21世纪
普通高等教育规划教材

大学物理实验

赵大田　宗　波　主编

化学工业出版社

21世纪普通高等教育规划教材

大学物理实验

赵大田　宗　波　主编

化学工业出版社

·北京·

全书分为八章，第一章为测量误差及实验数据处理，第二章为物理实验的基本方法，第三章为常用实验仪器介绍，第四至八章分别为力学、热学、电磁学、光学及近代物理实验，共37个实验。为了适应工科专业学生的要求，在书中介绍了一些重要的实验仪器，方便学生日后的专业实验课学习。

本书可作为普通高等院校理工科专业学生的大学物理实验教材，也可供相关专业人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

大学物理实验/赵大田，宗波主编．—北京：化学工业出版社，2012.7

21世纪普通高等教育规划教材

ISBN 978-7-122-14603-8

Ⅰ．大…　Ⅱ．①赵…②宗…　Ⅲ．物理学-实验-高等学校-教材　Ⅳ．04-33

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第131657号

责任编辑：袁俊红　　　　装帧设计：关　飞

责任校对：顾淑云

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街13号　邮政编码100011）

印　　装：三河市延风印装厂

787mm×1092mm　1/16　印张12½　字数322千字　　2012年9月北京第1版第1次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899

网　　址：http://www.cip.com.cn

凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：25.00元

前　　言

大学物理实验是一门独立的基础课程。本书依照“高等工科院校大学物理实验课程教学基本要求”的规定，在总结近年来我校物理实验教学经验的基础上结合教学改革的成果编写而成。

物理实验是物理学的基础，也是所有理工科的专业实验课程的基础课程。它在培养学生严谨细致的工作作风、实事求是的科学态度和实践动手能力等方面发挥着重要的作用。本书主要是针对工科专业学生的需要设置实验内容，一个重要目标是为学生日后的专业实验课学习打下坚实的基础。

全书分为八章，第一章为测量误差及实验数据处理，第二章为物理实验的基本方法，第三章为常用实验仪器介绍，第四至八章分别为力学、热学、电磁学、光学及近代物理实验，共37个实验，内容选取范围较广，且每个实验均有很详细的讲解，教师在使用本书时可以根据各专业的实际情况，对教学内容进行取舍。为了适应工科专业学生的要求，我们在第三章中介绍了一些较重要的实验仪器，方便学生日后的专业实验课学习。

本书由赵大田、宗波担任主编，曹青松担任副主编，此外参加编写的还有刘家骏、谭沈阳、王晓春、王娅。

由于水平和条件有限，书中难免有不妥之处，恳请各位专家批评指正。

编者

2012年5月

目　录

绪　　论

一、物理实验课程的作用

物理学是一切自然科学的基础。作为一门实验科学，物理实验对物理学理论体系的建立和发展起着非常重要的作用。

大学物理实验是高等教育中一门独立的基础课程，是所有理工科学生的必修课程。通过物理实验课程的学习，既能提高对物理规律的认识，又能掌握认识事物规律的各种方法、手段与技术。所以，物理实验课程在锻炼学生能力、培养素质方面起到其他实践课程不能取代的作用。

大学物理实验课是理工科大学生的第一门实验课，学生们从中学到的关于实验的基本理论、规则和技能将对以后的专业实验课起到重要的作用：

① 巩固和拓展学生的物理知识；

② 培养学生的实验动手能力，包括如何正确使用实验仪器、记录和处理实验数据、撰写实验报告以及独立完成设计性实验的能力；

③ 培养学生的科学实验修养，包括理论联系实际、实事求是的科学作风，严肃认真的实验态度，开拓创新的探索精神以及遵守纪律、爱护公物的社会道德。

二、物理实验课程的主要环节

（1）课前预习。在上课做实验之前，要先认真阅读实验教材，并写出预习报告。其内容包括实验名称、实验目的、实验仪器、实验原理、操作步骤以及自己学习后的一些疑问。要按自己的理解，用自己的语言来写，切忌大段抄书。课前预习是实验课能否成功的关键，也是对自己学习能力的极好培养。

（2）课堂学习。在动手实验前，老师会讲解该实验的内容，此时要注意听讲，并且将自己预习的内容和老师讲的内容相互对照，尤其是实验中的注意事项，会让你在实验中少走很多弯路，避免很多错误。

实验开始前，首先要熟悉一下将要使用的仪器设备和测量工具的性能和操作规范，避免错误的操作。其次，要对观察到的现象和测量的数据及时进行分析，判断实验过程是否合理，而不能以为一切顺利就好。要实事求是地记录实验数据，不能认为实验数据与理论值越接近越好。

