线性代数方法概论

袁俊伟　主编

东南大学出版社

线性代数方法概论

主　编　袁俊伟

副主编　冯　强　阎玉斌

东　南　大　学　出　版　社

(苏)新登字第012号

内容简介

本书系统、概括地论述了线性代数的理论和方法，归纳了题类及常用的解题方法，运用典型例题揭示了线性代数的解题规律和技巧，每章附有综合练习题，书末附有综合练习题提示。全书结构严谨，论述清晰，分析详尽，选材新颖，富有启发性。

本书可供各类高校理工科师生、广大科技人员和自学者阅读参考，可作线性代数或高等代数选讲教材，也可供报考硕士研究生的同志作系统复习之用。

线性代数方法概论

袁俊伟 主编

东南大学出版社出版发行

（南京四牌楼2号）

溧水县第二印刷厂印刷

开本 787×1092 毫米 1/32 印张10.75 字数241千字

1992年8月第1版 1992年8月第1次印刷

印数：1—5000册

ISBN 7—81023—627—X

定价：4.20元

前　言

线性代数是师范大学数学专业和理工科大学学生的重要基础课之一，其概念抽象、理论严密、方法灵活多变、应用广泛。然而，不仅初学者普遍感到这门课程难学，即使已经学过这门课程的同志也常常感到它的习题和试题难做。为了帮助正在学习和已经学过线性代数的读者更好地掌握这门课程的基本理论，灵活运用它的基本方法，我们在教学实践的基础上，编写了这本《线性代数方法概论》。

全书共八章。每章按Ⅰ．基本理论和方法概述，Ⅱ．题类·方法·解题分析，Ⅲ．综合练习题三部分编写。第Ⅰ部分分析该章的理论体系和基本方法；第Ⅱ部分先将该章的题目分类，然后归纳每类题目的常用解题方法，接着通过典型例题（包括若干历届硕士研究生入学试题）分析探求解题途径的方法，揭示解题规律和技巧；第Ⅲ部分精选了若干典型习题和试题，供读者练习以便熟练掌握各种方法和技巧。书末附有综合练习题提示，供读者参考。本书并不拘泥于教材的顺序，在内容上前后穿插、纵横联系，以便更好地揭示线性代数理论和方法的内在联系以及解题规律和技巧。

本书可供各类高校理工科师生、广大科技工作人员和自学者阅读、参考，可作线性代数或高等代数选讲教材，也可供报考硕士研究生的同志作系统复习之用。

本书由袁俊伟主编。冯强（河北沧州师专）和阎玉斌

（山西吕梁高专）为本书的副主编，本书编委（按姓氏笔划为序）还有：王文成（河北沧州工业学校）、王洪玉（河北沧州师专）、王培根（北京师院分院）、冯祥树（石家庄师专）、向大晶（湖北民族学院）、李金山（山东德州师专）、汪国平（燕山大学）、张广（山西云中大学）、陈青（南京师范大学）、张淑华（北京师院分院）、张肇炽（西北工业大学）、符丽珍（西北工业大学）、梁宗旗（山西吕梁高专）、郭雁君（山西吕梁教院）。

由于我们水平有限，难免有疏漏之处，甚至可能有某些谬误，热诚欢迎广大读者批评指正。

编者

1991年8月

目　录

第一章　多项式

Ⅰ．基本理论和方法概述

多项式是代数学中的一个基本概念，它的理论和方法是高等代数的一个重要组成部分。

数域P上的多项式既可以用形式观点，又可以用函数观点来处理。从形式观点出发，可以把数域P上的一元多项式定义为文字或符号的形式表达式。在一元多项式环$P[x]$上，多项式的加、减、乘法运算封闭，而除法运算不封闭，因此整除就成了多项式的一种特殊关系。研究整除的性质和规律，从而形成了多项式的整除性理论。

