高等院校函授教材

高等数学

下　册

裘慧君　王锦华　刘颖超　编

葛锁网　审

华东工学院函授大学

一九八六年

高等院校函授教材

高 等 数 学

下 册

裘慧君 王锦华 刘颖超 编

葛锁网 审

华东工学院函授大学

一九八六年

引　言

本书是根据1981年12月审订的高等工业学校“高等数学函授教学大纲”（草案），并参考了1980年全国工科院校（四年制）所审订的“高等数学大纲”及1985年11月重庆会议制定的“高等数学教学基本要求”讨论稿编写的高等数学函授教材。由于函授教学的特点：大多数同志边工作、边学习，工作任务重，学习时间少，在学习中碰到疑难问题，不易向老师请教。这就决定了函授教材在编写上不同于一般大学教材。为了便于自学，尽可能减少读者在自学中的困难，本书采用讲课形式书写。不过份追求理论上的严密性，在文字叙述上力求通俗易懂。概念引入尽量从具体、形象入手，逐步深入，内容按排抓住重点。对于重点、难点的内容，着重分析，讲深讲透。为了使读者对所学内容易于理解，巩固所学知识，本书举有较多例题，并注重分析解题思路，注意一题多解，以便使读者开阔思路，对解题有所启发，逐步培养分析解决问题的能力。

本书在编写上还作了以下努力：

1．在每章开头，简要指出本章在整个高等数学中的地位和作用，重点、难点及要达到的基本要求，以使读者明确内容的主次，抓住重点，突破难点。

2．学习数学一定要做题，对基本运算要求熟练掌握。本书每节后都配有一定数量的习题（有答案），对于较难的习题附有题解。每章后有自我检查题（有题解），供读者自我检查用。

3．每章后安排有难度较大的综合例题和综合习题，供基础较好，有余力的读者学习。

4．本书中有(*)的章节，教学中可以不作要求，读者亦可以不看，供有余力的读者参考阅读。

本书分上、中、下三册，作为我院函授生高等数学的试用教材，对于工科院校的夜大、职大以及广大业余自学高等数学的读者也可作为教材或参考书使用。

由于编者水平有限，经验不足，书中错误和不足之处在所难免，希望广大读者在使用本书时，不吝指正，以便作进一步的修改。

本书由王锦华同志、裘慧君同志执笔，葛锁网同志审阅，刘颖超同志做了全部习题的解答，本书的编写得到了我院继续教育部，数学教研室有关同志的支持和帮助，在此表示感谢。

编者　1986年元月

下 册 目 录

第十三章 重 积 分

重积分是一元函数定积分的推广，两者之间有着密切的联系。它们在定义、基本性质等方面极其相似，而且重积分的计算是把它化为累次积分进行的。为此，在学习本章时，希望读者将重积分与已学过的定积分联系起来，进行对比，这样对于掌握重积分的概念及计算法是有益的。

本章我们先从两个实际例子引进二重积分概念，然后讨论它的性质与计算法，在此基础上再讨论三重积分，最后讨论重积分在几何与力学中的一些应用，这样步步深入，有利于读者更好的掌握本章内容。

本章重点 重积分概念及计算法。

本章难点 化重积分为累次积分的定限法则。

本章目的要求

1. 正确理解二重积分、三重积分概念；

2. 熟练掌握直角坐标系下二重积分、三重积分的计算法；

3. 会在极坐标系下计算简单区域的二重积分；会在柱坐标、球坐标系下计算简单的三重积分。

4. 会用二重积分、三重积分解一些简单的应用问题（平面图形的面积、空间立体的体积、空间曲面面积、质量、重心、转动惯量等）。

§13.1 二重积分概念

本节以计算曲顶柱体的体积和平面薄片的质量为例导出二重积分的概念。

一、曲顶柱体的体积

在一元函数积分学中，我们已经指出，由分段连续平面曲线所围成的平面图形面积的计算问题，一般来说，总可以转化为若干个曲边梯形面积的计算问题，从而引进了定积分概念。同样，由分片连续的曲面所围成的立体体积的计算问题，一般来说，总可以转化为若干个曲顶柱体体积的计算问题。为此，我们先来讨论曲顶柱体体积的计算问题。

什么叫做曲顶柱体？

所谓曲顶柱体是指这样的立体：它的底面是坐标面 xOy 上一个有界、可求面积的平面区域 D；顶面是区域 D 上的恒正的连续函数 $z=f(x, y)$ 所表示的曲面 S；侧