实验后，要先将实验数据交给老师检查，老师认可并签字后，将仪器整理复原，方可离开。

（3）数据处理。课后要对实验数据进行处理，并完成实验报告。首先对数据进行运算处理，并按照误差理论求出不确定度，对实验中的一些反常现象和误差，要分析其产生的主要原因。然后撰写实验报告，实验报告是实验的一个重要组成部分，既是对整个实验过程的总结，也是对学生的文字表达、分析判断、归纳综合能力的培养，为理工科学生日后的专业实验课打下一个良好的基础。

三、物理实验学生守则

为了保证基础物理实验教学的正常进行，培养同学严肃认真、实事求是的科学态度，培养善于思考、勤于动手的学习作风，进行物理实验需遵循以下规则。

① 实验前要充分做好预习准备工作，必须按要求写好预习报告，上次实验的报告应在下次实验前交给指导教师。

② 实验中，应严格遵守课堂纪律和实验规程，正确操作、认真观察。要保持室内安静、整洁，严禁喧哗、嬉闹，禁止吸烟，禁止乱涂乱画，禁止随地吐痰，保证有良好的实验环境，发现问题应及时报告，凡违反操作规程或不听从老师指导而酿成事故者，应按学校有关规定进行处理。

③ 对实验中使用的仪器设备及实验结果，要实事求是的分析，反对掩盖矛盾或弄虚作假的学风。原始数据应经老师审阅签字，再整理仪器恢复原状，方可离开实验室。提交实验报告时，实验中测量的原始数据需附上。

④ 要自觉爱护仪器设备，实验中要注意技术安全，未经教师许可不要擅自接通仪器电源等，光学仪器的玻璃加工面不要用手去触摸，不允许擅自擦拭，各组仪器不得擅自调换。

⑤ 因故不能准时到课的学生，必须在课前向老师请假，经准许后方可安排补做实验，否则按旷课处理，缺交实验报告者，不准参加实验考试，实验成绩按不及格处理。

第一章　测量误差及实验数据处理

在科学实验和观测中，由于各种因素，测量结果总存在着误差。因此，进行误差分析是实验的一个重要组成部分。其主要有两方面的作用：一是通过分析误差产生的原因找出其规律，采取合理的方法减少或消除误差的影响，并对测量结果做出合理的评价；二是优化实验设计，根据实验结果的误差要求，选择测量方法和仪器，获得合理的实验结果。因此，进行数据处理和误差分析是物理实验中必不可少的工作。

本章主要介绍误差分析、估算和实验数据处理的常用方法。

第一节　测量与误差

对某些物理量的大小进行测定，实验上就是将此物理量与规定的作为标准单位的同类量或可借以导出的异类物理量进行比较，并得出结论，这个比较的过程就叫做测量。比较的结果记录下来就叫做实验数据。测量得到的实验数据应包含测量值的大小和单位，二者是缺一不可的。

一个被测物理量，除了用数值和单位来表征它外，还有一个很重要的表征参数，这便是对测量结果可靠性的定量估计。这个重要参数却往往容易为人们所忽视。设想如果得到的测量结果的可靠性几乎为零，那么这种测量结果还有什么价值呢？因此，从表征被测量这个意义上来说，对测量结果可靠性的定量估计与其数值和单位至少具有同等的重要意义，缺一不可。

一、测量

测量是人类认识自然改造自然必不可少的手段。物理实验是以测量为基础的。所谓测量，就是用一定的测量工具或仪器，通过一定的方法，直接或间接地得到所需要的量值。例如要知道某一物体的长度，可借用长度测量工具（米尺、游标卡尺等）直接对物体测量。如果要知道一个球体的密度，根据公式：

$$\rho=\frac{m}{V}=\frac{6m}{\pi D^3} \tag{1-1-1}$$

可借用长度测量工具测量物体的直径 D，借用天平称衡物体的质量 m，然后通过公式(1-1-1)，可间接得到所需要的量值 ρ。依照测量方法的不同，可将测量法分两大类。

（1）直接测量。直接测量是将待测量物与预先标定好的仪器、量具进行比较，直接从仪器或量具上读出量值大小的测量。例如，用长度测量工具测长度、宽度、高度、半径、直径等，用电表测量电压、电流，用秒表或数字毫秒计、电子钟等测量时间，用天平测量质量等。

（2）间接测量。间接测量是指需先由直接测量获得的数据，利用已知的函数关系经过运算才能得到待测量物的相关数值。例如某一长方形面积 $S=ab$，那么，面积 S 是间接测量量值，长度 a 和宽度 b 是直接测量量值。