多项式整除性理论的基本概念是整除或因式。最大公因式与互素、不可约因式与因式分解、重因式等概念都是建立在整除和因式的基础之上的。

在多项式的整除性理论中，带余除法既是一条基础定理，又是计算商和余式、判定整除的一种基本方法。综合除法是它的特例。辗转相除法是带余除法的反复使用。用辗转相除法可以计算最大公因式并得到最大公因式定理（即$\forall f$、$g\in P[x]$，一定存在最大公因式$d\in P[x]$，且有u，$v\in P[x]$，使$uf+vg=d$）和多项式互素定理（即f、g互素$\Longleftrightarrow uf+vg=1$）。这两条定理在解最大公因式和互素问题时很有效。

在多项式整除性理论中，因式分解及唯一性定理虽然没有给出具体的分解因式的方法，但在理论上具有基本的重要

性。用它研究整除性问题，往往显得既简单又明确。复、实数域上的因式分解定理是它的特例，但在有理数域上没有类似的因式分解定理，原因是在有理数域上存在任意高次的不可约多项式。建立在高斯（Gauss）引理基础上的艾森斯坦（Eisenstein）判别法是判定有理不可约多项式的一种有效方法。然而，对于复、实系数多项式人们至今没有找到一般的因式分解方法，对于有理系数多项式，却有Kronecker的一般分解法。

从函数观点出发，可以把数域P上的一元多项式看作P上的多项式函数。研究多项式的根的存在性及求根问题就形成了多项式的根的理论。

在多项式的根的理论中，建立在带余除法基础上的余数定理是一条重要定理。由它不仅可以得到用综合除法求多项式的函数值和根的方法，更重要的是由它可以推出因式定理〔即$(x-\alpha)\mid f(x)\Leftrightarrow f(\alpha)=0$〕。因式定理是联系多项式整除性理论和根的理论的一座桥梁，常常用它将多项式的整除性问题转化为根的问题求解以及将根的问题转化为整除性问题来处理。

在多项式的根的理论中，代数基本定理虽然没有给出根的具体求法，但它在理论上很重要。复、实系数多项式因式分解定理就是建立在它的基础之上的。由复系数因式分解定理不难推出韦达定理，很多问题的解决都要用到它。求多项式的复根或实根没有一般的公式，但有理根定理〔即若$\frac{r}{s}$，$(r, s)=1$，是整系数多项式$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$的一个有理根，则$s\mid a_n$，$r\mid a_0$〕提供了一个求整系数多项式全部有理根的一般方法。

一元多项式的自然推广是多元多项式。多元多项式的理论比一元多项式要复杂得多。多元多项式在近代数学中占有重要的地位。在多元多项式中，对称多项式和初等对称多项式在应用上特别重要。对称多项式基本定理不仅指出了任意一个 n 元对称多项式都可以唯一地表为初等对称多项式的多项式，而且给出了具体的计算方法。

多项式在矩阵、行列式、线性方程组、二次型、线性空间、线性变换、欧氏空间等方面都有广泛的应用。诸如矩阵多项式、线性变换多项式、λ－矩阵、特征值等都直接用到多项式的理论和方法。多项式的理论和方法在数学各分支以及其他科技领域也有广泛的应用。反之，多项式问题的求解也常常用到线性代数和其他数学分支的知识。

Ⅱ．题类·方法·解题分析

多项式题目面广量大，形式多样，难易悬殊。多项式问题不仅在今后的工作和学习中经常遇到，而且在硕士研究生入学考试中也时有出现。因此，切实掌握多项式解题的方法和技巧是十分重要的。

