普通高校“十二五”规划教材

张福渊　郭绍建
萧亮壮　傅丽华　编著

概率统计及随机过程

（第2版）

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

普通高校"十二五"规划教材

概率统计及随机过程

(第2版)

张福渊　郭绍建
萧亮壮　傅丽华　编著

北京航空航天大学出版社

内容简介

本书介绍概率论、数理统计、随机过程三部分内容。第1章至第6章为概率论，包括：随机事件的概率；随机变量及其分布；二维随机变量；随机变量的函数的分布；随机变量的数字特征；大数定律和中心极限定理。第7章至第11章为数理统计，包括：统计量及其分布；参数估计；假设检验；方差分析；回归分析。第12章至第14章为随机过程，包括：随机过程的基本概念；平稳过程；马尔可夫链。书中配置了相当数量的例题和习题，便于读者自学，并且配置了适量应用性的例子。

全书内容丰富，深入浅出，在满足理工科大学基本教学要求的基础上，选编了部分具有广阔应用领域的内容，使得本书既可作为理工科大学的本科教材，又可作为研究生参考书，也可作为有关专业的教师和工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

概率统计及随机过程 / 张福渊等编著. --2 版. --北京 ：北京航空航天大学出版社，2012.2

ISBN 978-7-5124-0713-8

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①概率论②随机过程 Ⅳ. ①O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 016919 号

概率统计及随机过程(第2版)

张福渊　郭绍建　萧亮壮　傅丽华　编著

责任编辑　刘晓明

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路37号(邮编100191)　http://www.buaapress.com.cn

发行部电话：(010)82317024　传真：(010)82328026

读者信箱：bhpress@263.net　邮购电话：(010)82316936

涿州市新华印刷有限公司印装　各地书店经销

*

开本：787×960　1/16　印张：20　字数：448千字

2012年2月第2版　2012年2月第1次印刷　印数：5 000册

ISBN 978-7-5124-0713-8　定价：35.00元

若本书有倒页、脱页、缺页等印装质量问题，请与本社发行部联系调换。联系电话：(010)82317024

第2版前言

《概率统计及随机过程》的初稿于1987年投入使用，开始作为北京航空航天大学本科生通用教材。几经修订，于1993年正式出版。又经过改写，于2000年重新出版。这次再版，作了如下修订：

1. 对全书仔细校正，在内容、例题以及行文等方面，适量增删。

2. 恢复了“方差分析”一章。在本书的初稿和1993年版本中，都有“方差分析”一章。2000年，受到版面字数的限制，删去了这一章。本次恢复，使得全书在内容和体系上更加完善。

3. 把本学科常用的一些公式作为附录，便于查找运用。

本书第1章至第4章由郭绍建执笔，第5、6章由傅丽华执笔，第7章至第9章由萧亮壮执笔，第10章至第14章由张福渊执笔。张福渊对全书修订统编。几位编著者都是具有丰富教学经验的老教师。教学、科研的经验积累和方法融会于编著中，使得本书自成特色。本书既注重本学科的系统性、理论性和应用性，又注意贯彻由浅入深、循序渐进的教学原则。本书作为教材，经过多次修订，比较成熟。

随机模型的研究已经渗透到科学技术的各个领域。本书提供的基本知识和基本方法，将为读者进一步深入研究、为在科学技术某个领域中的应用，奠定必要的基础。

特别感谢北京航空航天大学数学与系统科学学院的老师们，多年以来一直使用本书作为教材，提出了许多宝贵意见。特别感谢邢家省教授，对于本书提出的意见和建议，使我们获益匪浅。

对书中缺点和错误之处，恳请专家和读者批评指正。

编　者

2011年11月

前　　言

概率论及以它为基础的数理统计、随机过程都是研究随机现象的数学分支。几个世纪以来，经过众多学者潜心研究，概率论、数理统计、随机过程已经成为既互相关联又自成体系的三门严谨的分支学科。随着科学技术的快速发展和生产力的大幅度提高，在各个研究领域和工程技术领域中，人们愈来愈关注随机模型，使得随机理论和方法的应用日益广泛，几乎渗透到科学技术的各个领域之中。

