华大 精制 高校教材

21世纪高等教育规划教材

数学系列

复变函数与积分变换

FUBIANHANSHU YU JIFENBIANHUAN

主编 杜洪艳 尤正书 侯秀梅

SHUXUE XILIE

教育部直属师范大学
华中师范大学出版社

21世纪高等教育规划教材·数学系列

复变函数与积分变换

主　编　杜洪艳　尤正书　侯秀梅
副主编　刘　军　阳彩霞　张清平

华中师范大学出版社

内 容 提 要

复变函数与积分变换是工科电气、电子、通讯、自动化等专业的必修课，其理论与方法在自然科学和工程技术领域均有着广泛的应用。该书内容丰富、重点突出、逻辑严密，对基本概念、理论、方法的叙述力求深入浅出、清晰准确，每章最后还配置了适量的习题，以供学习者巩固练习。

全书共分九章，分别是：复数与复平面、解析函数、复积分、级数、留数及其应用、保形映射、傅里叶变换、拉普拉斯变换、快速傅里叶变换。

本书可作为普通高等院校工科类学生学习复变函数与积分变换知识的教材，也可作为科技工作者的参考用书。

新出图证(鄂)字 10 号

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/杜洪艳　尤正书　侯秀梅主编. —武汉：华中师范大学出版社，2011. 12
(21 世纪高等教育规划教材・数学系列)

ISBN 978-7-5622-5260-3

Ⅰ. ①复…　Ⅱ. ①杜…　②尤…　③侯…　Ⅲ. ①复变函数—高等学校—教材　②积分变换—高等学校—教材　Ⅳ. ①O714. 5　②O177. 6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 226334 号

复变函数与积分变换

©杜洪艳 尤正书 侯秀梅　主编

责任编辑：袁正科	责任校对：易　雯	封面设计：新视点
编 辑 室：第二编辑室	电　　话：027－67867362	封面制作：胡　灿
出版发行：华中师范大学出版社		
社　　址：湖北省武汉市珞喻路 152 号	邮　　编：430079	
销售电话：027－67863426/67863280		
邮购电话：027－67861321	传　　真：027－67863291	
网　　址：http://www.ccnupress.com	电子信箱：hscbs@public.wh.hb.cn	
印　　刷：武汉理工大印刷厂	督　　印：章光琼	
开　　本：787 mm×1092 mm　1/16	印　　张：13　字　数：310 千字	
版　　次：2012 年 1 月第 1 版	印　　次：2012 年 1 月第 1 次印刷	
印　　数：1—3000	定　　价：26.00 元	

欢迎上网查询、购书

前　言

Qianyan

复变函数主要描述了复数之间的相互依赖关系，复变函数课程的主要研究对象是解析函数。在某些方面它是实变函数微积分学的推广与发展，因此，无论是在内容上还是在研究问题的方法和逻辑结构上，它们都有着许多相似之处。但复变函数能成为一门独立的课程，是因为它又有着其自身独特的研究对象和处理方法。复变函数理论创立于19世纪，直至今日还在不断地发展着，是一门古老而又富有生命力的学科。作为一种有力的数学工具，复变函数理论在自然学科和其他众多领域都有着广泛的应用，如理论物理、流体力学、空气动力学、电磁学、振动力学、地质学及自动控制学等。

积分变换是通过积分运算，把一个函数变成另一个函数的变换。本书所说的积分变换特指傅里叶变换和拉普拉斯变换，另外，书中我们还介绍了快速傅里叶变换，使读者能够对快速傅里叶变换有一个初步的认识。积分变换与复变函数有着密切的联系，它与复变函数一样，也是在实变函数微积分的基础上发展起来的。它的理论方法主要应用在自然科学和各种工程领域。

本书结合初学者特点，逻辑严密，用语力求简洁、准确。对基本概念、基本理论和基本方法的叙述深入浅出、清晰明了，且重点突出、通俗易懂，并适当地介绍了本学科与其他学科之间的联系，以期能最大限度地培养学生运用所学知识解决实际问题的能力。本书共分九章，建议54学时完成，其中，第1章4学时，第2章6学时，第3章6学时，第4章6学时，第5章6学时，第6章6学时，第7章8学时，第8章8学时，第9章4学时。

