立体几何难点分析

孟令春　林而立　李凤改　编

海　洋　出　版　社

1992年·北京

(京)新登字087号

立体几何难点分析
孟令春　林而立　李凤改　编
*
海洋出版社出版（北京市复兴门外大街1号）
新华书店北京发行所发行　昌平兴华印刷厂印刷
开本：787×1092 1/32　印张：6.125　字数：140千字
1992年6月第一版　　1992年6月第一次印刷
印数：1—9500
*
ISBN 7-5027-1969-5/G·585　定价：4.00元

前　　言

本书是由孟令春、林而立、李凤政编写的。

全书共分六章，对立体几何中的几个困难问题，如：异面直线、二面角、折叠问题和截面问题等进行了深入浅出的介绍，尽力使这些难点能为同学所较容易地掌握。在介绍这些难点的运用过程中，努力做到揭示思维规律，指出各种使用方法，并尽量做到方法齐全。

根据教学大纲和教材的要求，本书第一章还全面剖析了平面几何与立体几何之间的区别及它们之间的内在联系，并尽力使同能掌握一种重要的思想——“化归”意识。

在第六章中还介绍了立体几何与其它知识如三角的综合运用，利用三角关系式把立体几何有关概念联系在一起，并再利用这些关系式解决立体几何有关问题，同时也向同学们提供一条思路、一种解决问题的方法。

我们编写这本小册子的目的不光是为了复习立体几何的基础概念和知识，而是想将我们二十余年的教学经验以及对立体几何的理解介绍给大家，由于水平有限，错误难免，希望老师们、同学们指正。

编　者

1992年1月

目　　录

第一章　空间到平面的化归

客观世界是充满矛盾的统一体，是具有普遍联系的；事物之间又是在一定条件下互相转化的；事物是永远处于运动变化之中的。客观世界的这些特性，要求我们在观察问题、处理问题时，要有意识地对问题进行转化，把复杂的、难解决的问题转化为简单的或易解决的问题，这种意识称为化归意识。化归意识使我们用联系的、发展的、运动变化的眼光观察问题、认识问题。

化归思想，无论对于实际生活问题还是工作、学习都能给予一定的启示。对于立体几何的学习，利用化归思想将空间问题转化为平面问题常能解决大量复杂问题。更为重要的是化归意识的培养不仅有助于问题的解决，而且对于培养思维的灵活性与逆向思维都能起到促进作用。同学们的思维是否具有灵活性，是与能否迅速、妥善地处理问题有密切关联的。

中学立体几何是研究空间图形的性质、画法、计算以及它们的应用的学科。而这些空间图形是由点、线、面构成的。平面图形是空间图形的一部分，而很多空间图形是由平面图形组成的。认清平面图形与空间图形的关系，掌握由空间问题转化为平面问题，用平面几何的知识去加以解决。这种思维方法即化归意识，是本书的重要指导思想和解决立体几何问题的重要方法。

(一)平面图形与空间图形的关系

正如实际生活中占有空间的房屋是由一面一面的墙壁组成的那样．立体几何中的很多空间图形是由平面图形组成的；空间图形的位置关系往往可以由平面内的位置关系来确定．但是空间图形毕竟不是平面图形，同学们一定要注意掌握它们之间的内在联系与区别．对于课本知识如何用化归意识加深理解，我们通过具体实例加以说明．异面直线问题是立体几何中的第一个难点，我们将在第二章专门介绍，本章仅以空间直线与平面关系进行分析介绍．

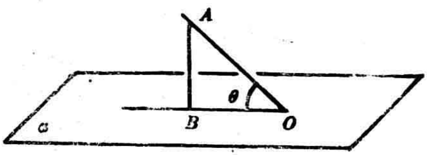

图 1-(1)

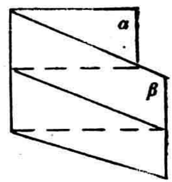

图 1-(2)