本书介绍概率论、数理统计、随机过程中的基本理论和基本方法。初稿是笔者在北京航空航天大学自编的全校通用教材，1987 年投入使用。几经修订，于 1993 年正式出版。为了适应科技发展的需求，适应教改的需求，我们本着立足现在、着眼未来、精益求精的指导思想，对原有版本作了全面的增删修订，从体系上作了调整，许多章节推翻原稿，重新改写。在满足理工科大学基本教学要求的基础上，在深度、广度方面都有提高。书中一些既具有深刻理论又有广阔应用领域的内容及例子，可供读者选学或作为参考。书中各章均配置了相当数量的例题和习题，并对习题给出了答案。本书既可作为理工科大学本科教科书，又可作为研究生参考书，也可作为有关专业的教师或工程技术人员的参考书。

本书关于“分位点”的定义以及附表二至附表五中的分位点数，依据中华人民共和国国家标准，统一为下侧分位点。这与以往教材中使用上侧分位点和双侧分位点是不同的。请读者注意区别。

韩於羹教授详细审阅了全部书稿，提出了极为切实的修改意见，特此致以衷心的感谢。

本书第一章至第四章由郭绍建执笔；第五、六章由傅丽华执笔；第七章至第九章由萧亮壮执笔；第十章至第十三章由张福渊执笔。张福渊对全书进行了修订统编。

限于水平，书中难免存在缺点或错误，欢迎专家和读者批评指正。

编　者

2000 年 3 月

目　录

第 1 章　随机事件的概率 …… 1

1.1　随机事件与样本空间 …… 1

1.1.1　随机试验与随机事件 …… 1

1.1.2　样本空间 …… 1

1.1.3　随机事件的关系与运算 …… 2

1.2　概率的定义及性质 …… 4

1.2.1　概率的古典定义 …… 4

1.2.2　概率的几何定义 …… 7

1.2.3　概率的统计定义 …… 9

1.2.4　概率的公理化定义 …… 10

1.3　条件概率与乘法公式 …… 13

1.3.1　条件概率的概念 …… 13

1.3.2　乘法公式 …… 15

1.4　全概率公式与贝叶斯公式 …… 15

1.4.1　全概率公式 …… 16

1.4.2　贝叶斯公式 …… 17

1.5　事件的独立性 …… 19

习 题 一 …… 23

第 2 章　随机变量及其分布 …… 27

2.1　随机变量 …… 27

2.2　分布函数 …… 28

2.3　离散型随机变量及其概率分布 …… 30

2.4　常用的离散型分布 …… 33

2.4.1　两点分布 …… 33

2.4.2　二项分布 …… 33

2.4.3　泊松分布 …… 36

2.4.4　超几何分布 …… 36

2.5 连续型随机变量及其概率密度 …… 36
2.6 常用的连续型分布 …… 39
2.6.1 均匀分布 …… 39
2.6.2 指数分布 …… 39
2.6.3 威布尔分布 …… 40
2.6.4 Γ分布 …… 40
2.6.5 正态分布 …… 41
习题二 …… 44

第3章 二维随机变量 …… 49

3.1 联合分布 …… 49
3.2 边沿分布律与条件分布律 …… 54
3.2.1 边沿分布律 …… 54
3.2.2 条件分布律 …… 55
3.3 边沿分布函数 …… 56
3.4 边沿概率密度与条件概率密度 …… 57
3.4.1 边沿概率密度 …… 57
3.4.2 条件概率密度 …… 59
3.5 相互独立的随机变量 …… 61
习题三 …… 67

第4章 随机变量的函数的分布 …… 72

4.1 离散型随机变量的函数的分布 …… 72
4.2 一维连续型随机变量的函数的分布 …… 75
4.3 二维连续型随机变量的函数的分布 …… 78
4.3.1 $Z=X+Y$ 的分布 …… 78
4.3.2 $Z=\max(X,Y)$ 的分布 …… 83
4.3.3 $Z=\min(X,Y)$ 的分布 …… 85
习题四 …… 89