本书由杜洪艳(武昌理工学院)、尤正书(湖北大学知行学院)、侯秀梅(武汉生物工程学院)担任主编，刘军(武昌理工学院)、阳彩霞(武汉生物工程学院)、张清平(武汉生物工程学院)任副主编。各参编人员分工为：杜洪艳：第1章、第8章、第9章、附录；尤正书：第5章、第6章；侯秀梅：第4章；刘军：第7章；阳彩霞：第3章；张清平：第2章。全书的合成统稿由杜洪艳完成。

希望本书的出版，能为普通高校理工科学生提供一本比较系统和完整，并且能切合学生实际的“复变函数与积分变换”学习教材，但限于编者水平，书中难免还是会存在一些不足之处，敬请广大读者批评指正。

编者

2011年10月于梅南山

目　录

Mulu

第1章　复数与复平面 …… 1
1.1　复数 …… 1
1.1.1　复数的概念 …… 1
1.1.2　复数的模与辐角 …… 1
1.1.3　复数的三角表示与指数表示 …… 4
1.2　复数的运算及几何意义 …… 4
1.2.1　复数的加法和减法 …… 4
1.2.2　复数的乘法和除法 …… 5
1.2.3　复数的乘方和开方 …… 7
1.2.4　共轭复数的运算性质 …… 9
1.3　平面点集 …… 10
1.3.1　点集的概念 …… 10
1.3.2　区域 …… 11
1.3.3　平面曲线 …… 12
1.3.4　单连通区域与多连通区域 …… 12
1.4　无穷远点与复球面 …… 13
1.4.1　无穷远点 …… 13
1.4.2　复球面 …… 14
本章小结 …… 14
综合练习题1 …… 15
第2章　解析函数 …… 17
2.1　复变函数及其相关概念 …… 17
2.1.1　复变函数的概念 …… 17
2.1.2　复变函数的极限与连续 …… 18
2.2　解析函数及其相关概念 …… 21
2.2.1　复变函数的导数 …… 21
2.2.2　解析函数的概念 …… 22
2.2.3　求导运算的法则 …… 23
2.3　柯西—黎曼条件 …… 24