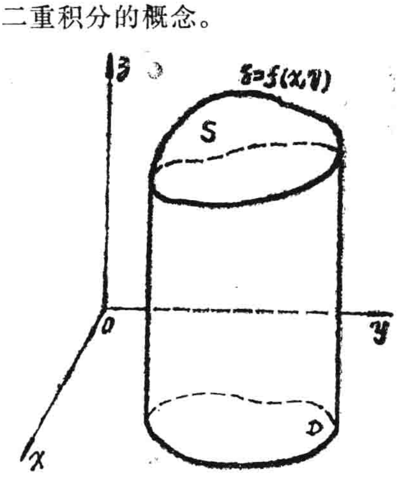

图 13—1

面是以D的边界曲线为准线、母线平行于z轴的柱面（图13—1）。

问题：如何计算这曲顶柱体的体积V？

根据立体几何知识可知，如果柱体的顶是一个平行于坐标面xOy的平面，不妨假设其高为z_0，则柱体体积

$$V=z_0\sigma$$

其中σ是平面区域D的面积。但现在的问题是柱体的顶是一个曲顶，故柱体的"高"是变量。因而其体积不能简单地用底面积乘高求得，这里又碰到了"变与不变"的矛盾。为了解决这一矛盾，我们采用通常积分学中所用的"分割、求和、取极限"的方法来处理。

（1）将平面区域D用一组曲线网任意地分成n个小区域(子域)：

$$\Delta\sigma_1,\ \Delta\sigma_2,\ \cdots,\ \Delta\sigma_n$$

第i个子域的面积亦用$\Delta\sigma_i$表示 $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$。

分别以每个小区域$\Delta\sigma_i$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$的边界曲线为准线，作母线平行于z轴的柱面，这些柱面分曲顶成n个小曲面片(子曲面)，相应地把所求的曲顶柱体分成n个小曲顶柱体（图13—2），它们的体积分别记作

$$\Delta V_1,\ \Delta V_2,\ \cdots,\ \Delta V_n$$

显然，曲顶柱体体积 $V=\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta V_i$。

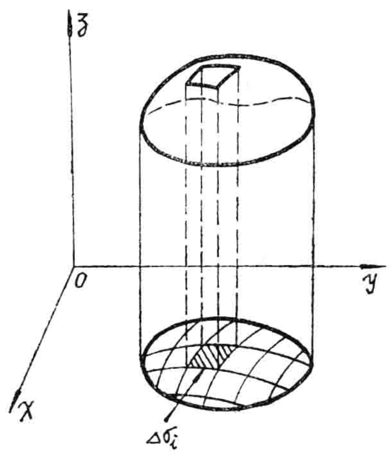

图 13—2

（2）为了计算每个小曲顶柱体体积ΔV_i $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$，在每个小区域$\Delta\sigma_i$上任取点$P_i(\xi_i,\ \eta_i)$，以$\Delta\sigma_i$为底，$f(\xi_i,\ \eta_i)$为高作平顶柱体，则该平顶柱体体积为$f(\xi_i,\ \eta_i)\cdot\Delta\sigma_i$，它近似等于以$\Delta\sigma_i$为底的小曲顶柱体的体积$\Delta V_i$，即

$$\Delta V_i\approx f(\xi_i,\ \eta_i)\cdot\Delta\sigma_i \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

（3）曲顶柱体的体积V近似等于上述n个小平顶柱体体积之和，即

$$V=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\ \eta_i)\,\Delta\sigma_i$$

（4）当分割越来越细，且所有子域均收缩于一点时，近似值就趋向于精确值，于是曲顶柱体的体积为

$$V=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\ \eta_i)\,\Delta\sigma_i \qquad (1.1)$$

其中$d=\max\limits_{1\leq i\leq n}d_i$，而$d_i$是区域$\Delta\sigma_i$上任意两点间距离的上确界，称为区域$\Delta\sigma_i$的直径 $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$。

二、非均匀薄片的质量

设有一平面薄片，占有xOy平面上的区域D，该薄片在点$(x,\ y)$处的面密度ρ是坐

标 x、y 的函数：$\rho=\rho(x, y)$，求薄片的质量 m（图13—3）。

若这平面薄片的质量是均匀分布的，即密度 $\rho=$ 常数，则平面薄片的质量

$$m=\rho\sigma \qquad (\sigma\text{是区域}D\text{的面积})$$

但现在薄片的质量分布不均匀，为此仿照上例处理：

（1） 用一组曲线网把平面薄片 D 任意分成 n 个小区域（子域）

$$\Delta\sigma_1, \ \Delta\sigma_2, \ \cdots, \ \Delta\sigma_n$$

第 i 个子域的面积亦用 $\Delta\sigma_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 表示，则平面薄片的质量等于 n 个小平面薄片的质量之和。