按内容划分，多项式题目大致可以分为运算和函数问题、整除性问题、根和重根问题、多元多项式问题四大类。这种划分是十分粗略的。目的在归纳方法，分析解题思路。

一、运算和函数

这类问题主要涉及多项式的加、减、乘法运算及其性质，多项式的系数、次数及其规律，以及多项式的函数值等。解决这类问题常用的方法有：

（1）比较系数。通常用到多项式相等的定义，运算法

则，系数律；

（2）比较次数。通常用到次数律；

（3）比较函数值。常常用到多项式的和（积）的函数值等于多项式函数值的和（积）。

例1 由等式$(1+x)^m(1+x)^n=(1+x)^{m+n}$，证明

$$C_m^k+C_m^{k-1}C_n^1+\cdots+C_m^1C_n^{k-1}+C_n^k=C_{m+n}^k$$

分析 C_{m+n}^k是$(1+x)^{m+n}$的k次项系数，故只需证明$C_m^k+C_m^{k-1}C_n^1+\cdots+C_m^1C_n^{k-1}+C_n^k$是$(1+x)^m(1+x)^n$的$k$次项的系数。

证 由$(1+x)^m(1+x)^n=(1+x)^{m+n}$，有

$$(1+C_m^1x+C_m^2x^2+\cdots+C_m^mx^m)(1+C_n^1x+\cdots+C_n^nx^n)$$

$$=1+C_{m+n}^1x+C_{m+n}^2x^2+\cdots+C_{m+n}^{m+n}x^{m+n}$$

比较上式两边k次项系数，即得

$$C_m^k+C_m^{k-1}C_n^1+\cdots+C_m^1C_n^{k-1}+C_n^k=C_{m+n}^k.$$

注　本例证明中利用了多项式的乘法规则〔即，若$f(x)=\sum\limits_{i=0}^{m}a_ix^i$，$g(x)=\sum\limits_{j=0}^{m}b_jx^j$，则$f(x)g(x)=\sum\limits_{s=0}^{m+n}\left(\sum\limits_{i+j=s}a_ib_j\right)\cdot x^s$〕以及多项式相等的定义。

例2（河南大学硕士研究生入学试题）。设$f(x)$为一多项式，若$f(x+y)=f(x)f(y)$，x、$y\in R$，则$f(x)=0$或$f(x)=1$

分析 从结论入手。若$f(x)\neq 0$，须证$f(x)=1$。可先证$\partial[f(x)]=0$，再证$f(x)=1$

证 若$f(x)\neq 0$，令$y=x$，有

$$f(2x)=f^2(x)$$

设$\partial[f(2x)]=n$，则$\partial[f^2(x)]=2n$，可知$n=0$，令$f(x)=c\neq 0$，由$f(0)=f(0+0)=f(0)f(0)$，得$c=c^2$，从而$c=1$，即$f(x)=1$

注 本例证题的关键是比较$f(2x)$与$f^2(x)$的次数。

例3 （华中师范大学硕士研究生入学试题）

设$f(x)=(5x-4)^{1985}(4x^2-2x-1)^{1986}(8x^3-11x^2+2)^{1987}$，试求$f(x)$的所有系数的和。

分析 设$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a$。

则$f(x)$的所有系数之和为

$$f(1)=a_n+a_{n-1}+\cdots+a_0。$$

解 $f(x)$的所有系数之和为

$$f(1)=(5\cdot1-4)^{1985}\cdot(4\cdot1^2-2\cdot1-1)^{1986}\cdot(8\cdot1^3-11\cdot1^2+2)^{1987}=-1。$$

注 本例利用了“多项式和的函数值等于多项式函数值的和。”

例4 （河南大学硕士研究生入学试题）设$f(x)\in P[x]$满足

$$f(a+b)=f(a)+f(b),\ \forall a,\ b\in P$$

证明 $f(x)=kx$，（k为常数）。

方法1

分析 从结论入手。设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

须证$f(x)=0$和$a_0=0$，$\partial[f(x)]=1$。

证 当$f(x)=0$时，结论显然成立，当$f(x)\neq 0$时，设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

由于$f(0)=f(0)+f(0)$，得$f(0)=a_0=0$，因此，$\partial[f(x)]\neq 0$，若$\partial[f(x)]=n>1$，由题设有$f(x+b)=f(x)+f(b)$，即

$$a_n(x+b)^n+a_{n-1}(x+b)^{n-1}+\cdots+a_1(x+b)$$
$$=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+f(b)$$

