应用高等数学

（下册）

白淑岩　杨鹏　主编

清华大学出版社

应用高等数学

（下册）

白淑岩　杨　鹏　主　编
陈　晖　原华丽　张立红　副主编

清华大学出版社
北　京

内容简介

本教材分上、下两册，共 11 章内容。上册主要内容有：函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，积分及其应用，二元函数微积分简介，常微分方程；下册主要内容有：拉普拉斯变换，无穷级数，线性代数初步，向量代数与空间解析几何，概率论与数理统计初步。每节后面都配有一定数量的习题和综合练习题，并在每册书末附有习题参考答案。

本教材在保持数学体系基本完整的前提下，淡化理论推导，注重数学应用。例题注重讲述解题思路及方法，突出直观教学；习题配备难易适当，深入浅出；编写起点适中，内容层次分明，方便选择性教学和学生自学。

本教材可作为高职高专工科各专业、经济与管理类专业的高等数学教材，也可作为高职院校专升本辅导教材。

图书在版编目（CIP）数据

应用高等数学. 下册/白淑岩，杨鹏主编. --北京：清华大学出版社，2012.8
ISBN 978-7-302-28862-6

Ⅰ. ①应… Ⅱ. ①白… ②杨… Ⅲ. ①高等数学—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 104747 号

责任编辑：石 磊 赵从棉
封面设计：傅瑞学
责任校对：王淑云
责任印制：王静怡

出版发行：清华大学出版社
网 址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地 址：北京清华大学学研大厦 A 座 **邮 编**：100084
社 总 机：010-62770175 **邮 购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京嘉实印刷有限公司
经 销：全国新华书店
开 本：185mm×230mm **印 张**：12.5 **字 数**：272 千字
版 次：2012 年 8 月第 1 版 **印 次**：2012 年 8 月第 1 次印刷
印 数：1～3000
定 价：23.00 元

产品编号：045991-01

前言

高等数学是高职高专教育的一门重要基础课，该课程不仅为学生后继课程的学习提供必备的数学工具，而且是培养高职学生数学素养和理性思维能力的重要途径.本教材以教育部《关于全面提高高等职业教育教学质量的若干意见》和教育部新修订的《高职高专教育高等数学教学基本要求》为指导，充分研究当前我国高职教育现状，坚持以“应用为目的，必须够用为度，学有所需，学有所用”的定位原则，培养高职院校学生可持续发展的职业能力和迁移能力，突出高等数学的应用性.

本教材力求体现如下特点：

定位准确，针对性强.以高职高专院校的培养目标为依据，在体现数学思想为主的前提下删繁就简，深入浅出，既注重高等数学的基础性，又适当保持学科的科学性与系统性，同时更注重其工具性.

优化教材内容，突出应用性.考虑到高职高专不同专业对高等数学的需求不同、课时分配不同等实际原因，内容编排上去除繁冗，淡化理论推导，体现数学“来源于实践，服务于实践”的思想，将数学知识与实际案例充分融合，有效缩短数学与专业知识的距离，使学生对抽象的数学知识的背景理解更深刻，应用更有效.

引入先进的数学软件，使学生计算手段现代化.注重培养学生用计算机和数学软件进行计算的实际能力，让学生充分认知现代工具的快捷性和实用性，从而更有效地用数学软件求解数学模型以及解决实际工作中的复杂计算问题.

提高了学生分析问题、解决问题的能力.由于摒弃了传统的对数学知识系统进行的盘点式教学方法，以应用为目的将实际案例与数学知识相融合，使学生加深了对数学概念与方法的理解，提高了用数学知识分析和处理实际问题的能力.又由于学生学会了用数学软件进行计算，从而提高了学生解决复杂实际问题的能力.

本教材可作为高职高专工科各专业、经济与管理类专业的高等数学教材，也可作为高职院校专升本辅导教材.

鉴于编者水平有限，书中不当之处在所难免，敬请读者与同行指正.

编　者

2012 年 4 月

目 录

第7章 拉普拉斯变换及其逆变换

拉普拉斯变换是为了解决工程计算中遇到的一些基本问题而发明的一种"运算法"(算子法). 这种方法的基本思想就是通过积分运算,把一种函数变成另一种函数,从而使运算变得更加简洁方便. 拉普拉斯变换在电学、力学等众多的工程与科学技术领域得到广泛应用,特别是在电路分析和工程控制理论的研究中,在相当长的时期内,人们几乎无法将它们与拉普拉斯变换分开来谈论.

本章将简要地介绍拉普拉斯变换的基本概念、主要性质、拉普拉斯变换的逆变换及拉普拉斯变换的简单应用.