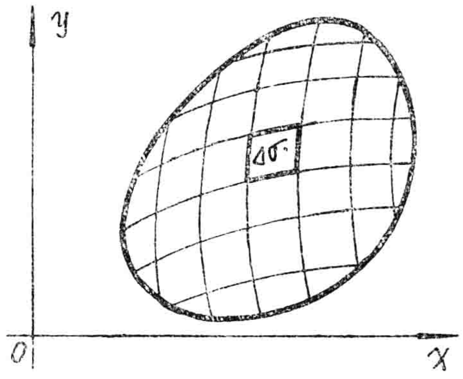

图 13—3

（2） 为了计算 n 个小薄片的质量，在每个小区域 $\Delta\sigma_i$ 上任取点 $P_i(\xi_i, \eta_i)$，由于 $\Delta\sigma_i$ 较小，可以近似地认为其质量是均匀分布的。即不妨认为小区域 $\Delta\sigma_i$ 上各点处的密度近似地等于 $\rho(\xi_i, \eta_i)$，记小区域 $\Delta\sigma_i$ 的质量为 Δm_i，则

$$\Delta m_i \approx \rho(\xi_i, \eta_i)\cdot\Delta\sigma_i \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

（3） 整个平面薄片 D 的质量 m 近似地为

$$m=\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i \approx \sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

（4） 当分割越来越细，且诸小区域 $\Delta\sigma_i$ 的直径最大者 $d=\max\limits_{1<i<n} d_i$ 趋向于零时，近似值趋于精确值，因此，所求平面薄片 D 的质量为

$$m=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i \ . \qquad (1.2)$$

三、二重积分定义

(1.1)，(1.2) 两式来自不同的实际问题，但在数学结构上有共同之处：都是一种特定和式的极限，数学上称为二重积分。一般地，有如下定义。

定义 设 $z=f(x, y)$ **为定义在平面有界闭域** D **上的二元函数。将区域** D **用曲线网任意分成** n **个子域**

$$\Delta\sigma_1, \ \Delta\sigma_2, \ \cdots, \ \Delta\sigma_n$$

（$\Delta\sigma_i$ **既表示第** i **个子域，也表示该子域的面积**），**在每个子域** $\Delta\sigma_i$ **上任取一点** $P_i(\xi_i, \eta_i)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，**作和式**

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

若当各子域的最大直径 d **趋于零**（即 $d=\max\limits_{1<i\leqslant n} d_i\to 0$）**时，上述和式有极限** I

$$I=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\ \eta_i)\ \Delta\sigma_i$$

而且值 I 与区域 D 的分法及点 $(\xi_i,\ \eta_i)$ 的取法无关，则称极限值 I 为函数 $f(x,\ y)$ 在区域 D 上的二重积分，记作 $\iint\limits_D f(x,\ y)d\sigma$，即

$$\iint\limits_D f(x,\ y)d\sigma=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\ \eta_i)\ \Delta\sigma_i$$

且称函数 $f(x,\ y)$ 在区域 D 上可积。

其中 $f(x,\ y)$ 叫做被积函数；$f(x,\ y)\ d\sigma$ 叫做被积表达式；x、y 叫做积分变量；$d\sigma$ 叫做面积元素；D 叫做积分区域。

由于积分和式的极限与区域 D 的分法及点 $(\xi_i,\ \eta_i)$ 的取法无关，因而若用一组平行于 x 轴，y 轴的直线分割区域 D，则面积元素 $d\sigma=dx\,dy$，于是二重积分可表示为

