应用

第四章　不定积分

第五章　定积分

第六章　定积分的应用

第一章　函数与极限

基本要求、重点与难点

基本要求：

(1) 理解函数及其定义域、值域、图形等概念，掌握函数的表示法. 了解函数的有界性、单调性和奇偶性；

(2) 理解复合函数、反函数和分段函数的概念；

(3) 理解基本初等函数及其定义域、值域等概念. 掌握基本初等函数的性质及其图形，理解初等函数的概念；

(4) 会建立简单应用问题中的函数关系式；

(5) 了解数列与函数极限的概念和性质，理解左、右极限的概念及极限存在与左、右极限之间的关系；

(6) 了解无穷小的概念和性质，了解无穷大与无穷小之间的关系，掌握无穷小阶的比较方法；

(7) 了解函数连续(在一点 x_0 处连续以及连续函数)的概念，理解左、右连续的概念以及函数连续与左、右连续之间的关系，掌握讨论分段函数连续性的方法；

(8) 了解函数间断的概念，掌握函数间断点的分类，会判断函数的间断点；

(9) 理解闭区间上连续函数的性质，会应用闭区间上连续函数的性质讨论问题；

(10) 熟练掌握极限的四则运算法和两个重要极限，掌握极限的两个存在准则，能熟练运用极限的四则运算、两个重要极限、极限的存在准则以及无穷小的性质、等价无穷小代换、函数的连续性等方法求极限.

重点：

(1) 复合函数的定义域；

(2) 函数的基本性质；

(3) 求函数的复合及反函数；

(4) 建立简单应用问题的函数关系式；

(5) 求极限；

(6) 讨论函数的连续性；

(7) 间断点的分类；

(8) 闭区间上连续函数的性质.

难点：

(1) 抽象函数的表达式；

(2) 分段函数的复合及反函数的求法；

(3) 极限的概念;

(4) 求极限的各种方法的应用;

(5) 闭区间上连续函数性质的应用.

主要概念与公式

特殊数集

名　称	表　示
自然数集	$\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$
整数集	$\mathbf{Z}=\{0,\pm 1,\pm 2,\cdots,\pm n,\cdots\}$
有理数集	$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q} \mid p,q\in \mathbf{Z},q\neq 0,\text{且 } p、q \text{ 互质}\right\}$
正实数集	$\mathbf{R}^{+}=\{x \mid x\in \mathbf{R},x>0\}$
去零实数集	$\mathbf{R}^{*}=\{x \mid x\in \mathbf{R},\ x\neq 0\}$
复数集	$\mathbf{C}=\{a+b\mathrm{i} \mid a,\ b\in \mathbf{R},\ \mathrm{i}^2=-1\}$

集合运算公式

运　算	公　式
并　集	$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$
交　集	$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$
差　集	$A\backslash B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$
余　集	$A^{c}=\{x \mid x\in I \text{ 且 } x\notin A\}$
直　积	$A\times B=\{(x,y) \mid x\in A,y\in B\}$

区间与邻域

名　称	表　示
开区间	$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$
闭区间	$[a,b]=\{a\leqslant x\leqslant b\}$
左开右闭区间	$(a,b]=\{a<x\leqslant b\}$
点 a 的 δ 邻域	$U(a,\delta)=\{x \mid \|x-a\|<\delta\}=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$
点 a 的去心邻域	$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<\|x-a\|<\delta\}=\{x \mid (a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)\}$
点 a 的左 δ 邻域	$U_{-}(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a\}$
点 a 的右 δ 邻域	$U_{+}(a,\delta)=\{x \mid a<x<a+\delta\}$

映射及相关定义

名　称	定　义
映　射	给定两个非空集合,如果存在一个法则 T,使得任 $x \in X$,按法则 T 使存在唯一的元素 y 与之对应,则称 T 为从 X 到 Y 的一个映射,记作 $T:X \to Y$. 其中 x 称为原像,y 为像. 集合 X 称映射 T 的定义域. X 的所有元素的像的集合称映射 T 的值域
满　射	若 $T(X) = Y$,则称 T 为从 X 到 Y 的满射
单　射	若任 $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$,必有 $T(x_1) \neq T(x_2)$,则 T 为以 X 到 Y 的单射
双　射	若 T 是从 X 到 Y 的满射且又是单射,则 T 为双射
复合映射	若映射 $T_1:X \to Y_1$, $T_2:Y_2 \to Z$,且 $T_1(x) \subset Y_2$,则 $T_2 \circ T_1:X \to Y$,$(T_2 \circ T_1)(x) = T_2(T_1(x))$,称为由 T_1, T_2 构成的复合映射