7.1 拉普拉斯变换

7.1.1 拉氏变换的基本概念

定义 7.1 设函数 $f(t)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上有定义,如果含有变量 s 的广义积分 $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$ 在 s 的某一取值范围内收敛,则此积分就确定了一个以 s 为自变量的函数,记为 $F(s)$,即

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t.$$

函数 $F(s)$ 称为 $f(t)$ 的**拉普拉斯变换**(简称**拉氏变换**),记为 $F(s)=L[f(t)]$,函数 $F(s)$ 也称为 $f(t)$ 的**像函数**.

若函数 $F(s)$ 是 $f(t)$ 的拉氏变换,则称 $f(t)$ 是 $F(s)$ 的**拉氏逆变换**(或称为 $F(s)$ 的**像原函数**),记为 $L^{-1}[F(s)]$,即

$$f(t) = L^{-1}[F(s)].$$

对拉氏变换的定义作如下说明:

(1) 在许多有关物理与无线电技术的问题中,一般总是把所研究的问题的初始时间定为 $t=0$,当 $t<0$ 时没有过程或无实际意义,因此在定义中只要求函数 $f(t)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上有定义. 为了研究拉氏变换某些性质的方便,以后总假定在区间 $(-\infty,0)$ 内,$f(t)\equiv0$.

（2）拉氏变换中的参数 s 是可以在复数域中取值的，但为了方便和问题的简化，本章只讨论 s 是实数的情况，所得结论也适用于 s 是复数的情况.

（3）拉氏变换是将给定的函数通过广义积分转换成一个新的函数，它是一种积分变换. 一般说来，在科学技术中遇到的函数的拉氏变换总是存在的.

7.1.2 几种常用函数的拉氏变换

根据拉氏变换的定义容易求得下列常用函数的拉氏变换.

1. 指数函数 $f(t)=e^{at}$（$t\geqslant 0$，a 为常数）的拉氏变换

$$L[e^{at}]=\int_0^{+\infty}e^{at}e^{-st}dt=\int_0^{+\infty}e^{-(s-a)t}dt=-\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)t}\Big|_0^{+\infty}.$$

该积分在 $s>a$ 时收敛，并且有

$$L[e^{at}]=\int_0^{+\infty}e^{at}e^{-st}dt=\frac{1}{s-a},\quad s>a.$$

2. 幂函数 $f(t)=t^n$（$t\geqslant 0$，n 是正整数）的拉氏变换

$$L[t^n]=\int_0^{+\infty}t^n e^{-st}dt=-\frac{t^n}{s}e^{-st}\Big|_0^{+\infty}+\frac{n}{s}\int_0^{+\infty}t^{n-1}e^{-st}dt=\frac{n}{s}\int_0^{+\infty}t^{n-1}e^{-st}dt=\frac{n}{s}L[t^{n-1}].$$

特别地，$L[t]=\frac{1}{s}L[t^0]=\frac{1}{s}L[1]=\frac{1}{s^2}$，所以 $L[t^n]=\frac{n}{s}L[t^{n-1}]=\cdots=\frac{n!}{s^{n+1}}$.

3. 三角函数 $f(t)=\sin\omega t$ 与 $f(t)=\cos\omega t$（$t\geqslant 0$）的拉氏变换

$$L[\sin\omega t]=\int_0^{+\infty}\sin\omega t\, e^{-st}dt=\frac{e^{-st}}{s^2+\omega^2}(s\sin\omega t+\omega\cos\omega t)\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{\omega}{\omega^2+s^2}\quad(s>0),$$

同理，$L[\cos\omega t]=\frac{s}{\omega^2+s^2}(s>0)$.

4. 自动控制技术中常用的几个函数的拉氏变换

1）单位阶梯函数及其拉氏变换

函数 $u(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t\geqslant 0\end{cases}$ 称为**单位阶梯函数**（也称**单位阶跃函数**）.

单位阶梯函数的拉氏变换为

$$L[u(t)]=\int_0^{+\infty}u(t)e^{-st}dt=\int_0^{+\infty}e^{-st}dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{s},\quad s>0.$$

2）斜坡函数 $f(t)=at$（$t\geqslant 0$，a 为常数）的拉氏变换

$$L[at]=\int_0^{+\infty}at\,e^{-st}dt=a\int_0^{+\infty}te^{-st}dt=aL[t]=a\frac{1}{s^2}=\frac{a}{s^2},\quad s>0.$$

3) **狄拉克函数(单位脉冲函数)**及其拉氏变换

在许多实际问题中,常会遇到强度极大但持续时间极短的冲击性现象,如闪电、猛烈碰撞,等等,这种瞬间作用的量不能用通常的函数表示,为此引入了狄拉克(Dirac)函数. 下面以碰撞为例说明狄拉克函数的概念.

设打桩机在打桩时,质量为 m 的锤以速度 v_0 撞击钢筋混凝土桩,在极短的时间 $(0,\tau)$ (τ 为一个很小的正数)内,锤的速度由 v_0 变为 0,由物理学中的动量定律知,桩所受到的冲击力为 $F=\frac{mv_0}{\tau}$. 所以作用时间越短(即 τ 的值越小),冲击力就越大.