$$\iint\limits_D f(x,\ y)dx\,dy。$$

利用二重积分的定义，上述例 1 中曲顶柱体体积可以表示成曲顶上点的竖坐标 $f(x,\ y)$ 在其底面区域 D 上的二重积分：

$$V=\iint\limits_D f(x,\ y)\ d\sigma=\iint\limits_D f(x,\ y)\ dx\,dy\ .$$

例 2 中平面薄片的质量可表示为面密度函数 $\rho(x,\ y)$ 在该薄片所占有区域 D 上的二重积分：

$$m=\iint\limits_D \rho(x,\ y)\ d\sigma=\iint\limits_D \rho(x,\ y)\ dx\,dy\ .$$

在讨论二重积分时，自然提出这样的问题：满足什么条件的函数是可积的？对此，我们有下述结论：

若函数 $f(x,\ y)$ 在有界闭域 D 上连续，则 $f(x,\ y)$ 在 D 上必可积。

四、二重积分的几何意义

设二元函数 $z=f(x,y)$ 在平面有界闭区域 D 上连续，则 $f(x,y)$ 在 D 上可积。根据上面讨论可知，若 $f(x,\ y)\geqslant 0$，$x\in D$，则二重积分 $\iint\limits_D f(x,\ y)\ dx\,dy$ 表示以 xOy 平面上区域 D 为底，曲面 $z=f(x,\ y)$ 为顶的曲顶柱体的体积；若 $f(x,\ y)\leqslant 0$，$x\in D$，则二元函数 $z=f(x,\ y)$ 所表示的曲面位于 xOy 平面的下方，从而以区域 D 为底，以曲面 $z=f(x,\ y)$ 为顶的曲顶柱体位于 xOy 平面的下方，此时二重积分和式 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\ \eta_i)\ \Delta\sigma_i$ 中每一项的值均为负，故二重积分 $\iint\limits_D f(x,\ y)dx\,dy$ 的值亦是负的，因此 $\iint\limits_D f(x,\ y)dx\,dy$ 表示曲顶柱体体积的相反数。若 $f(x,\ y)$ 在区域 D 的若干部分区域上为正，而在其余的部分区域上为负，则 $f(x,\ y)$ 在 D 上的二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy$ 就等于这些部分区域上曲顶柱体体积的代数和。

五、二重积分的基本性质

比较定积分与二重积分定义可以看出，两者都是特殊和式的极限，所不同的乃是定积分和式中的每一项是一元函数在子区间上某一点的函数值与该子区间长度的乘积；二重积分和式中的每一项是二元函数在子区域上某一点的函数值与该子区域面积的乘积。为此二重积分与定积分有类似的性质，现叙述如下，读者可用二重积分定义加以证明之。

设函数 $f(x, y)$、$g(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续。

性质 1 常数因子可以提到积分符号外面，即

$$\iint\limits_D k f(x, y)\, d\sigma = k\iint\limits_D f(x, y)\, d\sigma \qquad (k\text{是常数}).$$

性质 2 函数代数和的积分等于各函数积分的代数和，即

$$\iint\limits_D [f(x, y) \pm g(x, y)]\, d\sigma = \iint\limits_D f(x, y)\, d\sigma \pm \iint\limits_D g(x, y)\, d\sigma .$$

性质 3 如果积分区域 D 可以表示成两个子区域 D_1、D_2 的和：$D = D_1 + D_2$（此处 D_1、D_2 除了边界以外没有公共点，如图 13—4)，则

$$\iint\limits_D f(x, y)\, d\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x, y)\, d\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x, y)\, d\sigma .$$

该性质表示二重积分对区域具有可加性。

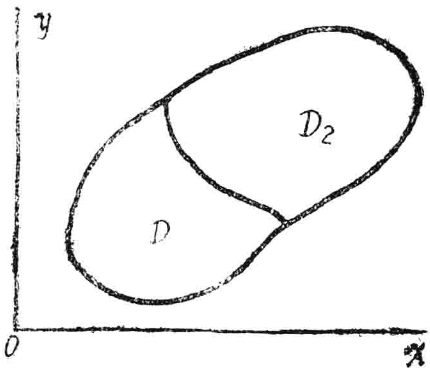

图 13—4

性质 4 如果在区域 D 上，$f(x, y) \equiv 1$，σ 为积分区域 D 的面积，则 $\iint\limits_D 1 \cdot d\sigma = \sigma$. 它的几何意义是，高为 1 的平顶柱体的体积，在数值上等于柱体的底面积。性质 4 常用来计算平面图形的面积。

性质 5 如果在区域 D 上，$f(x, y) \leqslant g(x, y)$，则

$$\iint\limits_D f(x, y)\, d\sigma \leqslant \iint\limits_D g(x, y)\, d\sigma .$$

特别有

$$-\iint\limits_D |f(x, y)|\, d\sigma \leqslant \iint\limits_D f(x, y)\, d\sigma \leqslant \iint\limits_D |f(x, y)|\, d\sigma .$$