函数及相关定义

名　称	定　义
函　数	设数集 $D \in \mathbf{R}$,则 D 到 $\mathbf{R}$ 的映射 f 称为定义在 D 上的一元函数,记为 $y = f(x)$,$x \in D$. x 称为自变量,y 称为因变量,D 称为定义域,$\{f(x) \mid x \in D\}$ 称为值域
函数的图形	点集 $\{(x,y) \mid y = f(x),\ x \in D\}$ 称为函数 $y = f(x)$ 的图形
反函数	若函数 $f:D \to f(D)$ 为单射,则称其逆函数 $f^{-1}:f(D) \to D$ 为 f 的反函数,f^{-1} 的对应法则由 f 来决定,即若 D 与 $f(D)$ 之间是一一对应的,则 x 也是 y 的函数,记作 $x = f^{-1}(y)$,称为 $y = f(x)$ 的反函数,习惯上用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,因此反函数也记作 $y = f^{-1}(x)$
复合函数	若函数 $y = f(u)$ 的定义域包含 $u = g(x)$ 的值域,则在函数 $g(x)$ 的定义域上可确定一个函数 $y = f(g(x))$,称其为 g 与 f 复合函数,记作 $y = f(g(x))$ 或 $y = f \circ g$
初等函数	由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数

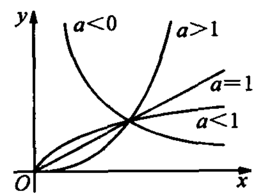
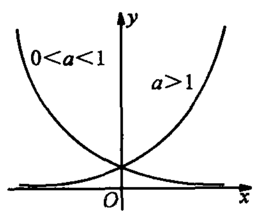
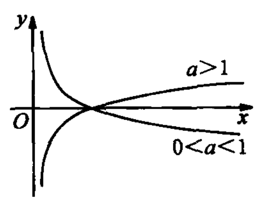
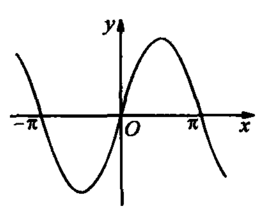
函数的几种特性

性　质	定　义
奇偶性	设 $f(x)$ 在 D 上定义,任 $x, -x \in D$,有 $f(-x) = f(x)$($f(-x) = -f(x)$),则称 $f(x)$ 为 D 上的偶(奇)函数
单调性	函数 $f(x)$ 在 D 上定义,若任 $x_1, x_2 \in D$,由 $x_1 < x_2$ 恒有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$(或 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$),则称 $f(x)$ 在 D 上是单调增加(单调减少)的,若严格不等号成立,则称严格单调增加(减少)
周期性	$f(x)$ 在 D 上定义,若存在一个与 x 无关的正数 T,使任 $x \in D$,均有 $f(x+T) = f(x)$,则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的函数,通常把满足关系式的最小正数 T 称为最小正周期,简称周期
有界性	$f(x)$ 在 D 上定义,若存在 $M > 0$,使任 $x \in D$,有 $\mid f(x) \mid \leqslant M$,则称 $f(x)$ 在 D 上有界
无界性	$f(x)$ 在 D 上定义,若任意 $M > 0$,均存在 $x_0 \in D$,使 $\mid f(x_0) \mid \geqslant M$,则称 $f(x)$ 在 D 上无界

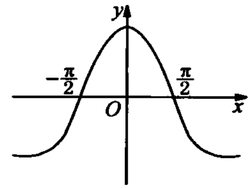
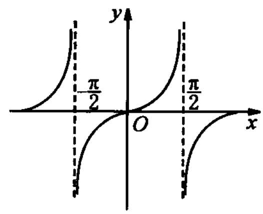
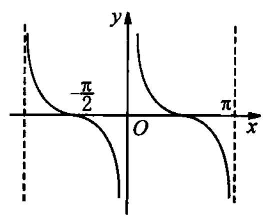
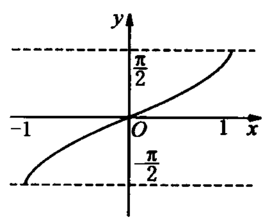
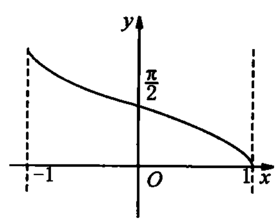
函数的运算

