国家教委
规划教材

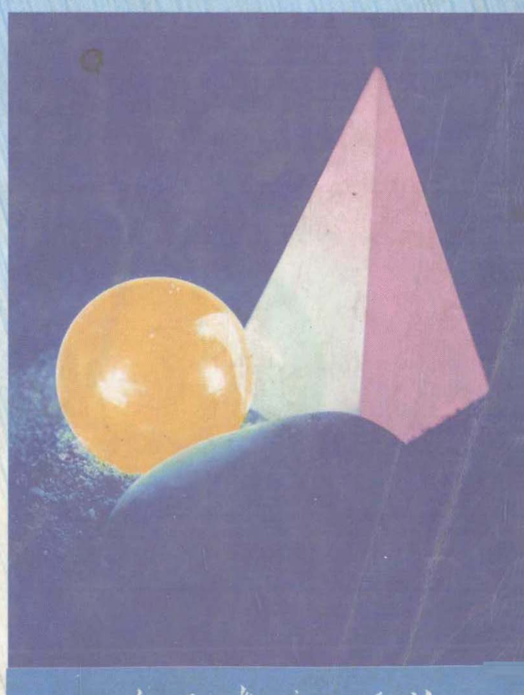
职业高级中学课本

数学

第二册

全国职业高级中学数学教材编写组 编著

SHUXUE



人民教育出版社

数 学

国家教委规划教材

职业高级中学课本

数　　　学

第　二　册

全国职业高级中学数学教材编写组　编著

人民教育出版社

（京）新登字 113 号

国家教委规划教材

职业高级中学课本

ZHIYE GAOJI ZHONGXUE KEBEN

数 学

SHUXUE

第二册

全国职业高级中学数学教材编写组 编著

*

人民教育出版社出版

（100009 北京沙滩后街 55 号）

河南省中小学教材出版中心重印

河 南 省 新 华 书 店 发 行

河南省瑞光印务股份有限公司印装

*

开本 880×1230 1/32 印张 13.375 字数 350 000

1997 年 12 月第 1 版 1998 年 6 月河南第 1 次印刷

印数 1—40 000

ISBN 7－107－12330－0

G·5440(课) 定价 11.10 元

为了适应我国职业教育的发展，提高职业高中的教学质量，我们委托人民教育出版社在调查职业高中文化课教学情况，听取对现行文化课教材使用意见的基础上，拟订各科教材的编写方案，重新编辑出版了这套职业高中文化课教材.

新编教材力求贯彻职业高中的培养目标，适合职业高中的教学实际，努力提高职业高中学生的文化素养，为进一步学习和工作打下良好的基础.新编教材由教材专业编辑和教学第一线人员合作编写，并得到了有关省市教委和学校的大力支持.

这套教材(包括课本和教学参考书)列入国家教委教材规划，将于 1997 年陆续供应.希望各地在使用教材过程中提出宝贵意见，以便进一步修改和完善.

国家教委职业技术教育司

1996 年 10 月

说　　明

受国家教委职业技术教育司的委托，人民教育出版社组织数学教学研究人员和数学教师组成编写组，在原有职业高中数学教材的基础上，根据国家教委制定的《职业高级中学（三年制）数学教学大纲》（试用），重新编写了这套职业高级中学数学课本，从 1997 年秋季起供全国职业高级中学各类专业使用.

这套教材编写的指导思想是：加强基础、增加弹性、精简实用、深入浅出、温故知新.

这套教材对传统的初等数学教育内容进行了精选，把在理论上、方法上以及现代生产与生活中得到广泛应用的知识作为各专业必学的基本内容. 函数与几何的内容，以及研究函数与几何的方法是这套教材的核心. 教材首先学习集合与数理逻辑用语，为学生正确使用数学语言打好基础. 教材在深入学习二次函数的基础上，学习了几个重要的初等函数：指数函数、对数函数及三角函数；引进了向量知识，为数形结合、学习三角、解析几何和立体几何打下基础，并为学习专业课提供应用方便的数学工具. 必学内容中还安排了概率与统计初步知识的学习，以增强学生应用数学的意识和能力.

这套教材有一定的弹性. 除分必学内容和选学内容外，每章都有核心部分，其他内容及程度要求尽可能分层次展开，并且练习、习题的编写分 A、B 组，以便教师根据不同的教学要求进行教学.

在编写这套教材时，尽力做到“深入浅出”，对重要的内容和方法，一方面通过通俗易懂的语言和例子向学生解释，另一方面使这些内容在各个不同的知识中反复出现，以求学生正确掌握.

温故知新是学生认知的规律.在各章教材的编写中,尽量把初中知识与高中知识联系起来,通过温习旧知识引出新知识,采取降低学习起点,适当循环的方式编写.