第5章 随机变量的数字特征 …… 94

5.1 数学期望 …… 94
5.1.1 数学期望的概念 …… 94
5.1.2 数学期望的性质 …… 98

5.2　方　差 …… 100
5.2.1　方差的概念 …… 100
5.2.2　方差的性质 …… 102
5.3　常用随机变量的数学期望和方差 …… 104
5.4　协方差和相关系数 …… 108
5.4.1　协方差 …… 108
5.4.2　相关系数 …… 110
5.5　矩、协方差矩阵 …… 116
5.5.1　矩 …… 116
5.5.2　协方差矩阵 …… 116
习题五 …… 118

第6章　大数定律和中心极限定理 …… 121

6.1　切比雪夫不等式 …… 121
6.2　大数定律 …… 121
6.3　中心极限定理 …… 123
习题六 …… 125

第7章　统计量及其分布 …… 126

7.1　总体与样本 …… 126
7.1.1　总体与个体 …… 126
7.1.2　样本与样本值 …… 126
7.2　样本矩和统计量 …… 127
7.2.1　样本矩 …… 127
7.2.2　统计量 …… 128
7.2.3　顺序统计量与经验分布函数 …… 128
7.3　统计量的分布 …… 129
7.3.1　正态总体样本的线性函数的分布 …… 129
7.3.2　χ^2分布 …… 129
7.3.3　t分布 …… 133
7.3.4　F分布 …… 136
习题七 …… 138

第8章 参数估计 …… 139

8.1 参数的点估计 …… 139
8.1.1 矩估计法 …… 139
8.1.2 极大似然估计法 …… 140
8.2 点估计量的优良性 …… 143
8.2.1 无偏估计 …… 143
8.2.2 最小方差无偏估计 …… 144
8.2.3 一致估计 …… 147
8.3 置信区间 …… 148
8.3.1 置信区间的概念 …… 148
8.3.2 单侧置信限 …… 149
8.4 正态总体均值和方差的区间估计 …… 149
8.4.1 均值的区间估计 …… 149
8.4.2 方差的区间估计 …… 152
8.5 二正态总体均值差和方差比的区间估计 …… 153
8.5.1 二正态总体均值差的区间估计 …… 153
8.5.2 二正态总体方差比的区间估计 …… 154
习题八 …… 155

第9章 假设检验 …… 158

9.1 假设检验问题 …… 158
9.2 正态总体均值和方差的假设检验 …… 159
9.2.1 正态总体均值的假设检验 …… 159
9.2.2 正态总体方差的假设检验 …… 164
9.3 二正态总体均值差和方差比的假设检验 …… 166
9.3.1 二正态总体均值差的假设检验 …… 166
9.3.2 二正态总体方差比的假设检验 …… 169
9.4 总体分布的假设检验 …… 172
习题九 …… 177

第10章 方差分析 …… 179

10.1 单因素方差分析 …… 179
10.1.1 单因素等重复试验的分析 …… 179

10.1.2　一般模型 …… 185
10.1.3　分解定理 …… 187
10.2　双因素方差分析 …… 187
10.3　有交互作用的双因素方差分析 …… 192
习题十 …… 196

第11章　回归分析 …… 199

11.1　一元线性回归方程 …… 199
11.1.1　a,b 的最小二乘估计 …… 200
11.1.2　线性回归方程 …… 201
11.1.3　线性相关性检验 …… 203
11.2　预测与控制 …… 207
11.2.1　预　测 …… 207
11.2.2　控　制 …… 211
11.3　可线性化的曲线回归 …… 212
11.4　多元线性回归 …… 214
11.4.1　回归参数 b 的最小二乘估计 …… 215
11.4.2　$\hat{b}$ 的计算 …… 216
11.4.3　回归方程的显著性检验 …… 219
11.4.4　回归系数的显著性检验 …… 220
习题十一 …… 221

