向量代数在几何中的应用

黄懋德　邬玉鑫　马国强

河南大学出版社

向量代数在几何中的应用

黄懋德　邬玉鑫　马国强

河 南 大 学 出 版 社

向量代数在几何中的应用

黄懋德　郇玉鑫　马国强

责任编辑　　程　庆

河南大学出版社出版

河南省新华书店发行

河南尉氏印刷厂印刷

开本：787×1092　1/32　印张：9　字数：226千字

1987年12月第1版　　1987年12月第1次印刷

印数：1—3,000

统一书号：13435•003定价：1.50元

ISBN7—81018—026－6/O•1

前　　言

向量代数主要介绍向量间的几种代数运算，这些运算可以引导到几何中来。一般是高等学校在学习空间解析几何时，把向量代数介绍进来，借以研究空间解析几何问题。但不仅如此，它还可以用来处理初等几何（平面和立体），甚至三角中的一些问题，常使问题更简捷地得到解决。因此可以说，它是介于初等数学与高等数学之间的一门学科。

本书在简要介绍向量概念和运算的基础上，精选了大量的以向量为工具来解答的初等几何例题，从而使读者除了掌握向量的基本知识以外，还能够使用向量解决初等数学中的一些问题，例如共线点、共点线、梅涅劳（Menelaus）定理、西瓦（Ceva）定理、笛沙格（Desargues）定理、欧拉（Euler）线等，并且可以看到使用向量的优越性。另外本书附有习题，供读者作练习之用。

本书对于广大中学生是一本合适的课外读物，对于中学数学教师和其它数学爱好者，也是一本有意义的参考书。它既可以使读者增进知识、扩大视野，又可以使读者掌握解决初等数学问题的更多方法。另外，在其它许多学科中，向量也是一种很有用的工具。

书中插图，是由河北省交通学校郭汴康同志绘制的，在此我们致以谢意。

由于时间仓促和我们水平有限，本书内容难免有不妥之处，希望广大读者批评指正。

作　者

一九八六年九月二十五日

目 录

第一章　向量和向量的线性运算

向量的计算一般分为两种：一是研究向量的代数运算，如加法、减法、乘法等，称为向量代数；另一种是研究向量的分析运算，如微分、积分等，称为向量分析．

向量代数是向量分析的基础，它们都为研究微分几何、力学、物理学和工程技术学提供了有力的工具，也为高等代数中的向量空间这一抽象概念引进了一个具体模型．

对于初等几何的研究，一般来说有三种方法，即综合法、坐标法和向量法．通过向量这一工具直接把代数运算引到几何中来，称为向量法．由于向量法较之综合法具有书写简化、公式明了、便于运算等特点，因此用向量法研究几何问题显得明快、简捷和容易入手．

本章将介绍向量代数中的最基本的运算，即向量的加法、减法和数量与向量乘法的运算，并且直接利用不依赖坐标系的向量公式处理一些几何问题，使读者初步地体会到向量法不仅有优越于综合法之处，同时也有优越于坐标法之处．

§1　向量的概念

在自然科学和工程技术中，我们经常遇到许多的量，这些量一般可分为数量和向量两种．在取定测量单位后，完全由数值确定的量，称为数量．如质量，取定测量单位——克，则

在数值上等于10的所有质量彼此之间没有任何差别，因此质量属于**数量**．数量可以是正量，也可以是负量．例如温度高于零度为正，低于零度为负，但有些数量例如体积、质量，则永远非负．数量是代数量，可以实施加、减、乘、除等代数运算，并且适合实数的运算规律．

还有一种量，它不能被数值完全确定，例如力就是这样的量．两个在数值上都等于 3 千克的力，当二者作用于不同方向时，它们就不相等．所以要完全确定一个力，除指出它的数值外，还必须指出此力在空间的作用方向．

除了数值以外，还必须指出在空间的方向才能完全确定的量称为**向量**．

1·1 向量的表示

向量具有两个特征，即大小和方向．而具备大小和方向的最简单的几何图形是有向线段，因此向量常用有向线段来表示．

向量的大小也叫向量的**长度**或**模**．所以，我们常把用来表示向量的有向线段的方向和长度分别叫做向量的方向和长度．

起点为A，终点为B的向量，记为$\overrightarrow{AB}$．向量$\overrightarrow{AB}$的长度记为$|\overrightarrow{AB}|$.

不需知道起、终点的向量，常用一个小写字母表示，例如$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$，印刷时也常用粗体小写字母表示向量，如 $\mathbf{a}$、$\mathbf{c}$、$\mathbf{b}$它们的长度记为$|\vec{a}|$、$|\vec{b}|$、$|\vec{c}|$或$|\mathbf{a}|$、$|\mathbf{b}|$、$|\mathbf{c}|$。

1·2 向量的相等

方向相同、长度相等的向量叫做**相等的向量**.