在编写过程中,力求处理好以下几个关系:

1. 基础知识与应用的关系.这套教材在讲授基础知识时,除用通俗易懂的生活、生产实例引进新的数学概念外,一般不联系专业知识,只是在有的章、节最后专设一节,举例说明本章知识的应用,以启发学生把学到的知识应用到专业中去,这样有利于加强基础知识的学习,使教材有更广泛的使用范围.

2. 具体与抽象、归纳与论证的关系.本教材,一方面向学生传授知识,一方面通过数学学习,教学生如何学习和研究问题,使学生学到研究问题的科学方法.新概念的引入,开始是对具体实例进行探究,通过归纳给出一般规律,然后进行必要的说理和论证.

3. 数学思想方法与解题技能的关系.教材以学习数学思想和数学方法为主.数学的通性、通法是数学发展与应用的主线.教材力求突出数学思想和方法的学习.例如,集合与逻辑知识的运用,设未知数列方程或不等式解问题原理,函数关系的建立与研究,数形结合,配方法,待定系数法等通性、通法都在教材中得到加强.解题训练的重点放在巩固通性、通法上,一些辅助性的技巧尽量少讲或不讲.

这套教材采取代数、几何与分析混合编排体系,共分三册,教学内容是:

第一册:集合与数理逻辑用语,不等式,函数,指数函数与对数函数,平面向量,三角,复数(选学).

第二册:平面解析几何,立体几何,数列和数学归纳法、排列组合与二项式定理,概率与统计初步.

第三册:行列式与矩阵,微积分初步,布尔代数.

在第一、二册,除个别标注星号(*)的选学内容外,都是必学内

容. 教学计划和教学要求分 A、B 两种. 达到 A 种教学要求，教学时数约为 200 课时；达到 B 种教学要求，教学时数约为 256 课时. 第三册为选修教材，教学时数约为 80 课时. 第三册所列内容，根据专业要求可选部分内容进行教学. 第三册也可作为四年制职业中专的选修教材.

第二册达到 B 要求，计划教学时数为 128 课时.

本套教材由国家教委职业技术教育司委托人民教育出版社组织“全国职业高中数学编写组”进行编写.

编写组成员：方绮綵、王永琛、李洪举、张安录、张景源、许培德、陈学礼、苏汉翔、刘德荣、黄宁生、徐一冰、顾平声、高存明、梁锡焜、戴升华.

参加本书编写工作的有：顾平声、陈学礼、戴升华、张景源、刘德荣、高存明、鲍珑.

编写组全体成员参加了第二册教材的研究和审读工作. 参加第二册研究和审读工作的还有钟致诚、许培德、于克渗、郑家义、陈兆坊、白兰婷、孔晓华等.

本书主编：高存明. 审定：陈宏伯、吴之季. 责任编辑：鲍珑.

由于编者水平限制，本书难免存在不少缺点和错误，诚恳希望教师和同学们以及数学教学研究人员批评指正，以便进一步修改与完善这套教材.

全国职业高级中学数学教材编写组

1998 年 3 月

目　录

第八章　平面解析几何

在初中几何中，我们以图形的基本性质为基础，通过推理论证，研究了一些几何图形的性质. 但这种方法难以研究一些更复杂的图形.

在学习函数的时候，我们通过一些函数的关系式和图象研究函数的性质，这实际上是用代数方法研究几何图形性质的例子.

解析几何研究的对象也是几何图形. 它利用直角坐标系，用坐标表示点，用代数方程表示图形. 通过对代数方程的研究来研究几何图形的性质. 这就是说，解析几何是一门用代数方法研究几何问题的数学学科.

17 世纪，法国数学家费马（*Fermat* 1660－1665）和法国数学家笛卡尔（*Descarter* 1596－1650），建立了坐标法，用代数方程表示曲线，他们被公认为解析几何的奠基人. 解析几何的产生，开创了数形结合的研究方法. 向量是数形结合的有力工具，这一章我们将用坐标法和向量法来研究直线、圆和其他重要的曲线.

一　曲线与方程

8.1 曲线与方程的概念

我们曾学过一次函数 $y=kx+b$，二次函数 $y=ax^2+bx+c$，指数函数 $y=a^x$，对数函数 $y=\log_a x$ 等函数. 这些函数的解析式都是二元方程，图象都是平面内的曲线.

根据函数图象的定义，我们可以把函数 $y=f(x)$ 的图象 c 表示为：

$$c=\{P(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}.$$

其中 D 为函数 $y=f(x)$ 的定义域. 上式表示了函数 $y=f(x)$ 与图象 c 之间的关系：

1. 图象 c 上任一点的坐标 (x,y)，满足函数关系式 $y=f(x)$；

2. 以满足函数关系式 $y=f(x)$ 的 (x,y) 为坐标的点一定在图象 c 上.