首先我们注意到课本上空间直线和平面这一章中许多有关角的定义都是直接将空间图形的问题转化为平面图形的问题．例如：直线与平面所成的角的概念．即平面的斜线和它在平面上的射影所成的锐角，叫做这条直线和这个平面所成的角．如图1-(1)平面 α 与斜线 AO 间的关系是空间图形关系，但是描绘斜线AO 与平面 α 相交的数量关系——直线与平面所成的角，却是个平面内角的概念．而对于描述两个相交平面α与平面 β 的数量关系的二面角，则更是直接象图1-(2)那样将空间问题转化为研究在某一平面内的角即二面角的平面角这一问题．

将空间图形问题转化为平面图形问题是立体几何学习的重要思想方法也是解决问题的重要手段。在平面几何的学习中，我们学会了过线外一点做已知直线的方法。那么在立体几何中如何过已知平面外一点做一直线与已知平面平行呢？这是个纯空间问题，但是只有转化为平面问题时才能解决。具体作法如下：

已知：平面α、点A，$A\notin\alpha$

求作：直线a使$A\in a$，$a\parallel\alpha$。

分析：如图1-(3)直线a为所求，$a\subset\beta$，$\alpha\cap\beta=BC$

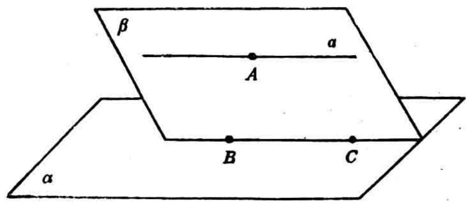

图 1-(3)

则$a\parallel BC$则问题转化为在平面β内，过A作BC的平行线的问题了，这在平面几何中是很容易办到的。

作法：1) 在平面α内任取两点B、C，根据公理A、B、C三点可作平面β，$\alpha\cap\beta=BC$。

2) 在平面β内过A作BC的平行直线a。

则直线a即为所求。证明从略。

本来是空间作图问题不易解决，而将问题转化为把点A与平面α内任一直线BC置于同一平面β内，则可根据平面几何的方法加以解决。

在直线与平面垂直的问题中，如何过已知平面外一点做已知平面的垂线问题也同样用到这种方法。

已知：平面α，点A、$A\notin\alpha$

求作：直线a，使$A\notin a$且$a\perp$平面α。

分析：正如过平面外一点做已知平面平行线那样如何将

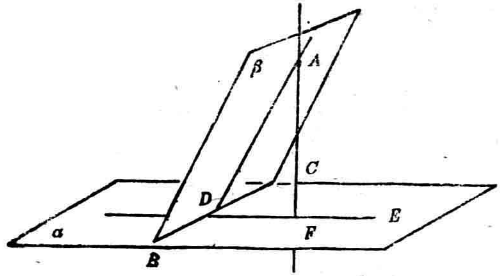

图 1-(4)

问题转化为：过已知点做已知直线的垂线问题，也就是转化为平面几何问题来解决。如图 1-(4) 在平面ADF内作$AF\perp DF$很容易，而根据直线与平面垂直的判定定理使 $AF\perp BC$ 则是本题的关键。

作法：1）在平面α内任取 B、C 二点，据公理A、B、C三点确定平面β，平面$\alpha\cap$平面$\beta=BC$。

2）在平面β内过A作$AD\perp BC$，垂足为D。

3）在平面α内过D作$DE\perp BC$

4）在AD、DE 两相交直线确定的平面 ADE 内过A 作ED的垂线AF。则AF即为所求。

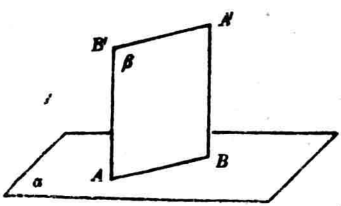

图 1-(5)

证明：由作法$AD\perp BC$、$ED\perp BC$，$BC\perp$平面 ADE，$AF\subset$平面ADE，$\therefore BC\perp AF$ 又知$AF\perp ED$，且BC，$ED\subset$平面α，$BC\cap ED=D$ $\therefore AF\perp$平面α。