（因为，$-|f(x, y)| \leqslant f(x, y) \leqslant |f(x, y)|$）

即
$$\left|\iint\limits_D f(x, y)\, d\sigma\right| \leqslant \iint\limits_D |f(x, y)|\, d\sigma .$$

性质 6 设 m、M 分别为 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上的最小值与最大值，则

$$m\sigma \leqslant \iint\limits_D f(x, y)\, d\sigma \leqslant M\sigma$$

事实上，
$$m\sigma=\iint_D m\,d\sigma\leqslant\iint_D f(x,\ y)\ d\sigma\leqslant\iint_D M\ d\sigma=M\sigma\ .$$

性质 7 **（二重积分中值定理）** 设函数 $f(x,\ y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则在 D 上至少存在一点 $(\xi,\ \eta)$，使下式成立
$$\iint_D f(x,\ y)\ d\sigma=f(\xi,\ \eta)\cdot\sigma \qquad (\sigma\text{表示积分区域}D\text{的面积})。$$

证明 设 $m=\min\limits_D f(x,\ y)$；$M=\max\limits_D f(x,\ y)$。

则在区域 D 上，有
$$m\leqslant f(x,\ y)\leqslant M\ .$$

由性质 6 得
$$m\sigma\leqslant\iint_D f(x,\ y)\ d\sigma\leqslant M\sigma$$

即
$$m\leqslant\frac{1}{\sigma}\iint_D f(x,\ y)\ d\sigma\leqslant M$$

这就是说，$\frac{1}{\sigma}\iint_D f(x,\ y)\ d\sigma$ 介于 $f(x,\ y)$ 在 D 上的最小值 m 与最大值 M 之间，根据二元连续函数的介值定理，在 D 上必存在一点 $(\xi,\ \eta)$，使得函数值 $f(\xi,\ \eta)$ 与该确定的数值相等，即
$$f(\xi,\ \eta)=\frac{1}{\sigma}\iint_D f(x,\ y)\ d\sigma\ .$$

因此
$$\iint_D f(x,\ y)\ d\sigma=f(\xi,\ \eta)\cdot\sigma\ .$$

这性质说明，曲顶柱体 的体积，等于以曲 顶上某一点的竖 坐标为高的同 底平顶柱体的体积。

习 题 13.1

1．一薄板(不计厚度) 位于 xOy 面上，占有闭区域 D，薄板上分布有电荷，其电荷面密度为 $\sigma=\sigma(x,\ y)$，且 $\sigma(x,\ y)$ 在 D 上连续，试用二重积分表示这板上所带的全部电量 Q。

2．将以曲面 $z=2-x^2-y^2$ 为顶，以圆域 $D=\{(x,\ y)|x^2+y^2\leqslant1\}$ 为底面的曲顶柱体的体积表示成二重积分。

3．根据二重积分的性质，比较下列二重积分的大小：

（1）$\iint_D(x+y)^2\,d\sigma$ 与 $\iint_D(x+y)^3\,d\sigma$，其中积分区域 D 是由 x 轴、y 轴及直线 $x+y=1$ 所围成；

（2）$\iint_D(x+y)^2\,d\sigma$ 与 $\iint_D(x+y)^3\,d\sigma$，其中积分区域 D 是由圆周 $(x-2)^2+(y-1)^2=2$ 所围成的圆域；

（3） $\iint\limits_D \ln(x+y)\,d\sigma$ 与 $\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2\,d\sigma$，其中 D 是三顶点分别为(1,0)、(1,1)、(2，0)的三角形区域；

（4） $\iint\limits_D \ln(x+y)\,d\sigma$ 与 $\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$，其中$D$是矩形区域：$3\leqslant x\leqslant 5, 0\leqslant y\leqslant 1$。

4. 估计下列积分值的大小：

（1） $I=\iint\limits_D (x^2+4y^2+9)\,d\sigma$，其中 D 是圆域：$x^2+y^2\leqslant 4$；

（2） $I=\iint\limits_D (x+y+1)\,d\sigma$，其中 D 是矩形域：$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 2$；

（3） $I=\iint\limits_D xy(x+y)\,d\sigma$，其中 D 是矩形域：$0\leqslant x\leqslant 2$，$0\leqslant y\leqslant 2$；

（4） $I=\iint\limits_D (x+1)^y\,d\sigma$，其中 D 是矩形域：$0\leqslant x\leqslant 2$，$0\leqslant y\leqslant 2$；