第12章　随机过程的基本概念 …… 223

12.1　随机过程的定义及分类 …… 223
12.1.1　随机过程的概念 …… 223
12.1.2　随机过程的分类 …… 224
12.2　随机过程的概率分布 …… 225
12.3　随机过程的数字特征 …… 227
习题十二 …… 231

第13章　平稳过程 …… 233

13.1　严平稳过程 …… 233
13.2　广义平稳过程 …… 235
13.3　正态过程与正态平稳过程 …… 237

13.3.1 正态过程……237
13.3.2 正态平稳过程……238
13.4 遍历过程……238
13.4.1 时间均值和时间相关函数……239
13.4.2 各态遍历性……240
13.4.3 遍历过程的数字特征……241
13.5 平稳过程的相关函数与谱密度……242
13.5.1 相关函数的性质……242
13.5.2 谱密度……243
13.5.3 谱密度的性质……246
13.5.4 互相关函数与互谱密度……246
习题十三……247

第14章 马尔可夫链 ……249

14.1 马尔可夫链的定义……249
14.2 参数离散的齐次马尔可夫链……250
14.2.1 转移概率矩阵……250
14.2.2 切普曼-柯尔莫哥洛夫方程……252
14.2.3 有限维概率分布……254
14.2.4 平稳分布……256
14.3 参数连续的齐次马尔可夫链……257
14.3.1 转移概率函数……257
14.3.2 转移速率矩阵……258
14.3.3 柯尔莫哥洛夫方程……260
14.3.4 瞬时概率……261
14.3.5 平稳分布与极限分布……262
14.3.6 几个例子……265
习题十四……268

习题答案……271

附录A 常用公式……287

1. 两个原理……287
2. 排列与组合……287

3. 无穷级数 …… 288
4. 有限项级数 …… 288
5. 二项展开定理 …… 288

附录 B 常用数据分布表 …… 289

附表 1 泊松分布表 …… 289
附表 2 标准正态分布表 …… 290
附表 3 t 分布表 …… 292
附表 4 χ^2 分布表 …… 294
附表 5 F 分布表 …… 297
附表 6 相关系数临界值(r_α)表 …… 303

参 考 文 献 …… 304

第 1 章　随机事件的概率

1.1　随机事件与样本空间

1.1.1　随机试验与随机事件

为了叙述方便，我们把各种各样的科学实验或对某一事物的某种特性的观察统称为试验。如果一个试验在相同的条件下可以重复进行，而且每次试验的结果事前不可预言，那么，称它为随机试验，简称为试验。用字母 E 或 $E_1, E_2, \cdots$ 表示一个试验。

例如，投掷一颗匀称的骰子，观察其出现的点数；记录某电话交换台在一天内接到的呼叫次数；在一批灯泡中任取一只，测试它的寿命等，都是随机试验，并分别以 E_1, E_2, E_3 表示。

在试验中可能发生，也可能不发生的事件，称为随机事件，简称事件。如试验 E_1 中，"出现偶数点"和"出现的点数大于 4"等都是随机事件；试验 E_2 中，"接到 500 次呼叫"和"呼叫次数不超过 20"等也是随机事件；试验 E_3 中，"灯泡的寿命超过 100 h"和"灯泡寿命在 300～500 h 之间"等亦是随机事件。以下用字母 $A, B, C, \cdots$ 或 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ 表示随机事件。显然，试验中的每一个可能结果都是一个最简单的随机事件，称为基本事件。可见，随机事件是由若干基本事件组成的。随机事件 A 发生，当且仅当组成 A 的基本事件有一个发生。

在试验中必然会发生的事件称为必然事件，记为 S。不可能发生的事件称为不可能事件，记为 $\varnothing$。如 E_1 中，"出现的点数大于 0"是必然事件；"出现的点数小于 1"是不可能事件。必然事件和不可能事件实际上并不是随机事件，但为了讨论方便，也把它们当作一种特殊的随机事件。