二、误差

（1）误差的定义。测量的误差等于测量结果减去被测量的真值，即

测量误差＝测量值－真值

用数学方程可表示为

$$\Delta N = N - N_0 \tag{1-1-2}$$

式(1-1-2) 中所定义的误差反映的是测量值偏离真实值的大小和方向。N_0 表示真值，对任何一个物理量，在一定条件下都具有一定的大小，这是客观存在的，但实际上真值是一个理想的概念，因为在实际测量中，一切测量结果都不可避免地含有误差。同一个物理量，即使同一个人，用同一台仪器，在相同的条件下进行多次测量，各次测量结果一般也不完全相同，更不等于测量的真值，因此测量与误差是形影不离的。

(2) 误差来源。

① 仪器误差。指在测量时由于所使用的测量仪器仪表不准确引起的误差，误差大小根据仪器本身的灵敏度来确定，任何仪器都存在误差。比如，我们用毫米尺测量一本书的长度，但毫米尺的刻度本身就不准确，由此给测量结果带来的误差就叫做仪器误差。

② 环境误差。由于测量仪器偏离了仪器本身规定的使用环境或者测量条件，例如气流扰动，温度的微小起伏，电流、电压、频率、外界电磁场等因素的影响，都会使测量产生误差。

③ 测量方法误差。这种测量误差是由于测量方法不完善及所依据的理论不严密而产生。凡是在测量结果的表达式中没有得到反映，而在实际测量中又起作用的一些因素所引起的误差被称为测量方法误差。例如高灵敏度测量仪器规定在洁净室使用却在一般实验室使用，使用的电源设备有绝缘漏电，测量激光脉冲宽度未使用静电屏蔽而用寄生电势，引起与接触电阻的压降等，都会产生方法（或理论）误差。再比如用伏安法测电阻，电表的内电阻也会引起方法误差。

④ 人员误差。这是由于实验者的主观因素和操作技术引起的。分辨能力、感觉器官灵敏度的不完善，操作不熟练，估计读数始终偏大或偏小等，可能会造成误判而产生人员误差。比如，实验者在读量筒时总是俯视刻度，就会引起测量结果偏大，从而造成人员误差。

三、误差的分类

根据误差产生的原因以及误差的性质和来源，对误差进行分类，大致可以分三类，即系统误差，随机误差，粗大误差，下面分别介绍。

(1) 系统误差。系统误差是指在同一测量条件下的多次测量过程中，保持恒定或以可预知方式变化的测量误差的分量。系统误差及其产生的原因可能已知，也可能未知。系统误差包括已定系统误差和未定系统误差。已定系统误差是指符号和绝对值已经确定的系统误差，一般在实验中通过修正测量数据和采用适当的测量方法（如交换法、补偿法、替换法等）予以消除；未定系统误差是指符号或绝对值未经确定的系统误差，实验中常用估计误差极限的方法得出。

系统误差的特征是其确定性（恒定或以可预知的方式变化）。由于系统误差在测量条件不变时有确定的大小和正负号，因此在同一测量条件下多次测量求平均并不能减少或消除它。对于系统误差，必须找出其产生的原因，针对原因去消除或引入修正值对测量结果进行修正，系统误差的处理是一个比较复杂的问题，没有一个简单的公式可以遵循，需要根据具体情况作出具体的处理。首先要对误差进行判别，然后要将误差尽可能地减少到可以忽略的程度。这需要实验者具有相应的经验、知识与技巧。一般可以从以下几个方面进行处理：

① 检验、判别系统误差的存在；

② 分析造成误差的原因，并在测量前尽可能消除；

③ 测量过程中采取一定方法或技术措施，尽可能消除或减少系统误差的影响；

④ 估计残有系统误差的数值范围，对于已定系统误差，可用修正值（包括修正公式后修正曲线）进行修正，对于未定系统误差，尽可能估计出其误差限值，以掌握它对测量结果的影响。

我们将在后面的某些实验中，针对具体情况对系统误差进行分析和讨论。

（2）随机误差。随机误差是指在同一测量的多次测量过程中，以不可预知方式变化的测量误差的分量。随机误差是由实验中许多难以确定的因素（如温度、湿度、空气流动、震动等）引起的。根据随机误差的特点可以知道，随机误差不可能修正。随机误差就个体而言是不确定的，但其总体（大量个体的总和）服从一定的统计规律，因此可以用统计方法估计其对测量结果的影响。