（5） $I=\iint\limits_D (x^2+y^2-4x-4y+10)\,d\sigma$，其中$D$是椭圆域：$\dfrac{(x-1)^2}{4}+(y-2)^2\leqslant 1$。

§13.2 二重积分在直角坐标系下的计算法

本节将从二重积分的几何意义导出二重积分在直角坐标系下的计算法，其基本思想是把二重积分的计算问题归结为计算定积分的问题。

在第九章中已经指出，若一空间立体在 x 轴上的投影区间是区间$[a, b]$，且用垂直于 x 轴的平面去截立体所得截面 S 是 x 的连续函数 $S=S(x)$（图13—5），则该立体体积的计算公式是

$$V=\int_a^b S(x)\,dx \tag{2.1}$$

下面我们转而讨论二重积分$\iint\limits_D f(x, y)\,d\sigma$ 的计算法。不失一般性，可以认为 被积函数

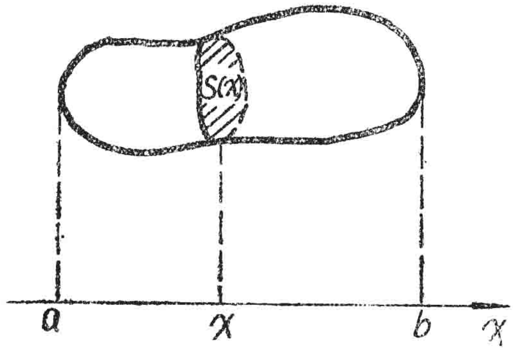

图 13—5

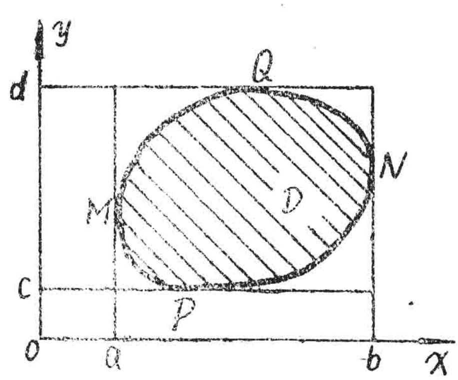

图 13—6

$z=f(x, y)$ 在有界闭区域D上连续，而且是非负的。

首先假设积分区域D的边界曲线与任一条平行于坐标轴的直线至多交于两点，而且D位于由与边界曲线相切的直线 $x=a$，$x=b$，$y=c$，$y=d$ 所围成的矩形区域内（图 13—6）。

可以看出，直线 $x=a$，$x=b$ 与边界曲线的切点M、N把边界曲线分成两条曲线弧段：$\overset{\frown}{MPN}$ 与 $\overset{\frown}{MQN}$，假设它们的方程分别是 $y=y_1(x)$ 与 $y=y_2(x)$，于是积分区域D可以用下述不等式表示：

$$y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x), \qquad a\leqslant x\leqslant b \ .$$

根据二重积分的几何意义知，要求二重积分 $\iint\limits_D f(x, y)\,d\sigma$，即求以 $z=f(x, y)$为曲顶，以区域D为底的曲顶柱体的体积。为此，以平面 $x=x_0$（$x_0\epsilon[a, b]$）去截曲顶柱体得截面，设截面面积是 $A(x_0)$（图13—7），由(2.1)式可知该曲顶柱体体积