其中$b\neq 0$是一常数，比较两边关于x的$n-1$次项的系数，得

$$na_nb+a_{n-1}=a_{n-1},$$

从而$na_nb=0$，矛盾。故$\partial[f(x)]=1$，即$f(x)=a_nx$，总之有$f(x)=kx$（k为常数）。

方法2

分析 在$f(x)=kx$中，令$x=1$得$k=f(1)$，故欲证之结论即为$f(x)=f(1)x$，

证 令$\varphi(x)=f(x)-f(1)x$，则$\varphi(1)=f(1)-f(1)=0$，假定$\varphi(n)=0$，则$\varphi(n+1)=f(n+1)-f(1)(n+1)=f(n)+f(1)-f(1)(n+1)=f(n)-f(1)n=\varphi(n)=0$， 由此可知，一切自然数都是$\varphi(x)$的根，故$\varphi(x)=0$，从而$f(x)=kx$，其中$k=f(1)$为常数。

注 含有未知函数的等式叫函数方程。求函数方程的解或证明它无解，称为解函数方程。一般来说，解函数方程要比解普通方程困难得多，至今还没有统一的理论和方法。例2、例4属解多项式函数方程问题。解这类问题重要的不是高深的理论和技巧，主要的是善于分析具体问题的特点，灵活应用基本知识。例2、例4仅综合应用了比较系数、比较次数、比较函数值等方法。此外，解多项式函数方程也常用到多项式的整除性理论，根的理论以及数学分析等其他数学分支的知识。

例5 （南京工学院硕士研究生入学试题）设 $P_1(x)$，

$i=1$，$2\cdots$，k为实系数多项式，若$\sum\limits_{i=1}^{k}\partial(P_i)<\frac{1}{2}k(k-1)$

则P_1，P_2，…，P_i线性相关。

分析　若P_i中有零多项式，结论成立；若P_i皆不为零，考察条件$\sum\limits_{i=1}^{k}\partial P_i<\frac{1}{2}k(k-1)$，若，$\partial P_i$两两不等，则必有$\sum\limits_{i=1}^{k}\partial P_i>\frac{1}{2}k(k-1)$，故$\partial P_i$中必有相等的。

证　若P_i，$i=1$，2，…，k中有一个零多项式，则它们显然线性相关。现设P_i皆不为零多项式，由条件知，∂P_i，$i=1$，2，…，k中必有相等的，设，$\partial P_s=\partial P_t$，于是存在$c\in R$使$\partial(cP_s+P_t)<\partial P_s$，令$g(x)=cP_t+P_s$，易证，用$g(x)$代替$Ps$后所得的$k$个多项式与原来的$k$个多项式等价，因而它们的线性相关性不变。由于

$$\sum_{i\neq s}\partial P_i+\partial g<\sum_{i=1}^{k}\partial P_i<\frac{1}{2}k(k-1),$$

对新的多项式组可以重复使用上述推理过程，经有限次后，必出现零多项式，故结论成立。

注　本例将p_1，p_2，…，p_k在一般情况下的线性相关性问题归结为其中有零多项式这种特殊情况下的线性相关性问题，从而达到证题目的。将一般归于特殊，这是数学证明中常用的一种方法。