若点$A\in\alpha$，则在平面α外任取一点 A'。过 A' 作平面α垂线$A'B$，然后将$A'B$、A置于平面β内，在平面β内过A作

$AB' \parallel A'B$即可。

以上两个问题都是将空间直线与平面的平行、垂直的作图问题转化为平面几何的直线与直线平行、垂直的作图问题。有了这两个作图问题为基础再作过已知平面外一点作与已知平面平行或垂直的平面就很容易了。

如图1-(6)按过已知点做已知平面平行线的方法过平面α外点A，作$a \parallel \alpha$，$b \parallel \alpha$，$\because a \cap b = A$ $\therefore$过a、b作平面β则$\alpha \parallel \beta$且$A \in \beta$。

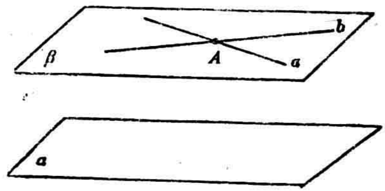

图 1-(6)

如图1-(7)按过已知点做已知平面的垂线的方法，过A作$a \perp$平面α，再过直线a任做平面β，则平面$\beta \perp$平面α。

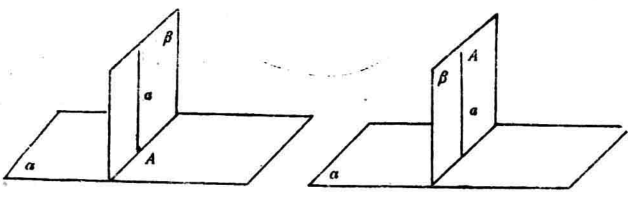

图 1-(7)

从以上几个例子可以看出要直接做出空间图形很困难，而很多空间图形都是转化为平面图形来解决，再由平面图形组合成立体图形。因此我们在考虑立体几何的问题时，一定要具备这种由立体化归为平面的化归意识。

(二)立体几何的"唯一"问题

空间问题化归为平面问题来解决的另一方面是有关"唯

一”问题．我们已经知道在平面几何内：两直线交点唯一；过两点直线唯一；过直线外一点引这直线的平行线唯一；过一点引一直线的垂线唯一．而在立体几何的学习中，我们同样也碰到了唯一问题；过两异面直线中一条与另一直线平行的平面唯一；过一点引一平面的垂线唯一；过一点和一直线垂直的平面唯一；过平面外一点做和已知平面平行的平面唯一等等．当然根据公理过不共线三点或一直线及其外一点或两相交直线或两平行直线的平面唯一；两相交平面的交线唯一等是不言而喻的．下面我们分别说明立体几何的唯一问题如何转化为平面几何的唯一问题来证明．

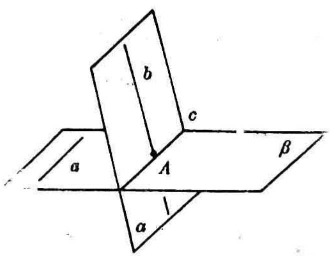

图 1-(8)

求证：经过两条异面直线中的一条，有且仅有一个平面与另一直线平行．

已知：直线a、直线b为异面直线

求证：过b有唯一平面α，且平面α∥直线a．

分析：如图1-(8)由相交直线b、c确定的平面α即为所求，而若$a \parallel c$则$a \parallel \alpha$．所以问题可以转化为由直线a与b上任一点A确定的平面β内的平面几何的唯一问题．即平面几何的过线外一点做已知直线的平行线唯一．

证明：在直线b上任取一点A，直线a与A确定平面β．在平面β内过点A可做直线$c \parallel a$且c为唯一，直线b与直线c为相交直线，据公理可确定唯一平面α．$a \parallel c$，$c \subset \alpha$，$b \subset \alpha$，$\because a$、b为异面直线$\therefore a \not\subset \alpha$，$\therefore a \parallel \alpha$．