随机误差的特征是其随机性。随机误差的主要来源有测量仪器、环境条件和测量人员。这些因素对测量会产生微小的影响，而这些影响往往是随机变化的。

大量的随机误差服从正态分布，其分布曲线如图 1-1 所示。在图中，纵坐标 P 表示随机误差出现的概率密度，横坐标 δ 表示随机误差，这条连续对称的曲线称为随机误差的正态分布曲线，或称高斯曲线，其方程式为：

$$p(\delta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}\right)} \tag{1-1-3}$$

式中 σ 为标准偏差。为了更好理解图 1-1-1 中的正态分布曲线，从而更好地研究随机误差的分布特性，可以做这样的一个实验。在同一测量条件下，用一级千分尺测量某一工件的内径，重复测量 k 次，获得测量值为 R_1，R_2，…，R_k（测量次数 k 足够大），并设被测量的真值为 R_0，那么可得到相应各次测量值的随机误差为 $\delta_1=R_1-R_0$，$\delta_2=R_2-R_0$，…，$\delta_k=R_k-R_0$。

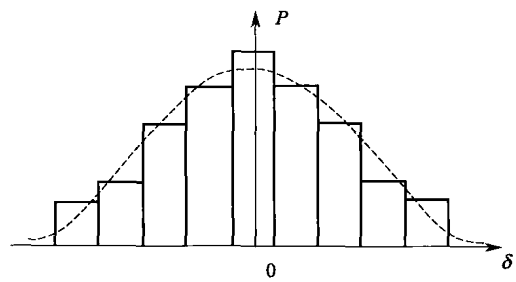

图 1-1-1　正态分布曲线

若将上述得到的随机误差（δ_1，δ_2，…，δ_k）按它们的大小和符号进行整理后，并将落入某一误差区域（$\delta_i\sim\delta_{i+1}$）的次数用长方形面积表示的曲线表示，该随机误差曲线服从正态分布，并具有以下属性。

① 单峰性，绝对值小的随机误差出现的概率比绝对值大的随机误差出现的概率大。

② 对称性，随机误差绝对值相等的正负误差出现的概率相同。

③ 有界性，在一定测量条件下，误差的绝对值不超过一定限度。若随机误差的绝对值超过某一定值后，出现的概率为零，这一定值称为极限误差。

随着测量次数的增加，随机误差的算术平均值趋向于零。一般说来，适当增加测量次数求平均可以减少随机误差。

（3）粗大误差。粗大误差又称粗差、疏失误差等，是明显超出规定条件下预期的误差。引起粗大误差的原因有：错误读取示值；使用有缺陷的计量器具；计量器具使用不正确或较强的环境干扰；测量者的疏忽大意等。

在测量中，粗大误差属于失控或人为的错误，应该尽量避免。在处理测量数据时，应首先检出含有粗大误差的测量值——异常值，并将它剔除。

四、测量结果表示

为了评价一个测量结果的优劣，常用绝对误差和相对误差表示。绝对误差反映了误差本身的大小，而相对误差反映了误差的严重程度。

（1）绝对误差。

$$绝对误差=测量值-真值$$

或
$$\Delta N=N-N_0$$

测量结果
$$N=N_0\pm\Delta N \tag{1-1-4}$$

（2）相对误差。

$$相对误差=\frac{|绝对误差|}{真值}$$

即
$$E=\frac{|\Delta N|}{N_0}\times 100\% \tag{1-1-5}$$

必须注意，绝对误差大的，相对误差不一定大。例如：

$$L_1=25.00\text{mm} \qquad \Delta L_1=0.05\text{mm}$$
$$L_2=2.50\text{mm} \qquad \Delta L_2=0.01\text{mm}$$
$$L_3=2.5\text{mm} \qquad \Delta L_3=0.1\text{mm}$$

根据式(1-1-5)可得

$$E_1=0.2\%,\ E_2=0.4\%,\ E_3=4\%$$

从上述数据可知：$\Delta L_3>\Delta L_1>\Delta L_2$，而 $E_3>E_2>E_1$，可见绝对误差的大小与相对误差的大小之间没有必然的联系。

第二节　测量结果误差估算及评定方法

测量与误差不可分离，但如何准确估算及评定测量结果，对测量值作出科学的评价，就是误差理论要解决的一个重要问题。对测量结果评定一般有三种方法，即算术平均偏差、标准偏差（均方根偏差）和不确定度。