例如，函数 $y=x^2$ 的图象是一条以 y 轴为对称轴的抛物线（图 8—1）. 若点 $P(x_0,y_0)$ 在抛物线上，则 $y_0=x_0^2$，即 (x_0,y_0) 是方程 $y=x^2$ 的解；反之，若点 $P(x_0,y_0)$ 的坐标满足 $y_0=x_0^2$，即 (x_0,y_0) 是方程 $y=x^2$ 的解，则点 P 一定在这条抛物线上.

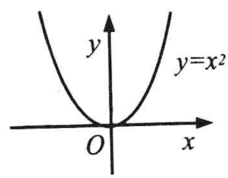


图 8—1

下面我们来看平面上的曲线与方程的关系.

平面上一条曲线可以看成动点按某种规律运动而成的轨迹.

建立直角坐标系，设曲线上动点 P 的坐标为 (x,y)，x 和 y 随点 P 运动而变化，是一对变量. 动点的运动规律用体现 x 和 y 之间的关系的方程来表示，这就建立了曲线和方程的对应关系.

一个二元方程总可以通过移项写成 $F(x,y)=0$ 的形式，其中 $F(x,y)$ 是关于 x,y 的解析式. 例如，$y=x^2$，可以写成 $x^2-y=0$.

在平面直角坐标系中，如果曲线 c 与方程 $F(x,y)=0$ 之间具有如下关系：

1.　曲线 c 上点的坐标都是方程 $F(x,y)=0$ 的解；

2.　以方程 $F(x,y)=0$ 的解 (x,y) 为坐标的点都在曲线 c 上.

那么,曲线 c 叫做方程 $F(x,y)=0$ 的曲线,方程 $F(x,y)=0$ 叫做曲线 c 的方程.

这就是说,

$$P(x,y)\in c \Leftrightarrow F(x,y)=0,$$

即
$$c=\{P(x,y)\,|\,F(x,y)=0\}.$$

例 1　(1) 判断点 $M_1(3,-4)$,$M_2(-2\sqrt{5},2)$是否在方程 $x^2+y^2=25$ 的曲线上;

(2) 用曲线方程的定义说明以坐标原点为圆心、半径等于 5 的圆的方程是 $x^2+y^2=25$;

[分析]　点在方程的曲线上的充要条件是该点的坐标是方程的解,因此判断一个点是否在曲线上,只须判断该点的坐标是否是曲线方程的解.

解:(1) 因为 $3^2+(-4)^2=25$,即$(3,-4)$是方程 $x^2+y^2=25$ 的解,所以点 $M(3,-4)$在方程的曲线上.

因为$(-2\sqrt{5})^2+2^2=24$,即$(-2\sqrt{5},2)$不是方程 $x^2+y^2=25$ 的解,所以 $M_2(-2\sqrt{5},2)$不在方程 $x^2+y^2=25$ 的曲线上.

(2) 设 $P(x_0,y_0)$在以坐标原点为圆心,半径为 5 的圆上,则点 P 到坐标原点的距离为 5,即

$$\sqrt{x_0^2+y_0^2}=5.$$

$$x_0^2+y_0^2=25,$$

即(x_0,y_0)是方程 $x^2+y^2=25$ 的解.

其次,设(x_0,y_0)是方程 $x^2+y^2=25$ 的解,则有

$$x_0^2+y_0^2=25.$$

两边开平方取算术根,得

$$\sqrt{x_0^2+y_0^2}=5,$$

即点 P 到坐标原点的距离为 5，点 P 在以坐标原点为圆心，半径为 5 的圆上.

根据曲线方程的定义，以坐标原点为圆心、半径等于 5 的圆的方程是 $x^2+y^2=25$.

练　习 ·A·

1. 判断点 $A(1,1)$，$B(-1,1)$，$C(1,-1)$，$D(-1,-1)$是否在方程 $x^2+2xy+y^2-4=0$ 的曲线上.
2. 在什么条件下，方程 $y=kx+b$ 的曲线经过坐标原点？
3. 已知方程$(x+2)^2+(y-3)^2=r^2$ 的曲线通过点$(-1,5)$，求 r^2 的值.

练　习 ·B·

1. 到两坐标轴距离相等点的轨迹的方程是 $x-y=0$ 吗？为什么？
2. 以 y 轴为对称轴的等腰三角形，这个三角形底边的中线方程是 $x=0$ 吗？为什么？
3. 用曲线方程的定义说明，以坐标原点为圆心，半径为 1 的圆的方程是 $x^2+y^2=1$.

8.2　求曲线的方程

上一节我们学习了曲线与方程的概念. 这一节我们来学习如何根据曲线上动点所符合的条件，求曲线的方程.

我们先来看例子.

例 1　求以坐标原点为圆心，半径等于 3 的圆的方程(图 8—2).