2.3.1 函数可导的充分必要条件 …… 24

2.3.2 函数在区域内解析的充分必要条件 …… 26

2.4 初等函数 …… 27

2.4.1 指数函数 …… 28

2.4.2 对数函数 …… 29

2.4.3 幂函数 …… 31

2.4.4 三角函数与反三角函数 …… 31

2.4.5 双曲函数与反双曲函数 …… 33

本章小结 …… 34

综合练习题 2 …… 37

第3章 复积分 …… 39

3.1 复变函数的积分 …… 39

3.1.1 复变函数积分的概念 …… 39

3.1.2 复积分的存在性及其计算 …… 40

3.1.3 复积分的基本性质 …… 43

3.2 柯西—古萨定理及其推广 …… 43

3.2.1 柯西—古萨定理 …… 43

3.2.2 柯西—古萨定理的推广 …… 45

3.2.3 原函数与不定积分 …… 47

3.3 柯西积分公式和高阶导数公式 …… 49

3.3.1 柯西积分公式及最大模原理 …… 49

3.3.2 解析函数的高阶导数 …… 51

3.4 解析函数与调和函数的关系 …… 53

3.4.1 调和函数与共轭调和函数的概念 …… 53

3.4.2 解析函数与共轭调和函数的关系 …… 54

本章小结 …… 57

综合练习题 3 …… 59

第4章 级数 …… 61

4.1 复数项级数 …… 61

4.1.1 复数序列的极限 …… 61

4.1.2 复数项级数 …… 61

4.2 幂级数 …… 64

4.2.1 复变函数项级数 …… 64

4.2.2 幂级数 …… 65

4.2.3 幂级数的收敛圆与收敛半径 …… 66

4.2.4 幂级数的性质 …… 68
4.3 泰勒级数 …… 70
4.3.1 解析函数的泰勒展开式 …… 70
4.3.2 几个典型初等函数的泰勒展开式 …… 71
4.4 洛朗级数 …… 73
4.4.1 函数在圆环形解析域内的洛朗展开式 …… 73
4.4.2 函数展开成洛朗级数的间接展开法 …… 77
本章小结 …… 80
综合练习题 4 …… 82
第5章 留数及其应用 …… 84
5.1 孤立奇点和零点 …… 84
5.1.1 孤立奇点的定义及性质 …… 84
5.1.2 零点 …… 87
5.1.3 无穷远点为孤点奇点 …… 90
5.2 留数 …… 91
5.2.1 留数及其相关概念 …… 91
5.2.2 无穷远点的留数 …… 94
5.3 留数定理 …… 95
5.4 留数在定积分计算中的应用 …… 98
5.4.1 形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\mathrm{d}\theta$ 的积分 …… 98
5.4.2 形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x$ 的积分 …… 100
5.4.3 形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}\mathrm{d}x \quad (a>0)$ 的积分 …… 102
本章小结 …… 103
综合练习题 5 …… 105
第6章 保形映射 …… 107
6.1 保形映射的概念及其性质 …… 107
6.1.1 保形映射的概念 …… 107
6.1.2 几何特性 …… 109
6.1.3 几个重要的保形映射 …… 112
6.2 分式线性映射 …… 113
6.2.1 分式线性映射的定义 …… 113
6.2.2 分式线性映射的特性 …… 116
6.2.3 上半平面与单位圆的分式线性映射 …… 119
本章小结 …… 122

综合练习题 6 …… 123
第7章 傅里叶变换 …… 125
7.1 傅里叶变换的概念 …… 125
7.1.1 傅里叶级数与傅里叶积分公式 …… 125
7.1.2 傅里叶变换 …… 128
7.2 单位脉冲函数 …… 131
7.2.1 单位脉冲函数的概念及其性质 …… 131
7.2.2 单位脉冲函数的傅里叶变换 …… 132
7.3 傅里叶变换的性质 …… 133
7.3.1 基本性质 …… 134
7.3.2 卷积与卷积定理 …… 136
本章小结 …… 139
综合练习题 7 …… 141
第8章 拉普拉斯变换 …… 142
8.1 拉普拉斯变换的概念 …… 142
8.1.1 拉普拉斯变换的定义 …… 142
8.1.2 拉普拉斯变换存在定理 …… 144
8.2 拉普拉斯变换的性质 …… 145
8.2.1 线性与相似性 …… 145
8.2.2 延迟与位移性质 …… 146
8.2.3 微分性质 …… 148
8.2.4 积分性质 …… 150
8.2.5 初值定理和终值定理 …… 151
8.2.6 卷积与卷积定理 …… 153
8.3 拉普拉斯逆变换 …… 154
8.3.1 反演积分公式 …… 154
8.3.2 利用留数计算像原函数 …… 155
8.4 拉普拉斯变换的应用 …… 157
8.4.1 求解常微分方程 …… 157
8.4.2 实际应用举例 …… 158
本章小结 …… 160
综合练习题 8 …… 161
第9章 快速傅里叶变换 …… 163
9.1 序列傅里叶(SFT)变换 …… 163
9.1.1 序列傅里叶变换(SFT)及其逆变换(ISFT)的定义 …… 163