进一步可以证明过两异面直线外一点可以做且只可以做

一个平面和两条异面直线平行。如图1-(9)在直线a与点A确定的平面β内$a' \parallel a$，a'唯一，同样$b' \parallel b$，b'唯一，则由a'、b'确定的唯一平面α即为所求。

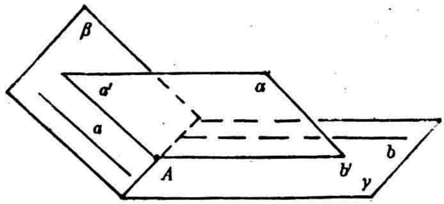

图 1-(9)

求证：过一点和一已知平面垂直的直线唯一。

已知：平面α，点$A \notin \alpha$，$A \in a$，$a \perp \alpha$。

求证：直线a唯一。

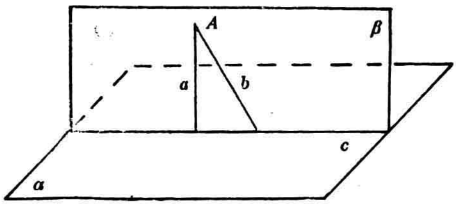

图 1-(10)

分析：如图1-(10)在平面几何中过线外一点做与已知直线垂直的直线唯一。若把问题转化为在平面β内过点A与直线C垂直的直线唯一，则问题就很容易解决了。

证明：假设直线a不是唯一的，设直线b过A且垂直于平面α。则直线a，b确定平面β，且$\alpha \cap \beta = c$，$\therefore a \perp c$，$b \perp c$。与平面几何过线外一点与已知直线垂直的直线唯一

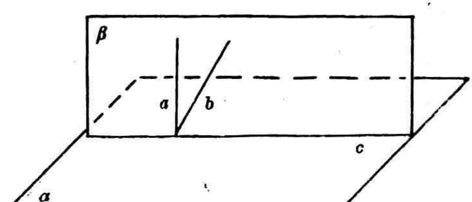

图 1-(11)

矛盾，所以直线a为唯一。

如图1-(11)若点$A\notin\alpha$，证法与点$A\in\alpha$完全相同。

求证：过一点和一直线垂直的平面唯一。

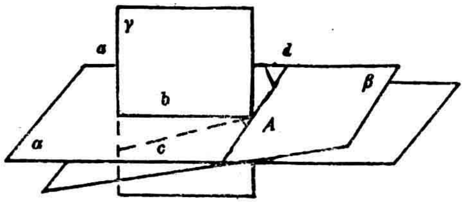

图 1-(12)

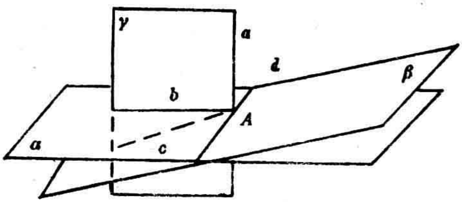

图 1-(13)

已知：直线a，点A，平面$\alpha\perp$直线a，且$A\in\alpha$。

求证：平面α是唯一的。

分析：如图1-(12)如何利用平面几何中过线外一点与已知直线垂直的直线是唯一的，是本题证明的关键。即在平面γ内有过A与a垂直的两条直线b、c是矛盾的。

证明：假设符合要求的平面不是唯一的，存在平面β，$\beta\perp a$且$A\in\beta$。直线a、点A确定平面γ，$\alpha\cap\gamma=b$。$\beta\cap\gamma=c$。$\because a\perp\alpha$，$a\perp\beta$，$\therefore a\perp b, a\perp c$。而$a$、$b$、$c\subset\gamma$，$b\cap c=A$，这样在同一平面内，过一点$A$有两直线与直线$a$垂直，这是不可能的. $\therefore$过点A与直线a垂直的平面α是唯一的。