$$V=\int_a^b A(x_0)\,dx_0 \ .$$

问题：如何计算截面面积$A(x_0)$？

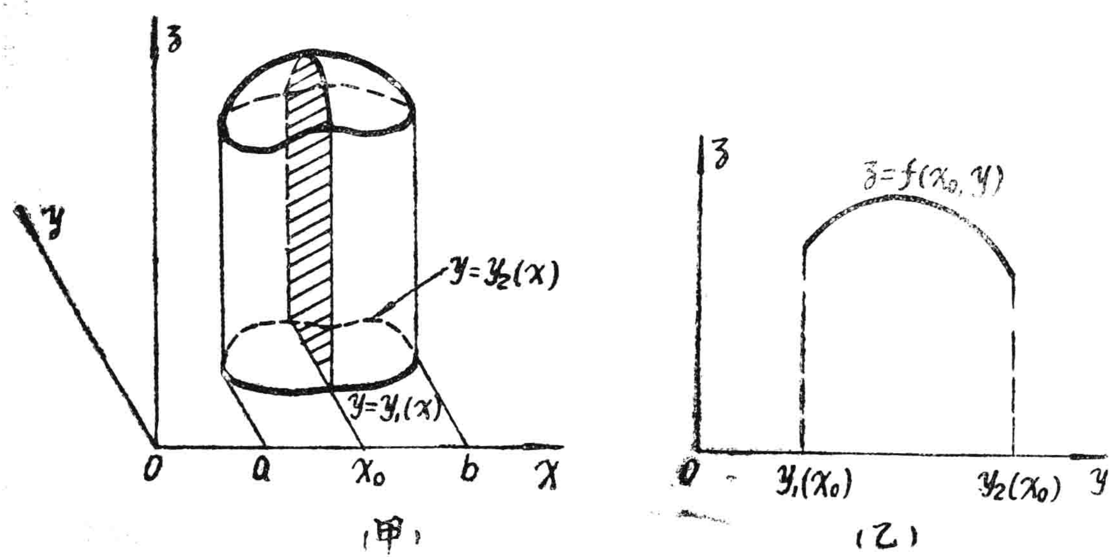

图 13—7

由于截面 $A(x_0)$ 是平面 $x=x_0$ 上，以区间$[y_1(x_0), y_2(x_0)]$为底，以曲线 $z=f(x_0, y)$ 为曲边的曲边梯形（图 13—7 中阴影部分），所以这截面面积为

$$A(x_0)=\int_{y_1(x_0)}^{y_2(x_0)} f(x_0, y)\,dy, \text{从而} \quad V=\int_a^b\left[\int_{y_1(x_0)}^{y_2(x_0)} f(x_0, y)\,dy\right]dx_0 \ .$$

当 x_0 在区间$[a, b]$上任意变动时，$A(x_0)$亦随之变动，故 $A(x_0)$是变量 x_0 的函数，不妨用 x 代替 x_0，有

$$V=\int_a^b A(x)\,dx=\int_a^b\left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy\right]dx$$

即
$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,d\sigma=\int_a^b\left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,\ y)\,dy\right]dx \tag{2.2}$$

(2.2) 式的右端是一个先对 y，再对 x 的累次积分。也就是说，先把 x 看作常数，把 $f(x,\ y)$ 看作关于变量 y 的一元函数，从 $y_1(x)$ 到 $y_2(x)$ 对变量 y 进行积分，显然其积分值是 x 的函数 $A(x)$；然后再把 $A(x)$ 在区间 $[a,\ b]$ 上积分。这个先对 y、再对 x 的累次积分亦可以表示成

$$\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,\ y)\,dy$$

故
$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,d\sigma=\int_a^b\left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,\ y)\,dy\right]dx=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,\ y)\,dy \tag{2.3}$$

公式 (2.3) 给出了计算二重积分的方法——化二重积分为累次积分法。

此外，我们亦可以看出，直线 $y=c$、$y=d$ 与边界曲线的切点 P、Q 把边界曲线分成两条曲线弧段：$\overset{\frown}{PMQ}$ 与 $\overset{\frown}{PNQ}$，若它们的方程分别是 $x=x_1(y)$ 与 $x=x_2(y)$，于是积分区域 D 可以用下述不等式表示：

$$x_1(y)\leqslant x\leqslant x_2(y),\qquad c\leqslant y\leqslant d\ .$$

如果我们先求曲顶柱体垂直于 y 轴的截面面积 $A(y)$，再求曲顶柱体体积 V，根据同样的推理，有

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,d\sigma=\int_c^d\left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,\ y)\,dx\right]dy=\int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,\ y)\,dx \tag{2.4}$$

总之，如果积分区域 D，既可表示成：$y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x)$，$a\leqslant x\leqslant b$。又可表示成：$x_1(y)\leqslant x\leqslant x_2(y)$，$c\leqslant y\leqslant d$。则由 (2.3) 及 (2.4) 式，有

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,d\sigma=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,\ y)\,dy=\int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,\ y)\,dx\ .$$

这就告诉我们，在计算二重积分时，可以采用不同的积分次序。

其次，假设积分区域 D 是由连续曲线 $y=y_1(x)$、$y=y_2(x)$ 以及直线 $x=a$、$x=b$ 所围成的平面区域（图 13—8），而且 $y_1(x)\leqslant y_2(x)$，$x\epsilon[a,\ b]$。此时积分区域 D 可以用下述不等式表示：

$$y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),\qquad a\leqslant x\leqslant b\ .$$