9.1.2 序列傅里叶变换(SFT)的性质 …… 164
9.1.3 序列傅里叶变换(SFT)的 Matlab 实现 …… 165
9.2 Z 变换简介 …… 165
9.2.1 Z 变换的定义 …… 165
9.2.2 单边 Z 变换 …… 166
9.2.3 Z 变换及其反变换的计算 …… 167
9.3 离散傅里叶(DFT)变换 …… 167
9.3.1 有限序列的离散傅里叶变换 …… 167
9.3.2 离散傅里叶变换(DFT)与序列傅里叶变换(SFT)的关系 …… 168
9.3.3 DFT 与 Z 变换的关系 …… 169
9.4 快速傅里叶变换 …… 170
9.4.1 时分算法 …… 170
9.4.2 频分算法 …… 174
9.4.3 Matlab 的实现 …… 177
本章小结 …… 178
综合练习题 9 …… 178
习题参考答案 …… 180
附 录 …… 184
附录 1 区域变换表 …… 184
附录 2 傅里叶变换简表 …… 189
附录 3 拉普拉斯变换简表 …… 192
附录 4 Z 变换表 …… 197
参考文献 …… 198

第 1 章

复数与复平面

Zhang 1

复数是复变函数的基础. 本章主要介绍复数的概念、性质、运算及复平面点集和扩充复平面，为后面的复变函数研究作准备.

本章预习提示：复数、向量的定义及平面点集的基本概念.

1.1 复数

1.1.1 复数的概念

我们将形如

$$a+\mathrm{i}b$$

或

$$a+b\mathrm{i}$$

的数称为**复数**，其中 a 和 b 为任意实数，i 称为**虚数单位**且满足于

$$\mathrm{i}^2=-1$$

或

$$\mathrm{i}=\sqrt{-1}.$$

全体复数所构成的集合称为复数集，用 $\mathbf{C}$ 表示.

对于复数 $z=a+\mathrm{i}b$，实数 a 和 b 分别称为复数 z 的**实部**和**虚部**记作

$$\mathrm{Re}z=a,\mathrm{Im}z=b.$$

当虚部 $b=0$ 时，$z=a$ 就是一个实数；当虚部 $b\neq 0$ 时，z 称为**虚数**；当实部 $a=0$ 且虚部 $b\neq 0$ 时，$z=\mathrm{i}b$ 称为**纯虚数**，特别地，当 $a=b=0$ 时，z 就是实数 0.

显然，实数集 $\mathbf{R}$ 是复数集 $\mathbf{C}$ 的真子集，复数是实数的推广.

当且仅当两个复数的实部和虚部分别都相等时，我们才称这两个复数相等. 一般情况下，两个复数不能比较大小，而只能说相等或不相等.

设 $z=a+\mathrm{i}b$ 是一个复数，则称 $a-\mathrm{i}b$ 为 z 的**共轭复数**，记作 $\bar{z}$. 显然，$\overline{(\bar{z})}=z$.

1.1.2 复数的模与辐角

1. 复平面

由复数的概念可知：一个复数 $z=a+\mathrm{i}b$ 可唯一地对应一个有序实数对(a,b)，而有序实数对与坐标平面上的点是一一对应的. 于是复数 z 就与坐标平面上的点一一对应. 由此，可

建立复数集与平面直角坐标系中的点集之间的一一对应,如图 1-1 所示.

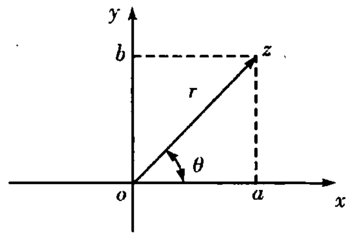

图 1-1

点 z 的横坐标为 a,纵坐标为 b,复数 $z=a+ib$ 可用点 $z(a,b)$ 表示,这个建立了用直角坐标系表示复数的平面称为**复平面**,在复平面中 x 轴称为**实轴**,y 轴称为**虚轴**. 显然,实轴上的点表示实数;除原点外,虚轴上的点表示纯虚数. 为了方便起见,今后我们将不再区分复数与复平面上的点,即我们说,点 $z(a,b)$ 与复数 $z=a+ib$ 表示同一意义. 在这种点、数等同的观点下,一个复数集合就是一个平面点集,我们可用平面点集来研究复数.