运　算	定　义
和	$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\ x\in D$
差	$(f-g)(x)=f(x)-g(x),\ x\in D$
积	$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x),\ x\in D$
商	$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)},\ x\in D$ 且 $g(x)\neq 0$

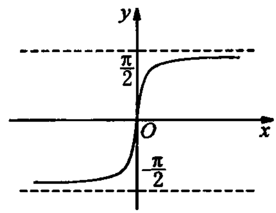
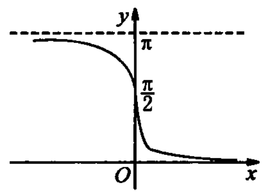
基本初等函数

名　称	定义域及性质	图例
幂函数	$y=x^a$ $a>0$ 时,函数 x^a 在 $(0,+\infty)$ 严格递增 $a<0$ 时,函数 x^a 在 $(0,+\infty)$ 严格递减 $y=x^a$ 与 $y=x^{\frac{1}{a}}$ 互为反函数	
指数函数	$y=a^x,(a>0,\ a\neq 1)$ $a>1$ 时,函数 a^x 在 $(-\infty,+\infty)$ 严格递增 $0<a<1$ 时,函数 a^x 在 $(-\infty,+\infty)$ 严格递减	
对数函数	$y=\log_a x(a>0,\ a\neq 1,\ x>0)$ $a>1$ 时,$y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加 $0<a<1$ 时,$y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调减少 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 互为反函数	
三角函数	正弦函数　$y=\sin x, x\in \mathbf{R}$	

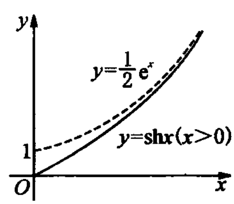
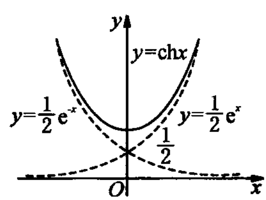
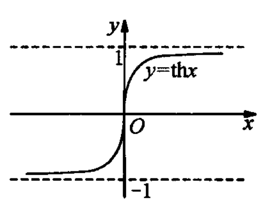
（续　表）

名　称	定义域及性质	
三角函数	余弦函数　$y=\cos x, x\in\mathbf{R}$	
	正切函数 $y=\tan x$， $\left(x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right)$	
	余切函数 $y=\cot x$， $\left(-1\leqslant x\leqslant 1, -\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$	
反三角函数	反正弦函数 $y=\arcsin x$， $\left(-1\leqslant x\leqslant 1, -\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$	
	反余弦函数 $y=\arccos x$， $(-1\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant\pi)$	

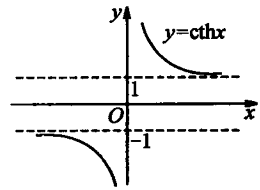
(续 表)

名 称	定义域及性质	
反三角函数	反正切函数 $y=\arctan x$， $\left(-\infty<x<+\infty,\ -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$	
	反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$， $(-\infty<x<+\infty,\ 0<y<\pi)$	

双曲函数

名 称	定 义	图 形
双曲正弦	$y=\operatorname{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 奇函数	
双曲余弦	$y=\operatorname{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 偶函数	
双曲正切	$y=\operatorname{th}x=\dfrac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}$ 奇函数	

（续　表）

名　称	定　义	图　形
双曲余切	$y=\mathrm{cth}x=\dfrac{1}{\mathrm{th}x}=\dfrac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x}$ 奇函数	
反双曲正弦	$y=\mathrm{arsh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$	图略
反双曲余弦	$y=\mathrm{arch}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$	
反双曲正切	$y=\mathrm{arth}x=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$	

数列极限的定义

分　类		定　义
数列极限	$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$（有限）	$\forall\varepsilon>0,\exists N>0$，当 $n>N$ 时，有 $\lvert x_n-a\rvert<\varepsilon$
	$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$	$\forall M>0,\exists N>0$，当 $n>N$ 时，有 $\lvert x_n\rvert>M$