二、整除性问题

整除性问题又可细分为整除的判定，最大公因式和互素、不可约多项式的判定，重因式、因式分解五类问题。

解整除性问题的常规方法是用整除性理论，此外也常常用到根的理论。

1、整除的判定

解这类问题常用的方法有：

（1）用整除的定义；

（2）用整除的性质；

（3）用带余除法；

（4）用多项式互素的性质；

（5）用不可约多项式的性质；

（6）用因式分解及唯一性定理；

（7）用重因式的性质；

（8）用根的理论〔经常用到：1）因式定理；2）若$g(x)$无重根，且$g(x)$的根都是$f(x)$的根，则$g(x)|f(x)$〕。

例6（四川师范大学硕士研究生入学试题）设$f(x)$，$g(x)$为数域P上的多项式，证明$g^2(x)|f^2(x)$的充要条件是$g(x)f|(x)$。

分析 证充分性不难，证必要性可逐一试用常用方法。

充分性 若$g(x)|f(x)$，则有$f(x)=g(x)h(x)$，从而有$f^2(x)=g^2(x)h^2(x)$，因此，$g^2(x)|f^2(x)$。

必要性 **证法1**（用多项式互素的性质），若$g=0$，结论显然成立。若$g\neq 0$，设$(f,g)=d$，$f=f_1d$，$g=g_1d$，则$(f_1,g_1)=1\Longrightarrow(f_1^2,g_1^2)=1$，由$g^2|f^2\Longrightarrow g_1^2|f_1^2\Longrightarrow g_1^2$为$f_1^2$与$g^2$的最大公因式。因此$\partial(g_2{}^1)=0\Longrightarrow\partial(g)=0$，即$g=c$（$c$为非零常数），因此，$g|f$。

证法2（用因式分解及唯一性定理），当$g(x)$为零多项式或零次多项式时，结论显然成立。当$\partial(g(x))\geqslant 1$时，$\partial(f(x))\geqslant 1$，设$f$、$g$的标准分解式为

$$f=aP_1^{k_1}P_2^{k_2}\cdots P_s^{k_s},\quad g=bp_1^{t_1}P_2^{t_2}\cdots P_s^{t_s},$$

其中P_i为互不相同的首1不可约多项式，$k_i \geqslant 0$，$t_i \geqslant 0$，$i=1, 2, \cdots, s$，由$g^2 | f^2$可知$2t_i \leqslant 2k_i$，从而$t_i \leqslant k_i$，$i=1, 2, \cdots, s$，因此$g | f$。

注 比较本例必要性的证法1和证法2，证法2思路较为简明。

例7 设$f(x)$，$g(x)$，$h(x)$均为实系数多项式，且适合以下关系

$$\begin{cases}(x+a)f(x)+(x+b)g(x)+(x^2+1)h(x)=0\\(x-a)f(x)+(x-b)g(x)+(x^2+1)h(x)=0\end{cases}$$

其中a、b为不同的非零实数，求证：$x^2+1 | f(x)$，$x^2+1 | g(x)$。

分析 把$f(x)$、$g(x)$看成未知数求解，得下述证法1；

另一方法是：欲证结论成立，只需证x^2+1的根$\pm i$也是$f(x)$和$g(x)$的根。

证法1 从题设的关系式中消去$f(x)$，得

$$(b-a)xg(x)=a(x^2+1)h(x),$$

因此，$x^2+1 | (b-a)xg(x)$，由于$[x^2+1, (b-a)x]=1$，所以$x^2+1 | g(x)$。同理可证$x^2+1 | f(x)$。

证法2 将x^2+1的根$\pm i$代入题设的关系式中，得

$$\begin{cases}(\pm i+a)f(\pm i)+(\pm i+b)g(\pm i)=0\\(\pm i-a)f(\pm i)+(\pm i-b)g(\pm i)=0\end{cases}$$

由此解得$f(\pm i)=0$，$g(\pm i)=0$，故$x^2+1 | f(x)$，$x^2+1 | g(x)$。

注 本例证法1将$f(x)$、$g(x)$看作未知数，证法2将$f(\pm i)$，$g(\pm i)$看作未知数，通过计算达到了证题目的。将欲证之命题转化为一个计算型命题具有重大的普遍的意义。现代数学有一种愈来愈多的将逻辑推演归结为各种层次的计算的强烈趋势。高等代数，尤其是线性代数中的许多问题，常可归结为行列式、线性方程组和矩阵