两个向量 $\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$相等，记作$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$，这里的相等符号仍旧采用算术中的“＝”号，但现在它表示两层意思．其一是：$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$的长度相等，即$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$；其二是：$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$的方向一致．

这个定义告诉我们：向量是否相等与它们的起点位置无关．

以后我们经常运用不考虑起点而只考虑由长度和方向决定的向量．这种起点可以任意选择的向量称为**自由向量**．相对地，起点固定的向量称为**固定向量**．起点在一个定点O的固定向量$\overrightarrow{OP}$又叫点P的**定位向量**或**位置向量**．

两个向量如果相等，那么经过平移可使一个与另一个重合．反过来，如果一个向量经过平移可得到另一个向量，那么这两个向量必然相等．

在自由向量的意义下，空间中所有相等的向量均可以看成是同一个向量的不同具体位置．这就是说，凡相等的向量均被认为是同一个向量．

由于“方向”不能比较大小，所以向量也不能比较大小．但向量的长度是一个实数，自然可以比较大小．

我们已定义了相等的向量，凡不合这种定义的两个或多个向量统称为不相等的向量，不相等的向量记成：

$$\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{CD} \quad 或 \quad \vec{a}\neq\vec{b}$$

1·3　共线向量和共面向量

因为向量具有方向和大小两个特征，所以向量的种类常从这两个特征来考虑．

就向量的方向而论，可分为两大类：

共线向量：如果一组向量都与一条直线平行，则称它们是共线的，这组向量叫做**共线向量**．向量$\vec{a}$与$\vec{b}$共线，通常记为$\vec{a} \parallel \vec{b}$．

起终点在同一直线上的诸向量自然彼此共线．

共面向量：如果一组向量都与同一个平面平行，则称它们是共面的，这组向量就叫做**共面向量**．

起终点在同一平面上的诸向量自然彼此共面．

显然，一组共线向量一定是共面向量；若三个向量中至少有两个向量共线，则此三个向量一定共面．

向量就长度而论，也可分为两大类：

零向量：长度等于零的向量称为**零向量**．

非零向量：长度不为零的向量称为**非零向量**．

零向量的起点与终点重合，方向不定，记为$\vec{o}$．

规定：所有的零向量都相等；零向量与任何向量都共线；零向量与任何向量都共面．

长度等于1的向量称为**单位向量**，它是非零向量中占重要位置的一类向量．与非零向量$\vec{a}$同向的单位向量称为$\vec{a}$的**单位向量**，记为$\overrightarrow{a^0}$．

易知，空间的方向与单位向量一一对应．

还有一类特殊的向量，叫反向量．

反向量：长度相等，方向相反的两个向量称作**互为反向量**．可见反向量是将原向量的长度和方向同时进行考虑所确定的向量．向量$\vec{a}$的反向量用$-\vec{a}$表示（$-\vec{a}$又称为$\vec{a}$的逆向

量或负向量）.

显然，向量$\overrightarrow{AB}$的反向量$-\overrightarrow{AB}$即向量$\overrightarrow{BA}$，所以

$$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$$

零向量的反向量仍是它本身，所以

$$\vec{o}=-\vec{o}$$

§ 2 向量的加减法

2·1 向量加法的定义和法则

向量的加法通常按三角形法则和平行四边形法则进行.

一、三角形法则

已给两个向量$\vec{a}$和$\vec{b}$，以空间任意一点A为始点，接连作两个向量$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$、$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，得一折线$ABC$. 从折线的始点$A$到终点$C$的向量$\overrightarrow{AC}$，称为向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的**和**. 记作$\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$（图1-2-1）

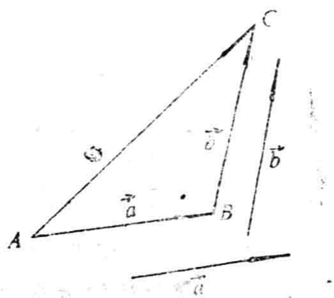

图1—2—1

由两向量$\vec{a}$、$\vec{b}$求它们和的运算叫做**向量的加法**.

向量加法的运算符号仍旧采用算术中的“＋”，但这里的符号“＋”表示这样的一种几何运算，借助于它从两个向量得出第三向量，即所谓二向量的和.