2. 复数的模与辐角

我们知道,平面点集与该平面上以原点为起点的平面向量集是一一对应的. 这样,复数与平面上的向量也建立了一一对应关系(见图 1-1),复数 $z=a+ib$ 可以用向量$\overrightarrow{oz}$ 来表示,a,b 分别是向量$\overrightarrow{oz}$ 在实轴和虚轴上的投影.

我们把复数 z 所对应向量$\overrightarrow{oz}$ 的长度称为**复数 z 的模**,记为 $|z|$ 或 r,因此,有

$$|z|=r=\sqrt{a^2+b^2}\geqslant 0.$$

显然

$$|a|\leqslant|z|\leqslant|a|+|b|,$$
$$|b|\leqslant|z|\leqslant|a|+|b|.$$

即

$$|\mathrm{Re}z|\leqslant|z|\leqslant|\mathrm{Re}z|+|\mathrm{Im}z|,$$
$$|\mathrm{Im}z|\leqslant|z|\leqslant|\mathrm{Re}z|+|\mathrm{Im}z|.$$

当 $z\neq 0$ 时(即点 z 不是原点时),向量$\overrightarrow{oz}$ 与 x 轴正向的夹角 θ 称为复数 z 的**辐角**,记为

$$\mathrm{Arg}z=\theta.$$

显然有

$$\begin{cases} a=|z|\ \cos\theta, b=|z|\ \sin\theta; \\ \tan\theta=\dfrac{b}{a}. \end{cases}$$

若 θ_1 为复数 z 的一个辐角,则 $\theta_1+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 也是复数 z 的辐角. 因此,任何一个非零复数 z 都有无穷多个辐角,它们之间相差 2π 的整数倍,记为

$$\mathrm{Arg}\ z=\theta_1+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z},$$

其中,满足 $-\pi<\theta\leqslant\pi$ 的辐角是唯一的,称其为 Arg$z$ **的主值**,记作 $\arg z=\theta$,因此有

$$\begin{cases} -\pi<\arg z\leqslant\pi; \\ \mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi, k\in\mathbf{Z}. \end{cases}$$

注意　当 $z=0$ 时，辐角无意义.

辐角主值 $\arg z(z\neq 0)$ 与反正切 $\operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$ 有如下关系，如图 1-2 所示：

$$\arg z=-\arg\bar{z}=\begin{cases}\arctan\dfrac{b}{a}, & a>0;\\ \dfrac{\pi}{2}, & a=0,b>0;\\ \arctan\dfrac{b}{a}+\pi, & a<0,b\geqslant 0;\\ \arctan\dfrac{b}{a}-\pi, & a<0,b<0;\\ -\dfrac{\pi}{2}, & a=0,b<0.\end{cases}\tag{1.1}$$

其中，$z\neq 0$，$-\dfrac{\pi}{2}<\operatorname{argtan}\dfrac{b}{a}<\dfrac{\pi}{2}$.

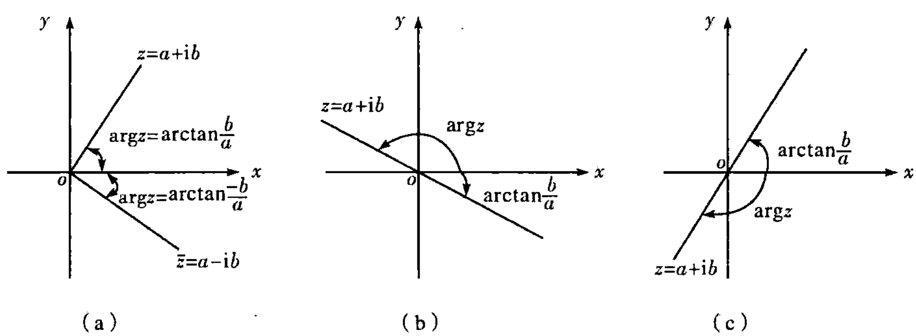

图 1-2

显然，$|\bar{z}|=|z|$，$\arg\bar{z}=-\arg z$.

例 1　试求复数 $3-4i$ 与 $-2+2i$ 的模和辐角.