如图1-(13) 若点$A\in a$，证法类似．只是过直线a任做平面γ即可。

用类似方法我们还可以证明：如果一条直线不和一个平面垂直（斜交、平行皆可），那么经过这条直线和已知平面垂直的平面唯一。证明时只须在已知直线上任取一点做已知平面的垂线，这垂线唯一。而由这垂线及已知直线确定的平面即为符合要求的唯一平面。

求证：经过平面外一点与已知平面平行的平面唯一。

已知：平面α，点$A\notin\alpha$。

求证：过点A且与平面α平行的平面β是唯一的。

证明：如图1-(14)过点A平面α的垂线a，则直线a为唯一。再过点A做与直线a垂直的平面β，则平面β为唯一．$\because a\perp\alpha, a\perp\beta$，$\therefore \alpha // \beta$．即过点$A$与平面$\alpha$平行的平面唯一．

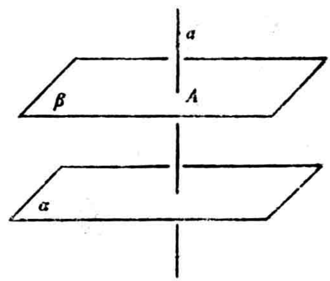

图 1-(14)

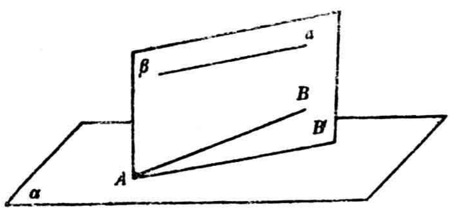

图 1-(15)

我们还可以证明：如果一条直线和一个平面平行，那么过已知平面内一点而和已知直线平行的直线唯一，且这直线定在已知平面内。

已知：直线$a //$平面α，点$A\in\alpha$，$AB // a$。

求证：AB为唯一，$AB\subset\alpha$。

分析：如图1-(15) 利用平面几何的过线外一点与已知直线平行的直线是唯一的，即在平面β有直线 AB，AB' 都与直线a平行是矛盾的。

证明：若AB不在平面α内，$\because a /\!/ AB$，则可确定平面β，$\alpha \cap \beta = AB'$，$a /\!/ \alpha \therefore a /\!/ AB'$在同一平面$\beta$，过$A$有$AB$，$AB'$都平行于直线$a$是不可能的，故$AB \subset \alpha$。即$AB$与$AB'$重合．且$AB$为唯一的。

（三）共面问题

在立体几何中，还有一类问题是：具有某种特性的直线都在某一平面内。例如：过已知平面外一点作已知平面的平行线，这些直线都在同一平面内；过一点做已知直线的垂线，这些直线都在同一平面内等。这类问题的证明也要考虑转化为有关平面几何问题来证。

求证：过平面外一点平行于这平面的所有直线，都在过这点且平行于已知平面的平面内。

已知：平面α，点A，直线 L_1、L_2、$L_3\cdots$ 共点 A，且 $L_1 /\!/ \alpha$、$L_2 /\!/ \alpha$、$L_3 /\!/ \alpha\cdots$

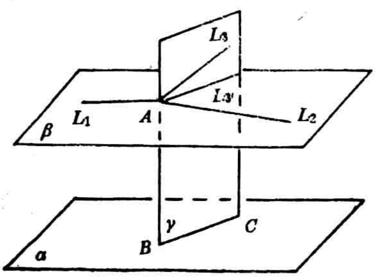

图 1-(16)

求证：L_1、L_2、L_3、…都在过点A且平行于平面α的平面内。

分析：如图1-(16) 根据题目要求先找到过点A且平行于平面α的平面β，然后再证明这些直线 L_1、L_2、$L_3\cdots$都在平面β内。证明

时需要将问题转化为平面几何的唯一问题。

证明：$\because L_1$、L_2共点A，$\therefore L_1$、L_2确定平面β。又知$L_1 /\!/ \alpha$、$L_2 /\!/ \alpha$，$\therefore$平面$\alpha /\!/$平面β，且$A \in \beta$。若L_3不在β内，