解：设 $P(x,y)$是所求圆上任意一点，点 P 在圆上的充分必要条件是点 P 到坐标原点距离等于 3，即

$$|\overrightarrow{OP}|=3. \qquad (1)$$

由两点的距离公式，得

$$\sqrt{x^2+y^2}=3.$$

两边平方，得

$$x^2+y^2=9. \qquad (2)$$

这就是所求圆的方程.

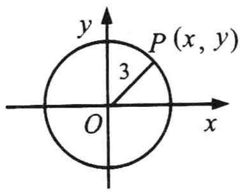


图 8—2

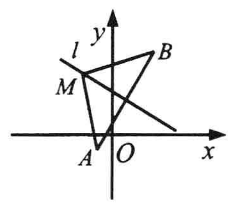


图 8—3

例 2　已知 $A(-1,-1)$，$B(3,7)$，求线段 AB 的垂直平分线 l 的方程(图 8—3).

解：设 $M(x,y)$ 为线段 AB 的垂直平分线 l 上的任一点，由线段垂直平分线的定义可知，点 M 在 l 上的充要条件是

$$|MA|=|MB|. \qquad (1)$$

由两点距离公式，得

$$\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-7)^2}. \qquad (2)$$

两边平方化简，得直线 l 的方程：

$$x+2y-7=0.$$

说明：点 $M(x,y)$ 在直线 l 上的充要件是，点 M 的坐标是方程(2)的解，因方程(2)到方程(3)的化简过程是同解变形，所以点 M 在 l 上的充要条件是点 M 的坐标是方程(3)的解，从而说明了方程(3)是所求直线 l 的方程. 如果化简过程不是同解变形，则需分析增根或减根的情况，并在所得到的曲线方程中删去或补上.

例 3 已知两定点 A、B,动点 P 使 $PA\perp PB$,求点 P 的轨迹方程(图 8—4).

[分析] 题目没有给出坐标系,求曲线方程之前首先要建立适当的坐标系.

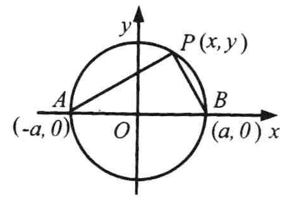


图 8—4

解:如图 8—4,以线段 AB 的中点 O 为坐标原点,在直线 AB 上构造 x 轴,建立直角坐标系 xOy. 设 $AB=2a(a>0)$,则 A、B 的坐标分别为 $(-a,0)$,$(a,0)$. 设点 $P(x,y)$ 的轨迹为 c,由已知条件,得

$$c=\{P(x,y)\mid\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BP}\}.$$

$$\overrightarrow{AP}=(x+a,y),\quad \overrightarrow{BP}=(x-a,y),$$

$$\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BP}\Leftrightarrow\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0.$$

用坐标表示,得

$$(x+a)(x-a)+y^2=0,$$

整理得

$$x^2+y^2=a^2.$$

易验证,点 A、B 的坐标 $(-a,0)$,$(a,0)$ 是上述方程的解,但由 $PA\perp PB$,知 P 与 A、B 都不重合,所以应从所得方程去掉这两点的坐标,得点 P 的轨迹方程:

$$x^2+y^2=a^2\quad(x\neq\pm a).$$

思考:坐标系的选取不同,所得轨迹方程相同吗? 试一试:以 A 为坐标原点,$\overrightarrow{AB}$ 的方向为 x 轴的正方向建立坐标系,求点 P 的轨迹方程.

由以上几个例子,我们来总结在建立了坐标系后,求曲线方程的步骤:

(1) 设动点的坐标为(x,y)；

(2) 写出动点在曲线上的充要条件；

(3) 用x、y的关系式表示这个条件，列出方程；

(4) 化简方程；

(5) 证明化简后的方程是所求曲线的方程.

如果方程化简过程是同解变形过程，所得到的方程就是所求曲线的方程，步骤(5)可以省略.

练　习 ·A·

1. 求与坐标原点距离等于2的点的轨迹方程.
2. 求与定点$A(1,2)$距离等于5的点的轨迹方程.
3. 求与两定点$A(3,1)$，$B(-1,5)$距离相等的点的轨迹方程.

练　习 ·B·

1. 求与坐标原点距离为3的点的轨迹方程.
2. 已知两定点$A(-2,0)$，$B(2,0)$，且动点P使$PA\perp PB$，求点P的轨迹方程.

8.3　曲线的交点与二元二次方程组

如果两条曲线c_1、c_2的方程分别是$F_1(x,y)=0$和$F_2(x,y)=0$，用集合表示为：

$$c_1=\{P(x,y)\,|\,F_1(x,y)=0\},$$

$$c_2=\{P(x,y)\,|\,F_2(x,y)=0\},$$

c_1与c_2的交点可表示为：

$$c_1\cap c_2=\{P(x,y)\,|\,F_1(x,y)=0,\text{且 }F_2(x,y)=0\}$$