1.1.2　样本空间

定义 1　试验 E 的全部基本事件组成的集合，称为试验 E 的样本空间，记为 S。

就是说，试验 E 的基本事件是 E 的样本空间中的元素。基本事件又称为样本点。

如前面的试验 E_1, E_2, E_3 的样本空间分别为：$S_1=\{1,2,\cdots,6\}$，$S_2=\{0,1,2,\cdots\}$，$S_3=\{t \mid t\geqslant 0\}$。

又如"投掷一枚硬币"，这个试验的样本空间 $S=\{$反面向上，正面向上$\}$。若以 0,1 分别表示"反面向上"和"正面向上"这两个基本事件，则样本空间可简单地表示为 $S=\{0,1\}$。实际中，只有两种可能结果的试验是很多的。如检查一件产品是正品或是次品；射击目标是击中或

是不中;人的身体健康与否等等。这些试验的样本空间都可以用 $S=\{0,1\}$ 来表示。

引入样本空间的概念之后,随机事件便是样本空间的子集。特别地,不可能事件 $\varnothing$ 表示空集,而必然事件 S 表示样本空间。这样,我们就可以引用集合论的有关知识来讨论事件间的关系与运算。

1.1.3 随机事件的关系与运算

设 E 的样本空间为 S,而 $A,B,C,A_i(i=1,2,\cdots)$ 为 E 的事件。

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 A 含于事件 B,或称事件 B 包含事件 A,记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$。若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称 A 与 B 相等(或称 A 与 B 等价),记为 $A=B$。例如,掷骰子的试验中,令 $A=\{$出现 2 点$\}$,$B=\{$出现点数小于 4$\}$,$C=\{$出现点数不大于 3$\}$,则有

$$A\subset B,\qquad B=C$$

特别地,对任意事件 A 有

$$\varnothing\subset A\subset S$$

"事件 A 与 B 至少有一个发生",这一事件称为 A 与 B 之和,记为 $A+B$ 或 $A\cup B$。例如,试验 E_1 中,令 $A=\{2,4,6\}$,$B=\{4,5,6\}$,则 $A+B=\{2,4,5,6\}$。显然,若 $B\subset A$,则 $A+B=A$。对任意事件 A 有

$$A+A=A,\qquad \varnothing+A=A,\qquad A+S=S$$

"事件 A 与 B 同时发生",这一事件称为 A 与 B 之积,记为 AB 或 $A\cap B$。如试验 E_1 中,$A=\{2,3,4,5\}$,$B=\{1,3,5\}$,则 $AB=\{3,5\}$。特别地,若 $B\subset A$,则 $AB=B$。对任意事件 A 有

$$AA=A,\qquad AS=A,\qquad \varnothing A=\varnothing$$

若事件 A 与 B 不能同时发生,即 $AB=\varnothing$,则称事件 A 与 B 互不相容或称 A 与 B 互斥。如试验 E_1 中,$A=\{2,4\}$,$B=\{5,6\}$,则 $AB=\varnothing$。显然不可能事件 $\varnothing$ 与任何事件 A 互不相容。如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中的任意两个事件都互不相容,则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 互不相容。特别地,若 $AB=\varnothing$ 且 $A+B=S$,则称事件 A 与 B 互逆,或称 A 与 B 对立,即 A 是 B 的逆事件(对立事件),记为 $A=\overline{B}$;B 是 A 的逆事件(对立事件),记为 $B=\overline{A}$。如在试验 E_1 中,$A=\{1,2,3\}$,$B=\{4,5,6\}$,则 A 与 B 互逆。显然

$$\overline{\overline{A}}=A,\qquad \overline{\varnothing}=S,\qquad \overline{S}=\varnothing$$

"事件 A 发生而 B 不发生"这一事件称为 A 与 B 之差,记为 $A-B$。如在试验 E_1 中,$A=\{1,2,3\}$,$B=\{2,3,4\}$,则 $A-B=\{1\}$。特别地,有

$$A-A=\varnothing,\qquad A-\varnothing=A,\qquad S-A=\overline{A}$$

不难验证:对任意事件 A,B,有

$$A-B=A-AB=A\overline{B}$$

事件的和与积的概念可以推广到有限多个或可列无穷多个事件的情形，即 $A=\sum_i A_i$ 表示"事件 $A_1,A_2,\cdots,A_i,\cdots$ 中至少有一个发生"这一事件。