因此，可以把二重积分化为先对 y，再对 x 的累次积分：

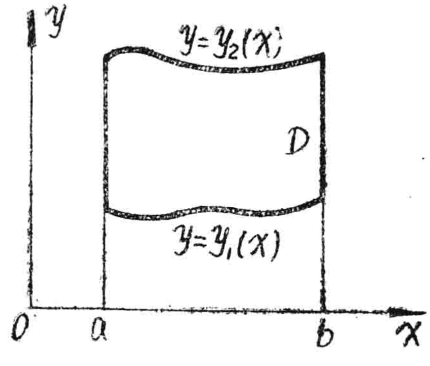

图 13—8

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,d\sigma=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,\ y)\,dy\ .$$

若积分区域 D 是由连续曲线 $x=x_1(y)$、$x=x_2(y)$ 与直线 $y=c$、$y=d$ 所围成的平面区域（图 13—9），而且 $x_1(y)\leqslant x_2(y)$，$y\epsilon[c,\ d]$。此时积分区域 D 可用下述不等式表示：

$$x_1(y)\leqslant x\leqslant x_2(y),\qquad c\leqslant y\leqslant d\ .$$

因此，可以把二重积分化为先对 x、再对 y 的累次积分：

$$\iint\limits_D f(x, y)\, d\sigma = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx \text{ ,}$$

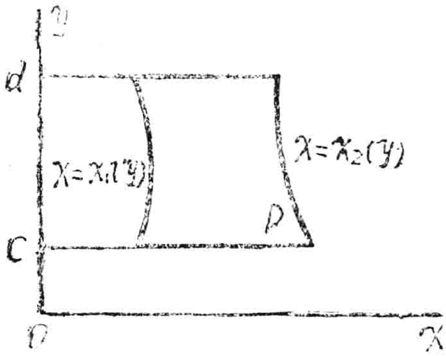

图 13—9

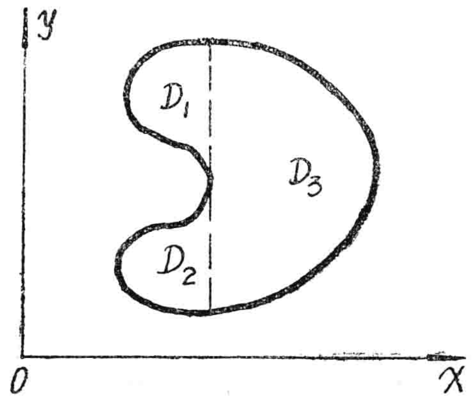

图 13—10

如果平行于坐标轴的直线与积分区域D的边界曲线的交点多于两点，则我们可以把D分成若干部分区域（图 13—10），使每个部分区域的边界曲线与平行于坐标轴的直线的交点不多于两点，从而在每个部分区域上可以应用公式（2.3）或公式（2.4）。又由二重积分性质可知，积分区域D上的二重积分等于各部分区域上二重积分的和，从而可以求得二重积分 $\iint\limits_D f(x, y)\, d\sigma$ 的值。

最后我们指出，虽然在上述讨论中，假设函数 $f(x, y)$是非负的，但只要 $f(x, y)$在D上连续，结论仍然成立。

通过上面的讨论可以看出，二重积分化为累次积分的关键是确定积分限。下面我们给出确定积分限的一般规则。

先对 y 积分，再对 x 积分，可按下述方法进行：

第一步　画出积分区域D的图形(如图 13—11)，并确定区域D中点的横坐标 x 的最大变化范围：$a \leqslant x \leqslant b$； 即确定积分区域 D 在 x 轴上的投影区间$[a, b]$。

第二步　在区间$[a, b]$内任取一点 x，过点 x 作平行于 y 轴的直线与区域 D的边界曲线交于两点 A、B，它们的纵坐标分别是 $y_1(x)$，$y_2(x)$，且 $y_1(x) \leqslant y_2(x)$，$x \in [a, b]$。

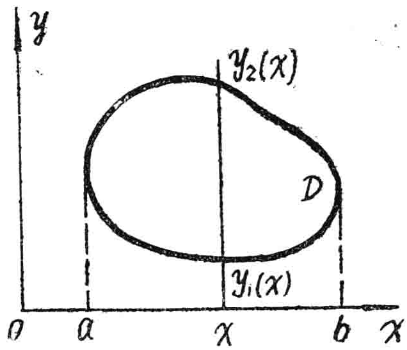

图 13—11

第三步　把积分区域D表示成下述形式：

$$y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b \text{ .}$$

于是有

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy \text{ .}$$