解　$|3-4i|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$，

$$\begin{aligned}\operatorname{Arg}(3-4i)&=\arg(3-4i)+2k\pi\\&=\arctan\frac{-4}{3}+2k\pi\\&=-\arctan\frac{4}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}.\end{aligned}$$

$|-2+2i|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，

$$\begin{aligned}\operatorname{Arg}(-2+2i)&=\arg(-2+2i)+2k\pi\\&=\arctan\frac{2}{-2}+\pi+2k\pi\\&=-\frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi,k\in\mathbf{Z}.\end{aligned}$$

1.1.3 复数的三角表示与指数表示

考虑复平面 C 上不为零的点 $z=x+\mathrm{i}y$，利用直角坐标与极坐标之间的变换关系，这个点有极坐标：$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$. 所以复数 z 还可以用模 $r=|z|$ 和辐角 $\theta=\operatorname{Arg} z$ 来表示，即

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),$$

上式称为**复数 z 的三角表示式**. 再应用**欧拉公式** $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，由三角表示式可以得到

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

上式称为**复数 z 的指数表示式.**

在理论研究和实际应用中，可根据不同的需要采用不同的复数表示式.

例 2 试将复数$\sqrt{3}+\mathrm{i}$ 表示成三角形式和指数形式.

解 $r=\sqrt{3+1}=2$，$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$.

因为与$\sqrt{3}+\mathrm{i}$ 对应的点在第一象限，所以

$$\arg(\sqrt{3}+\mathrm{i})=\frac{\pi}{6}.$$

于是

$$\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right),$$

所以可得指数表示式

$$\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}.$$

1.2 复数的运算及几何意义

1.2.1 复数的加法和减法

设复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1, z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，则**复数的加法**定义如下：

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2), \tag{1.2}$$

复数的减法是加法的逆运算. 如果存在复数 z 使 $z_1=z_2+z$，则 $z=z_1-z_2$. 因此，

$$z_1-z_2=(x_1-x_2)+\mathrm{i}(y_1-y_2). \tag{1.3}$$

若复数 z_1、z_2 分别用对应的向量$\overrightarrow{oz_1}$、$\overrightarrow{oz_2}$ 表示，则复数的加减法与向量的加减法一致，于是在平面上以$\overrightarrow{oz_1}$、$\overrightarrow{oz_2}$ 为边的平行四边形的对角线$\overrightarrow{oz}$ 就表示复数z_1+z_2，如图 1-3 所示，对角线$\overrightarrow{z_2z_1}$ 就表示复数 z_1-z_2. 若将向量$\overrightarrow{z_2z_1}$ 平移至向量$\overrightarrow{oz_3}$，则向量$\overrightarrow{oz_3}$ 就表示复数 z_1-z_2（见图 1-3）.

由复数的几何意义可知，显然有下列两个不等式成立：

$$|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|, \tag{1.4}$$
$$|z_1-z_2| \geqslant |z_1|-|z_2|, \tag{1.5}$$

其中，$|z_1-z_2|$ 表示向量$\overrightarrow{z_1z_2}$ 的长，也就是复平面上点 z_1,z_2 之间的距离.

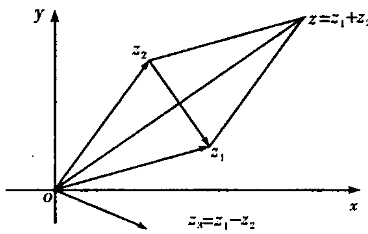

图 1-3

1.2.2 复数的乘法和除法

复数的乘法定义如下

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2) \\ &= (x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1). \end{aligned} \tag{1.6}$$

由乘法定义，可验证

$$\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}=(0+1\cdot\mathrm{i})(0+1\cdot\mathrm{i})=-1.$$

复数的除法是乘法的逆运算. 当 $z_2\neq 0$ 时，$z=\dfrac{z_1}{z_2}$ 就表示 $z_1=z\cdot z_2$，其计算方法如下：

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1\cdot\overline{z_2}}{z_2\cdot\overline{z_2}} = \frac{(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)}{x_2^2+y_2^2} \\ &= \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