$B=\prod_i A_i$ 表示"事件 $A_1,A_2,\cdots,A_i,\cdots$ 同时发生"这一事件。

事件间的关系与运算可用几何图形直观地表示(参看图 1-1)。

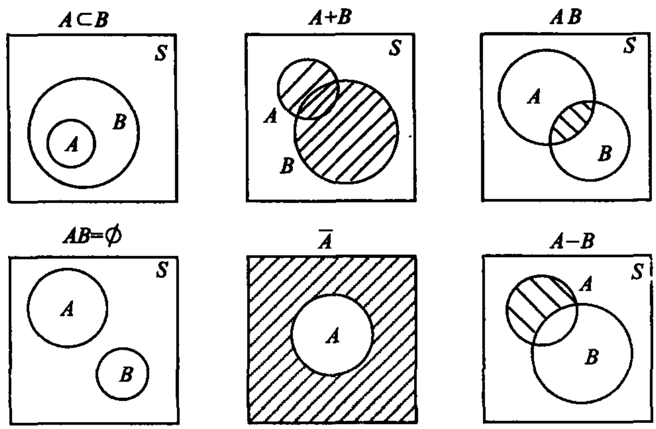

图 1-1

由于事件是样本空间的子集，不难验证事件之间的运算满足下列规则：

(1) 交换律　$A+B=B+A$，　$AB=BA$

(2) 结合律　$(A+B)+C=A+(B+C)$，$(AB)C=A(BC)$

(3) 分配律　$(A+B)C=AC+BC$，$(AB)+C=(A+C)(B+C)$

(4) 德莫根(De Morgan)公式　对有限个或可列无穷多个事件 A_i，恒有

$$\overline{\sum_i A_i}=\prod_i \overline{A}_i,\qquad \overline{\prod_i A_i}=\sum_i \overline{A}_i$$

例 1　重复投掷一枚匀称的硬币三次，记录投掷结果。设 A_i="第 i 次投掷出现正面"，$i=1,2,3$。试用 A_1,A_2,A_3 描述样本空间 S 和下列各个事件：

(1) 只第一次出现正面(B_1)；

(2) 只出现一次正面(B_2)；

(3) 至少出现一次正面(B_3)；

(4) 出现正面不多于一次(B_4)。

解　易知样本空间 S 共有八个基本事件。

$S=\{A_1A_2A_3,\ A_1A_2\overline{A}_3,\ A_1\overline{A}_2A_3,\ \overline{A}_1A_2A_3,\ A_1\overline{A}_2\overline{A}_3,\ \overline{A}_1A_2\overline{A}_3,\ \overline{A}_1\overline{A}_2A_3,\ \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\}$

(1)"只第一次出现正面"是指：第一次出现正面，而第二、三次均出现反面。于是 $B=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$。

(2)“只出现一次正面”是指:或者仅第一次出现正面,或者仅第二次出现正面,或者仅第三次出现正面。所以

$$B_2 = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$$

(3)“至少出现一次正面”是指:可能只出现一次正面,也可能出现两次正面,也可能三次都出现正面。于是

$$B_3 = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3 + A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3 + A_1A_2A_3$$