数列收敛的性质

唯一性	若 $\{x_n\}$ 收敛，则其极限必唯一
有界性	若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 有界（反之不真）
保号性	若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，其中 $A>0$（或 $A<0$），则存在 $N>0$，当 $n>N$ 时恒有 $x_n>0$（或 $x_n<0$）
保序性	若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，且当 n 充分大时有 $x_n\leqslant y_n(x_n<y_n)$ 则 $A\leqslant B$
	注：反之，若 $A\leqslant B$，未必有 $x_n\leqslant y_n$ 成立.
子数列收敛定理	数列 $\{x_n\}$ 收敛到 A 的充要条件是 $\{x_n\}$ 的任一子列也收敛且收敛到 A

函数极限的定义

分类		定义
函数极限	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$($x_0$, A 有限)	$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$,当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 时,有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$
	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ (x_0 有限)	$\forall M>0$, $\exists\delta>0$,当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 时,有 $\lvert f(x)-A\rvert>M$
	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ (A 有限)	$\forall\varepsilon>0$, $\exists x>0$,当 $\lvert x\rvert>X$ 时,有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$
	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$	$\forall M>0$, $\exists X>0$,当 $\lvert x\rvert>X$ 时,有 $\lvert f(x)\rvert>M$
单侧极限	左极限 $f(x_0-0)=A$(x_0, A 有限)	$f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$,当 $-\delta<x-x_0<0$ 时,有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$
	右极限 $f(x_0+0)=A$(x_0, A 有限)	$f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$,当 $0<x-x_0<\delta$ 时,有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$
注		$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$

函数极限的性质

唯一性	若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在,则极限值唯一
局部有限性	若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,则存在 $M>0$,及 $\delta>0$,当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 时,有 $\lvert f(x)\rvert\leqslant M$
局部保号性	若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,其中 $A>0$(或 $A<0$),则存在 $\delta>0$,当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 时,有 $f(x)>0$(或($f(x)<0$))
保序性	设在 x_0 的某空心邻域内,$f(x)\leqslant g(x)$(或 $f(x)<g(x)$),且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$,则 $A\leqslant B$
归并原则	若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\{x_n\}$ 为 $f(x)$ 定义域内以 x_0 为极限的数列,$x_n\neq x_0$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$

无穷小量与无穷大量的定义与性质

分类	定义	性质
无穷小量	若变量 $\alpha(x)$ 在 $x\to x_0$(或 ∞)时,极限为0,则称 $\alpha(x)$ 为 $x\to x_0$(或 ∞)时的无穷小量,记作 $\alpha(x)=o(1)(x\to x_0$(或 ∞))	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$ 其中 $\alpha(x)=o(1)(x\to x_0)$

（续　表）

分　类	定　义	性　质
无穷大量	若变量 $\alpha(x)$ 在 $x\to x_0$（或 ∞）时，极限为 ∞，则称 $\alpha(x)$ 为 $x\to x_0$（或 ∞）时的无穷大量	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=0$（其中 $f(x)\neq 0$）

注：无界变量与无穷大量的区别：无穷大量是对任给定的正数，其自变量到某一时刻时，它的绝对值要大于该正数，无界变量并没有要求永远大于任意大的正数.

极限运算法则

运算类别	运算法则	
无穷小的运算	有限个无穷小量的和、差、积是无穷小量	
	有界量与无穷小量的积是无穷小量	
数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$	和差	$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=A\pm B$
	积	$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=A\cdot B$
	商	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right)=\frac{A}{B}\quad(B\neq 0)$
函数极限 $\lim f(x)=A$ $\lim g(x)=B$	和差	$\lim(f(x)\pm g(x))=A\pm B$
	积	$\lim(f(x)\cdot g(x))=A\cdot B$
	商	$\lim\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{A}{b}\quad(B\neq 0)$
复合函数的极限	$\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(u(x))=A$，其中 $u(x)$ 与 $f(u(x))$ 在 $\mathring{U}(x_0)$ 内定义且 $u(x)\neq u_0$	
四则运算公式的前提	① $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，$A,B$ 有限 ② $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0)$ 定义且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，$A,B$ 有限	

极限存在的准则

数列极限存在准则	单调有界定理	单调递增有上界的数列必有极限 单调递减有下界的数列必有极限
	两边夹法则	给定数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$，满足 $x_n\leqslant z_n\leqslant y_n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A$
	柯西收敛准则	数列 $\{x_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$，$m>N$ 时，有 $\lvert x_n-x_m\rvert<\varepsilon$