一、算术平均偏差和标准偏差

为了减少测量误差，应用最佳值代替真值。统计理论指出，多次测量算术平均值 $\overline{N}$ 是最佳值或称近似值。因此，在可能情况下，总是采用多次测量的算术平均值 $\overline{N}$ 作为测量结果，它是真值的最好近似。那么算术平均值 $\overline{N}$ 代替真值 N_0 可靠性如何，要对它进行估算和评定（这里约定系统误差和粗大误差已消除或修正，只剩下随机误差）。

1. 算术平均偏差

如对某一物理量测量 K 次，求得算术平均值 $\overline{N}$，则算术平均偏差用 $\overline{d}$ 表示：

$$\begin{aligned}\overline{d}&=\frac{1}{K}(|N_1-\overline{N}|+|N_2-\overline{N}|+|N_3-\overline{N}|+\cdots+|N_k-\overline{N}|)\\&=\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}|N_i-\overline{N}|\end{aligned} \tag{1-2-1}$$

式中，N_i 为第 i 次的测量值。

2. 标准偏差（均方根偏差）

根据统计误差理论及实践，在测量过程中产生的误差是遵循正态分布的测量值及随机误差时，可采用数学上数学期望的算术平均值和方差的开方，即均方根偏差，由于我国常采用均方根偏差作为精密度的评定标准，因此常称为标准偏差，通常用符号 σ 表示。当随机误差在置信区间 $[-\sigma,\ +\sigma]$ 内的置信概率为 68.3%，在置信区间 $[-2\sigma,\ +2\sigma]$ 内的置信概率为 95.4%，在置信区间 $[-3\sigma,\ +3\sigma]$ 内的置信概率为 99.7%。通常由于测量次数有限（一般最多在几十次），因此认为出现大于 3σ 误差的概率等于零，这就是随机误差的有界性。即

$$\delta_{max}=\pm 3\sigma \tag{1-2-2}$$

从以上分析可知，标准偏差描述了随机误差概率分布的分散性。若对一个物体进行重复多次测量，对于一组测量值，就可以用其标准偏差来描述测量的精密度。

用标准偏差 σ 来估算 $\overline{N}$ 代替真值 N_0 的可靠性程度有两种形式。

（1）测量列的实验标准差。在有限次测量和被测量真值未知情况下，可利用贝塞尔公式

$$\sigma(N)=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}(N_i-\overline{N})^2}{k-1}} \tag{1-2-3}$$

式(1-2-3) 也称测量列的实验标准差，它是用残差来估算测量列中每次测量的标准差，如图 1-2-1 所示。式(1-2-3) 中 $N_i-\overline{N}$ 称为第 i 个测量值的残余误差，简称残差。由式(1-2-3) 可知，当测量次数 k 增大时，分母增大，但同时残差的个数也增加，因而分子也相应增大。统计误差理论证明，k 增大不能减少测量列的标准差。当 k 小时，$\sigma(N)$ 起伏较大；当 k 大时，$\sigma(N)$ 趋于一个稳定值。

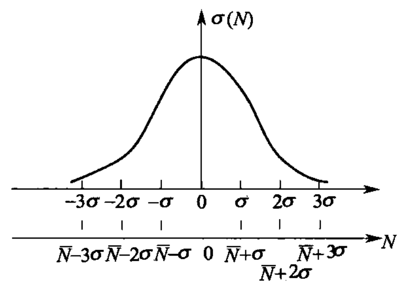

图 1-2-1　随机误差分布图

（2）平均值的标准偏差。在同一条件下对某物理量进行多次测量，其平均值的标准偏差为

$$\sigma(\overline{N})=\frac{\sigma(N)}{\sqrt{k}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}(N_i-\overline{N})^2}{k(k-1)}} \tag{1-2-4}$$

从式(1-2-4) 可以进一步看出，标准偏差 σ 是一个描述测量结果的离散程度的同一参量，用它评定测量数据的随机误差有许多优点，例如有相当的稳定性，σ 值随测量次数 k 值变化比较小；它以平方计值，因此与个别误差的符号无关，而且能反映数据的离散程度；它与最小二乘法相吻合等。对于这方面内容，若需要进一步深入了解，可参阅有关参考文献。

二、不确定度

测量结果不确定度 u 也称实验不确定度，有时简称不确定度。其基本定义为：对测量结果可信赖程度的评定。在测量结果中指明不确定度，是对被测量真值所处量值范围的评定（最佳估值），也就是说最佳值（一般为多次测量平均值）与真值之差，以一定概率落在 $\overline{N}-u\sim\overline{N}+u$ 之间。不确定度越小，标志着误差的可能值越小，测量的可信赖程度越高；不确定度越大，标志着误差的可能值越大，测量的可信赖程度越低。