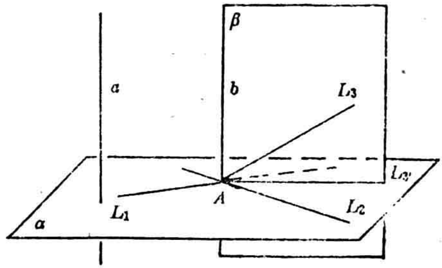

图 1-(17)

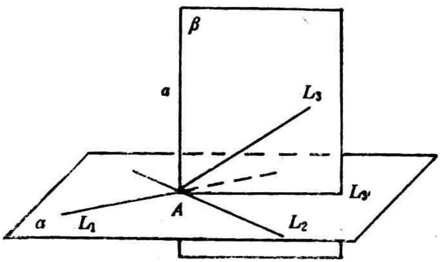

图 1-(18)

过L_3做平面γ，$\gamma \cap \beta = L_3'$. $\gamma \cap \alpha = BC$，$\because \alpha /\!/ \beta$ $\therefore L_3' /\!/ BC$，$\because L_3 /\!/ \alpha$。$\therefore L_3 /\!/ BC$。在平面γ内过点A有L_3，L_3'平行于BC，不可能. $\therefore L_3 \subset \beta$。

$\therefore$过点A与平面α平行的所有直线都在过这点且平行于平面α的平面β内。

求证：过一点和一条直线垂直的所有直线，都在过这点而垂直于这直线的平面内。

已知：直线L_1、L_2、L_3…共点A，且都垂直于直线a，点$A \in a$。

求证：直线L_1、L_2、L_3…都在过点A且垂直于直线a的平面内。

分析：如图1-(17)首先确定过点A且垂直于直线a的平面α，然后证明直线L_1、L_2、L_3…都在平面α内。同样需

要平面几何的唯一性来证明.

证明：$\because A\notin a$，过点A做直线$b /\!/ a$，则直线L_1、L_2、$L_3\cdots$都垂直于b. L_1、L_2共点A，根据公理确定平面α，$b\perp$平面α，则$a\perp$平面α，$A\in\alpha$. 若L_3不在平面α内，设L_3，b确定平面β，$\alpha\cap\beta=L_3'$，则$b\perp L_3'$. b，L_3，L_3'都在同一平面β内，与平面几何的过一点与已知直线垂直的直线唯一矛盾. $\therefore L_3$在平面α内，$\therefore L_1, L_2, L_3\cdots$共面. 即过一点和一直线垂直的所有直线，都在过这点而垂直于这直线的平面内.

若点$A\in a$，如图1-(18)证明方法与点$A\notin a$方法基本相同. 由过点A的直线L_1、L_2确定平面α，再证$L_3\subset$平面α即可.

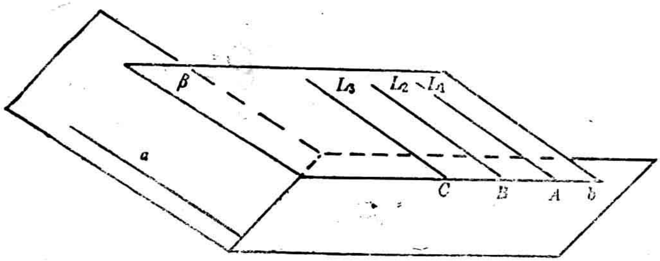

图 1-(19)

求证：过两条异面直线中一条上的各点，引另一条直线的平行直线，这些直线都在过这条直线而平行于另一直线的平面内.

已知：直线a、b为异面直线，A、B、$C\cdots\in b$，过A、B、$C\cdots$分别引直线a的平行线L_1、L_2、$L_3\cdots$

求证：直线L_1、L_2、$L_3\cdots$共面.

分析：如图1-(19)由直线b与L_1确定平面，然后将问