例如，

$$\begin{aligned} \frac{2-3\mathrm{i}}{3+2\mathrm{i}} &= \frac{(2-3\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})}{(3+2\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})} \\ &= \frac{(6-6)+\mathrm{i}(-9-4)}{3^2+2^2} \\ &= -\mathrm{i}. \end{aligned}$$

同实数的四则运算一样，复数的加法与乘法均满足交换律与结合律，并满足乘法对加法的分配律，相关证明请读者作为练习自行完成.

现在，我们利用复数的三角表示式来讨论复数的乘法与除法.

设
$$z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1),$$
$$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2),$$

则由复数的乘法得

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2) \\ &= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+\mathrm{i}(\cos\theta_1\sin\theta_2+\sin\theta_1\cos\theta_2)] \\ &= r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]. \end{aligned}$$

于是得

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|, \tag{1.8}$$

$$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2, \tag{1.9}$$

由(1.8)式及(1.9)式可知：

两个复数乘积的模等于它们模的乘积，两个复数乘积的辐角等于它们辐角的和.

值得注意的是，由于辐角的多值性，(1.9)式应理解为对于左端 $\mathrm{Arg}(z_1z_2)$ 的任一值，必有右端 $\mathrm{Arg}z_1$ 与 $\mathrm{Arg}z_2$ 的各一值相加得出的和与之对应，反之亦然.

复数乘法的几何意义是：乘积 $z_1\cdot z_2$ 所表示的向量可以从 z_1 所表示的向量沿逆时针方向旋转一个角度 $\mathrm{Arg}z_2$，并伸长 $|z_2|$ 倍获得，如图 1-4(a) 所示.

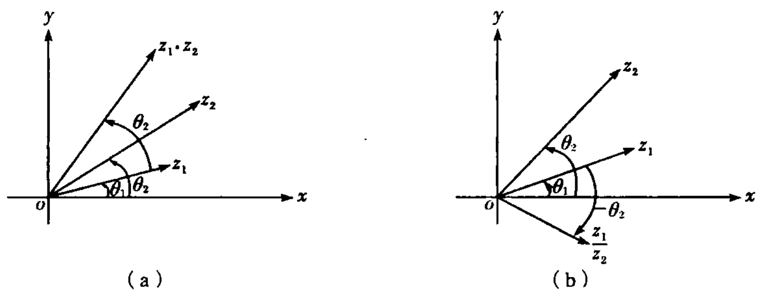

图 1-4

复数除法是乘法的逆运算，故当 $z_2\neq 0$ 时，有

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)], \tag{1.10}$$

或者写成

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},\mathrm{Arg}\frac{z_1}{z_2}=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2. \tag{1.11}$$

因此，除法也有其几何意义(如图 1-4(b) 所示)，即

两个复数商的模等于它们模的商，两个复数商的辐角等于分子与分母辐角的差.

若利用复数的指数表示式 $z_1=r_1e^{i\theta_1},z_2=r_2e^{i\theta_2}$，则有

$$z_1\cdot z_2=r_1e^{i\theta_1}\cdot r_2e^{i\theta_2}=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}, \tag{1.12}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)},\quad r_2\neq 0. \tag{1.13}$$

例 1 用三角表示计算 $(\sqrt{3}-\mathrm{i})(1+\sqrt{3}\mathrm{i})$.

解 因为

$$\sqrt{3}-\mathrm{i}=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right],$$

$$1+\sqrt{3}\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right),$$

所以

$$(\sqrt{3}-\mathrm{i})(1+\sqrt{3}\mathrm{i})=4\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{3}+2\mathrm{i}.$$

例 2　用指数表示式计算$\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}$.