1. 不确定度的分类和估算

$$u=\sqrt{\sum\sigma^2(N)+\sum u_j^2} \tag{1-2-5}$$

或

$$u=\sqrt{\sum\sigma^2(\overline{N})+\sum u_j^2} \tag{1-2-6}$$

式中，$\sigma(N)$ 或 $\sigma(\overline{N})$ 为 A 类不确定分量，求算这类分量的数值时，要对多个测量数值直接进行统计计算求其标准偏差 $\sigma(N)$ 或 $\sigma(\overline{N})$。式中 u_j 为 B 类不确定度分量，求这类分量的数值时，不是对测量数值直接进行统计计算，而是用其他方法先估计（包括查阅资料和手册）极限误差，并确定该项误差服从的分布，然后用下式计算：

$$u_j=\frac{\Delta_{ins}}{k} \tag{1-2-7}$$

式中，Δ_{ins}为仪器的极限误差，k 为置信系数（修正因子），其值因分布不同而异。B 类不确定度在物理实验中一般是用使用仪器的极限误差来表示。k 的取值：对概率分布为均匀分布

的情况，其误差来源主要是量化误差（数字式仪表在正负 1 个单位以内不能分辨的误差，如度盘的刻度误差、仪器传动的空程误差、机械秒表的读数误差、游标卡尺的读数误差、频率的误差、数值凑整误差等），单次测量时，其 $k=1.7$；对概率分布为两点分布的情况（误差来源是电流正反向流动、换向器以及只知道误差的绝对值而不知道正负值），其 $k=1$。此外，还有三角分布和反正弦分布等，如需要进一步了解请查阅有关参考文献。

测量次数越多，结果越可靠，置信系数就越小，当测量次数超过 10 次时，$k=1$。

2. 测量结果不确定度表示方法

相对不确定度

$$E_u=\frac{u}{N}\times 100\% \tag{1-2-8}$$

测量结果不确定度：

$$N=\overline{N}\pm u \tag{1-2-9}$$

第三节　直接测量结果误差估算及评定方法

一、单次测量结果的误差估算及评定

在物理实验中，往往由于条件不允许等原因，对一个物理量的测量只进行一次，那么测量结果的误差估算常以测量仪器误差来评定。例如用 50 分度的游标卡尺测量一个工件的长度 L，$L=10.00\text{mm}$，$\Delta L=0.02\text{mm}$（50 分度游标卡尺误差），则测量误差为 $\pm 0.02\text{mm}$。

对于实际使用中的测量仪器，如果该仪器没有标明误差，那么一般用以下方法来确定误差：

① 可取仪器及表盘上最小刻度一半为单次测量值允许的误差；

② 电学与电子类仪器的仪器误差主要根据仪器的精度级别来考虑，如果表的仪器误差 ΔN_0 是电表刻度中的最大误差，则

$$\Delta N_0=\text{量程}\times\frac{\text{仪器准确度等级}}{100}\times 100\%$$

电表的准确度等级一般分为七级，即 0.1，0.2，0.5，1.0，1.5，2.5 和 5.0 级。

【例 1】 如用一个准确度等级为 0.5 级，量程数为 $10\mu\text{A}$ 的电流表，单次测量某一电流值结果为 $2.00\mu\text{A}$，试用不确定度表示测量结果。

解　已知测量值 $I_0=2.00\mu\text{A}$，则

$$u_j=\Delta I=10\mu\text{A}\times 0.5\%=0.05\mu\text{A}$$

$$I=(2.00\pm 0.05)\mu\text{A}$$

$$E_u=\frac{\Delta I}{I}=0.025=2.5\%$$

二、多次测量结果的误差估算及评定

为了减少测量误差，使之用最佳值来代替真值，在可能的情况下，总是采用多次测量，以多次测量的平均值作为测量结果，它是真值的最好近似。下面举例说明。

【例 2】 用精度为 0.02mm 的游标卡尺测量某物体长度，共测量 10 次，测量数据为：60.04mm，60.06mm，60.00mm，60.06mm，60.00mm，60.04mm，60.00mm，60.06mm，60.00mm，60.02mm。求其 $\overline{N}$，$\overline{d}$，$\sigma(N)$，u，并用不确定度表示测量结果。

解　① 求多次测量平均值 $\overline{N}$。根据公式 $\overline{N}=\frac{1}{k}(N_1+N_2+\cdots+N_k)$，并代入有关测量