或表示为

$$B_3 = A_1 + A_2 + A_3$$

(4)“出现正面不多于一次”是指:或者仅出现一次正面,或者三次都出现反面。所以

$$B_4 = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$$

由于 B_4 的对立事件是“至少两次出现正面”,所以 B_4 又可表示为

$$B_4 = \overline{A_1A_2 + A_1A_3 + A_2A_3}$$

1.2 概率的定义及性质

随机事件在一次试验中既可能发生,也可能不发生。如果在相同的条件下,把一个试验重复做许多次,我们一定会发现,某些事件发生的次数多一些,而另一些事件发生的次数少一些。例如,将一颗骰子重复掷 100 次,毫无疑问,事件“出现奇数点”比事件“出现 1 点”发生的次数会多得多。那么,发生次数多的事件在每次试验中发生的可能性大一些,而发生次数少的事件在每次试验中发生的可能性小一些。问题是:如何度量事件发生可能性的大小?对于事件 A,如果实数 $P(A)$满足:(1) 数 $P(A)$的大小表示事件 A 发生可能性的大小;(2) $P(A)$是事件 A 所固有的、不随人们主观意志而改变的一种度量,那么数 $P(A)$称为事件 A 的概率。它是事件 A 发生可能性的度量。

在本节中,首先介绍一类最简单的概率模型,然后逐步引出概率的一般定义。

1.2.1 概率的古典定义

设试验 E 的样本空间 S 只包含有限个基本事件,即 $S=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$,并且每个基本事件发生的可能性相等,即 $P(e_1)=P(e_2)=\cdots=P(e_n)$,则称这种试验为古典型随机试验,简称古典概型。下面来讨论古典概型中事件 A 的概率 $P(A)$。

考虑一个具体的例子:投掷一颗匀称的骰子,观察其出现的点数。易知 $S=\{e_1,e_2,\cdots,e_6\}$,其中 e_i 表示出现 i 点,$i=1,2,\cdots,6$。由于骰子是匀称的,所以每个基本事件 e_i 发生的可能性相同。这是个古典概型。考虑事件 $A=\{e_2,e_4,e_6\}$。因为事件 A 包含的基本事件的个数等于基本事件总数的一半,并且每个基本事件发生的可能性都相等,因此事件 A 发生的可能

性，即概率 $P(A)=\frac{1}{2}$ 是合理的。它恰好是 A 包含的基本事件的个数除以基本事件总数所得的结果。

定义 2　设试验 E 的样本空间 $S=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，且 $P(e_1)=P(e_2)=\cdots=P(e_n)$，$E$ 中事件 A 包含 k 个基本事件，则称 $P(A)=\frac{k}{n}$ 为事件 A 的概率。

即事件 A 的概率等于事件 A 所包含的基本事件的个数与基本事件总数的比值。概率的这种定义称为概率的古典定义。这样定义的概率称为古典概率。

由概率的古典定义，容易证明古典概率具有下列性质：

(1) 对任意事件 A，$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2) $P(S)=1$；

(3) 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 互不相容，则

$$P\left(\sum_{i=1}^{m}A_i\right)=\sum_{i=1}^{m}P(A_i)$$

证　因为任一事件 A 所包含的基本事件数 k 恒满足 $0\leqslant k\leqslant n$，故

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1$$

由于必然事件 S 包含了全部 n 个基本事件，所以

$$P(S)=\frac{n}{n}=1$$

设事件 A_i 含有 $k_i(0\leqslant k_i\leqslant n)$ 个基本事件，由定义得

$$P(A_i)=\frac{k_i}{n},\qquad i=1,2,\cdots,m$$

由于 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 互不相容，故 $\sum\limits_{i=1}^{m}A_i$ 含有 $\sum\limits_{i=1}^{m}k_i$ 个不同的基本事件，因此

$$P\left(\sum_{i=1}^{m}A_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}k_i=\sum_{i=1}^{m}\frac{k_i}{n}=\sum_{i=1}^{m}P(A_i)$$

性质(3)称为概率的有限可加性。

例 1　盒内装有 5 个红球，3 个白球。从中任取两个，试求：(1) 取到两个红球的概率；(2) 取到两个相同颜色球的概率。

解　设

A=“取到两个红球”

B=“取到两个同颜色的球”

从 8 个球中任取两个，每种取法为一基本事件，所有不同取法的总数就是基本事件总数。于是基本事件总数为 C_8^2。由于两个红球只能在 5 个红球中任取，所以事件 A 包含的基本事件数为 C_5^2。故由定义 2 得

$$P(A)=\frac{C_5^2}{C_8^2}=\frac{5}{14}$$