解　因为

$$1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}},$$

$$\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}},$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}&=\sqrt{2}\,\frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}}{2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}},\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{12}\mathrm{i}}.\end{aligned}$$

1.2.3　复数的乘方和开方

运用数学归纳法，可得到几个复数 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 相乘的公式：

$$\begin{aligned}z_1\cdot z_2\cdot\cdots\cdot z_n&=r_1r_2\cdots r_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)]\\&=r_1r_2\cdots r_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)}.\end{aligned}$$

其中，$z_k=r_k(\cos\theta_k+\mathrm{i}\sin\theta_k)=r_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k},\ k\in\mathbf{Z}^+$.

特别地，当 $z_1=z_2=\cdots=z_n=z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 时，就得到**复数 z 的 n 次幂**：

$$z^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta),n\in\mathbf{Z}^+.\tag{1.14}$$

若令 $|z|=r=1$，即 $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，则得著名的**棣莫佛**(De Moivre) **公式**：

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta.\tag{1.15}$$

当 $n=3$ 时，即以 3 倍角为例，有

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^3=\cos3\theta+\mathrm{i}\sin3\theta,$$

将等式左边展开得到

$$\begin{aligned}&\cos^3\theta+3\mathrm{i}\cos^2\theta\sin\theta-3\cos\theta\sin^2\theta-\mathrm{i}\sin^3\theta\\&=(\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta)+\mathrm{i}(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta).\end{aligned}$$

分别比较等式两边的实部与虚部得到

$$\cos3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta,$$

$$\sin3\theta=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta.$$

显然，用这种方法得到 3 倍角公式比中学的三角方法更简便.

设存在复数 w 和 z，若 $w^n=z$(n 为正整数)，则称**复数 w 为 z 的 n 次方根**，记为

$$w=\sqrt[n]{z}.$$

如果 $z=0$，显然有 $w=0$. 为此，我们假定 $z\neq0$.

现令

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),\quad w=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi),$$

则有

$$[\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)]^n=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),$$

即

$$\rho^n(\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi)=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta).$$

于是有

$$\begin{cases}\rho^n=r;\\ n\varphi=\theta+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.\end{cases}$$

从而解得

$$\begin{cases}\rho=\sqrt[n]{r};\\ \varphi=\dfrac{1}{n}(\theta+2k\pi),\ k\in\mathbf{Z}.\end{cases}$$

故得

$$w=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\tag{1.16}$$

其中,$k=0,\pm1,\pm2,\cdots,r^{\frac{1}{n}}$ 为 r 的算术根.

由于 $\cos\varphi$ 和 $\sin\varphi$ 都是以 2π 为周期的周期函数,故当 $k=0,1,\cdots,n-1$ 时,可得到 φ 的 n 个值,其中任意两个相差不是 2π 的整数倍,w 实际上有 n 个不同的值,当 k 取其他整数时,w 的这些值又重复出现. 为确定起见,我们可写成

$$w=|z|^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\arg z+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\arg z+2k\pi}{n}\right),$$

其中,$k=0,1,\cdots,n-1$. (1.17)

由于复数$\sqrt[n]{z}$的n个不同的值都具有相同的模$\sqrt[n]{|z|}$,且对应相邻两个k值的方根的辐角均相差$\frac{2\pi}{n}$,所以在复平面上这 n 个点形成一个以原点为中心的正n边形的顶点. 它们同原点的距离是 $|z|^{\frac{1}{n}}$,其中一个点的辐角是$\frac{1}{n}\mathrm{Arg}z$,如图 1-5 所示.

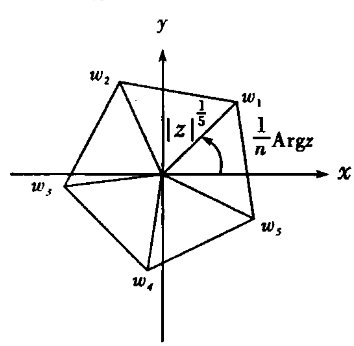

图 1-5

特别地,当 $z=1$ 时,若令 $w=\cos\frac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}$,则 1 的 n 次方根为 $1,w,w^2,\cdots,w^{n-1}$.