值，得到：

$$\overline{N}=60.028\approx 60.03\text{mm}$$

② 求算术平均偏差$\bar{d}$。根据公式(1-2-1)，代入有关数据，得到：

$$\bar{d}=0.024\text{mm}$$

③ 求测量列的实验标准差 $\sigma(N)$。根据公式(1-2-3)，代入有关数据，得到：

$$\sigma(N)=0.027\text{mm}$$

④ 求测量值的不确定度 u。根据公式(1-2-5)，其中 $u_j=\frac{\Delta_{\text{ins}}}{k}$。已知 $k\approx 1$，则

$$u_j=\Delta_{\text{ins}}=0.02\text{mm},\sigma(N)=0.027\text{mm}$$

$$u=\sqrt{0.027^2+0.02^2}=0.034\text{mm}\approx 0.03\text{mm}$$

⑤ 用 u 表示测量结果。根据公式(1-2-9)，有

$$N=(60.03\pm 0.03)\text{mm}$$

从例 2 看出，用不确定度估算误差和对测量结果评定比较科学，它用统计学的方法进行计算，考虑了主要涉及的随机误差，同时又用非统计学的方法进行评定，同时考虑了主要涉及的系统误差，最后用方和根合成误差结果。因此，目前对测量结果的估算及评定往往采用不确定度。

第四节　间接测量结果误差估算及评定方法

间接测量值是由直接测量值通过已知的函数关系运算求得，由于直接测量误差必然存在，那么间接测量值受到直接测量值影响，其结果也一定会有误差，这就是误差的传递。

一、一般的误差传递公式

设间接测量值 N 与直接测量值 x，y，z 有如下函数关系：

$$N=f(x,y,z) \tag{1-4-1}$$

根据多变量函数的全微分方法，对式(1-4-1) 求全微分：

$$\mathrm{d}N=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z \tag{1-4-2}$$

式(1-4-2) 表示，当直接测量值 x，y，z（均为独立自变量）有微小变化 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}z$ 时，间接测量值 N 也将改变 $\mathrm{d}N$。通常误差远小于测量值，故可把 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}z$ 看作误差，并将 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}z$ 改写为 Δx，Δy，Δz，在取最大误差的原则下，使各项绝对值相加而得到绝对误差传递公式（算术合成法）：

$$\Delta N=\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta x+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\Delta y+\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|\Delta z \tag{1-4-3}$$

若对式(1-4-1) 先取自然对数后再求微分，则

$$\ln N=\ln f(x,y,z)$$

得到相对误差的传递公式：

$$\frac{\Delta N}{N}=\left|\frac{\partial \ln f}{\partial x}\right|\Delta x+\left|\frac{\partial \ln f}{\partial y}\right|\Delta y+\left|\frac{\partial \ln f}{\partial z}\right|\Delta z \tag{1-4-4}$$

式(1-4-3) 中，$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|$，$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$，$\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|$ 为误差的传递系数；Δx，Δy，Δz 为直接测量值的最大误差或者是多次测量的算术平均误差。当间接测量式为和差形式（如 $N=x+y-z$）时，先计算绝对误差比较方便。

二、标准偏差的传递公式

由于标准偏差能够更好地反映测量结果的离散程度，所以常用标准偏差来估算。标准偏差的传递公式（方和根合成）为：

$$\sigma=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\sigma_x^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\sigma_y^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\sigma_z^2} \tag{1-4-5}$$

$$\frac{\sigma_N}{N}=\sqrt{\left(\frac{\partial \ln f}{\partial x}\right)^2\sigma_x^2+\left(\frac{\partial \ln f}{\partial y}\right)^2\sigma_y^2+\left(\frac{\partial \ln f}{\partial z}\right)^2\sigma_z^2} \tag{1-4-6}$$

实际使用上述公式时，σ 可用实验标准差 $\sigma(N)$ 也可用平均值的标准差 $\sigma(\overline{N})$。

三、不确定度的传递公式

根据式(1-4-1)、式(1-4-5)、式(1-4-6)，得到不确定度传递公式：

$$u_N=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2u_x^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2u_y^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2u_z^2} \tag{1-4-7}$$

$$\frac{u_N}{N}=\sqrt{\left(\frac{\partial \ln f}{\partial x}\right)^2u_x^2+\left(\frac{\partial \ln f}{\partial y}\right)^2u_y^2+\left(\frac{\partial \ln f}{\partial z}\right)^2u_z^2} \tag{1-4-8}$$

式中，u_x，u_y，u_z 是直接测量值 x，y，z 的合成不确定度。对于和差形式的函数用式(1-4-7)，对于积商、乘方、开方形式的函数用式(1-4-8) 比较方便。根据式(1-4-7) 和式(1-4-8)，可推出某些常用函数的不确定度传递公式，详见表 1-4-1。