上述运算所以称为加法，是因为此运算与数量加法具有相同的运算规律。

由三角形法则可以推出以下事实：

$$\vec{o}+\vec{o}=\vec{o}$$

$$\vec{a}+\vec{o}=\vec{o}+\vec{a}=\vec{a}$$

$$\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{o}$$

关于两个向量及其和向量，它们的长度之间有以下简单性质：

两向量和的长度不大于两向量长度之和，且又不小于两向量长度之差，即

$$\left|\vec{a}\right|-\left|\vec{b}\right|\leqslant\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\leqslant\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$$

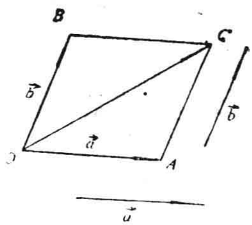

图1—2—2

二、平行四边形法则

已给两个向量$\vec{a}$和$\vec{b}$，以空间任一点O为始点作向量$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$、$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$、以$OA$、$OB$为边作平行四边形$OACB$，则对角线上的向量$\overrightarrow{OC}$就是$\vec{a}+\vec{b}$，记作$\overrightarrow{OC}=\vec{a}+\vec{b}$（图1-2-2）

加法的两种求和法则是统一的.

2·2　向量加法的运算规律

向量加法和数量加法具有相同的运算规律.

一、交换律　$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

即和向量与被加向量的顺序无关.

在向量加法的定义中，被加的两个向量是有先后次序之分的，即有第一个和第二个之分的，但是可以证明，颠倒它们

的先后次序后再相加时，得到的仍然是同一个和向量.

如图1—2—2，先作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，次作$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，其和是$\overrightarrow{OC}$；先作$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，次作$\overrightarrow{BC}=\vec{a}$，其和仍是$\overrightarrow{OC}$，此即证明了

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

二、结合律　$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

即被加向量多于两个时，可以用任意方法结合成组.

如图1—2—3，作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{c}$，

有　$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BC}$

$$=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}$$

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$$

$$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$$

此即证明了

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

由于向量的加法满足交换律和结合律，故对任意次序的三个向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$之和，都可以写成$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

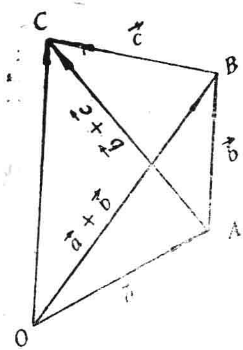

图1—2—3

2·3　多个向量的加法

我们虽然只对两个向量定义了加法运算，但如结合律所表示的那样，三个向量的加法同样是有意义的。因此，可以将这个运算推广到求有限个向量的和，这常用多角形法则，即：

设A_0，A_1，……，A_n是空间任意的点，则有

$$\overrightarrow{A_0A_n}=\overrightarrow{A_0A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$$

（图1—2—4为$n=6$时的情况）

特别地，当上述几个向量构成一个封闭多边形时，即

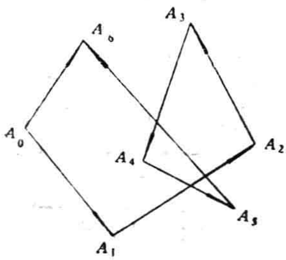

图1—2—4

$A_0=A_n$时，这些向量的和是零向量，即

$$\vec{o}=\overrightarrow{A_0A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_0}$$

多角形法则表明，几个首尾相接向量的和，是以第一个向量的起点为起点，最后一个向量的终点为终点的向量.

2·4 向量的减法

我们把向量的减法定义为向量加法的逆运算，即根据向量的加法来规定向量的减法.

如果向量$\vec{b}$与向量$\vec{c}$的和为向量$\vec{a}$，即$\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$，则向量$\vec{c}$叫做向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的差，记为$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$

下面给出两向量的差的几何作图.

将向量$\vec{a}$和$\vec{b}$的起点归结在一点O，作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$（图1-2-5），据三角形法则知向量$\overrightarrow{OB}$与向量

$\overrightarrow{BA}$的和为向量$\overrightarrow{OA}$即

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}$$

从向量的减法定义知

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\vec{a}-\vec{b}$$

由此得到差向量的几何作图法：具有同一起点的两个向量的差，是从减向量的终点到被减向量终点的向量。

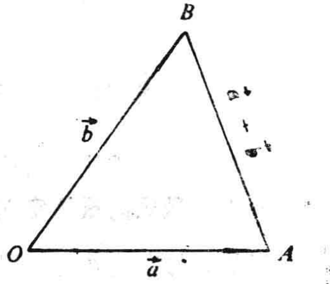

图1—2—5

从图1—2—5还可以看出

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

所以 $$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

这说明，减去一个向量就等于加上它的反向量。

因此，向量的减法运算可变为向量的加法运算，利用这一性质，可推出向量的移项法则。

例如在向量等式

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{d}$$

中，两端都加上$-\vec{c}$，得

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+(-\vec{c})=\vec{d}+(-\vec{c})$$

即得 $$\vec{a}+\vec{b}=\vec{d}-\vec{c}$$

同样可得 $$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-\vec{d}=\vec{0}$$

所以在一个向量等式中，将其中任意一项变号后，可以从等式的一端移到另一端。

容易验证，向量$\vec{a}$、$\vec{b}$及$\vec{a}-\vec{b}$的长度之间有如下关系