表 1-4-1 某些常用函数的不确定度传递公式

函数形式	不确定度传递公式
$N=x+y$	$u_N=\sqrt{u_x^2+u_y^2}$
$N=x-y$	$u_N=\sqrt{u_x^2+u_y^2}$
$N=xy$	$\frac{u_N}{N}=\sqrt{\left(\frac{u_x}{x}\right)^2+\left(\frac{u_y}{y}\right)^2}$
$N=\frac{x}{y}$	$\frac{u_N}{N}=\sqrt{\left(\frac{u_x}{x}\right)^2+\left(\frac{u_y}{y}\right)^2}$
$N=kx$	$u_N=ku_x$
$N=\sin x$	$u_N=\lvert\cos x\rvert u_x$
$N=\ln x$	$u_N=\frac{u_x}{x}$
$N=\frac{x^k y^m}{z^l}$	$\frac{u_N}{N}=\sqrt{k^2\left(\frac{u_x}{x}\right)^2+m^2\left(\frac{u_y}{y}\right)^2+l^2\left(\frac{u_z}{z}\right)^2}$

【例 3】 用一级千分尺测量某一圆柱体的直径 D 和高度 H，测量数据见表 1-4-2，求圆柱体体积的 V，$\sigma(N)$，u_V，并用不确定度评定测量结果。

表 1-4-2 圆柱体测量数据

测量次数	D/mm	H/mm
1	3.004	4.096
2	3.002	4.094
3	3.006	4.092
4	3.000	4.096
5	3.006	4.096
6	3.000	4.094

续表

测量次数	D/mm	H/mm
7	3.006	4.094
8	3.004	4.098
9	3.000	4.094
10	3.000	4.096

解 ① 由题意分别估算：

$$u_D=\sqrt{\sigma^2(D)+u_j^2},\ u_H=\sqrt{\sigma^2(H)+u_j^2}$$

先确定A类不确定度$\sigma(D)$，$\sigma(H)$。

$$\overline{D}=3.0028\text{mm}\approx3.003\text{mm},\qquad \sigma(D)=0.0027\text{mm}$$

$$\overline{H}=4.095\text{mm},\qquad \sigma(H)=0.0017\text{mm}$$

再确定B类不确定度u_j。由于一级千分尺出厂时已标定$\Delta_{\text{ins}}=0.004\text{mm}$。所以

$$u_j=\Delta_{\text{ins}}=0.004\text{mm}$$

由于使用同一仪器测量D、H值，则：

$$u_D=\sqrt{0.0027^2+0.004^2}=0.0048\text{mm}$$

$$u_H=\sqrt{0.0017^2+0.004^2}=0.0043\text{mm}$$

② 根据圆柱体体积函数公式

$$V=\frac{\pi}{4}D^2H$$

代入有关数值 $$V=\frac{\pi}{4}\overline{D}^2\overline{H}=29.00\text{mm}^3$$

由于V是间接测量的，属乘除方运算，则：

$$\begin{aligned}E_u&=\frac{u_V}{V}=\sqrt{\left(\frac{\partial\ln V}{\partial D}\right)^2u_D^2+\left(\frac{\partial\ln V}{\partial H}\right)^2u_H^2}\\&=\sqrt{\left(\frac{2}{D}\right)^2u_D^2+\left(\frac{1}{H}\right)^2u_H^2}\\&=\sqrt{\left(\frac{2}{3.003}\right)^2\times0.0048^2+\left(\frac{1}{4.095}\right)^2\times0.0043^2}\\&=0.0034\end{aligned}$$

③ $$u_V=V\times E_u=29.00\times0.0034\text{mm}^3=0.1\text{mm}^3$$

④ 间接测量结果评定

$$V=(29.0\pm0.1)\text{mm}^3$$

【例4】 计算间接测量结果的最佳值和不确定度，并用不确定度表示测量结果。已知

$$A=(71.3\pm0.5)\text{cm}^2\qquad B=(6.262\pm0.002)\text{cm}^2$$

$$C=(0.753\pm0.001)\text{cm}^2\qquad D=(271\pm1)\text{cm}^2$$

求解：

① $N=A+B-C+D$

② $N=\dfrac{AC}{BD}$

解 ① 求算术平均值$\overline{N}$

$$\overline{N}=A+B-C+D=71.3+6.262-0.753+271=347.8\text{cm}^2$$

估算不确定度，根据式(1-4-7)，可得：