为了便于讨论,不妨设 $mv_0=1$,若将冲击力 F 看做时间 t 的函数,可以近似表示为

$$F_\tau(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \dfrac{1}{\tau}, & 0\leqslant t\leqslant\tau.\\ 0, & t>\tau\end{cases}$$

对于上述碰撞现象最恰当的处理方法是令 $\tau\to 0$,如果 $t\neq 0$,则 $F_\tau(t)\to 0$;如果 $t=0$,则 $F_\tau(t)\to\infty$,即

$$F(t)=\lim_{\tau\to 0}F_\tau(t)=\begin{cases}0, & t\neq 0,\\ \infty, & t=0.\end{cases}$$

对于函数 $F_\tau(t)$ 的极限 $F(t)=\lim\limits_{\tau\to 0}F_\tau(t)$,已经不能用已学过的普通函数来表示,对于具有这种特性的式子给出如下定义.

定义 7.2 设

$$\delta_\tau(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{1}{\tau}, & 0\leqslant t\leqslant\tau,\\ 0, & t>\tau\end{cases}\quad \text{其中 } \tau \text{ 是个很小的正数,如图 7-1 所示.}$$

当 $\tau\to 0$ 时,$\delta_\tau(t)$ 的极限称为**狄拉克函数**(或**单位脉冲函数**),简称**δ-函数**,记为

$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\delta_\tau(t)=\begin{cases}0, & t\neq 0\\ \infty, & t=0\end{cases},\text{如图 7-2 所示.}$$

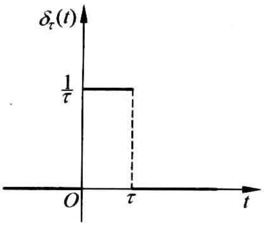

图 7-1

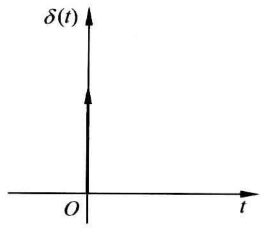

图 7-2

因为对任何 $\tau>0$，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_\tau(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0}\delta_\tau(t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{\tau}\delta_\tau(t)\mathrm{d}t+\int_{\tau}^{+\infty}\delta_\tau(t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{\tau}\frac{1}{\tau}\mathrm{d}t=1,$$

所以规定 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1$.

狄拉克函数 $\delta(t)$ 具有以下性质：

(1) 设 $g(t)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数，那么 $g(t)\delta(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的积分等于函数 $g(t)$ 在 $t=0$ 处的函数值，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\delta(t)\mathrm{d}t=g(0),$$

从而

$$\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=g(t_0).$$

(2) 狄拉克函数 $\delta(t)$ 是偶函数.

(3) 狄拉克函数 $\delta(t)$ 的拉氏变换为

$$L[\delta(t)]=\lim_{\tau\to 0}L[\delta_\tau(t)]=\lim_{\tau\to 0}\int_{0}^{+\infty}\delta_\tau(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\lim_{\tau\to 0}\int_{0}^{\tau}\frac{1}{\tau}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\lim_{\tau\to 0}\frac{1-\mathrm{e}^{-\tau s}}{\tau s}=1.$$

5. 周期函数的拉氏变换

设 $f(t)$ 是一个周期为 T 的周期函数，即 $f(t)=f(t+kT)$（k 为整数），则

$$\begin{aligned}L[f(t)]&=\int_{0}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_{0}^{T}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t+\int_{T}^{2T}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t+\cdots+\int_{kT}^{(k+1)T}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t+\cdots\\&=\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{kT}^{(k+1)T}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\xlongequal{\text{令 } t=\tau+kT}\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{0}^{T}f(\tau+kT)\mathrm{e}^{-s(\tau+kT)}\mathrm{d}\tau\\&=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-skT}\int_{0}^{T}f(\tau)\mathrm{e}^{-s\tau}\mathrm{d}\tau=\sum_{k=0}^{+\infty}(\mathrm{e}^{-sT})^k\int_{0}^{T}f(\tau)\mathrm{e}^{-s\tau}\mathrm{d}\tau\\&=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-sT}}\int_{0}^{T}f(\tau)\mathrm{e}^{-s\tau}\mathrm{d}\tau\quad(t>0,\mathrm{e}^{-sT}<1),\end{aligned}$$

所以，周期函数的拉氏变换为

$$L[f(t)]=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-sT}}\int_{0}^{T}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t.$$

例 1 周期三角波函数 $f(t)=\begin{cases}t, & 0\leqslant t<b\\ 2b-t, & b\leqslant t<2b,\end{cases}$ 以 $2b$ 为周期，求 $L[f(t)]$.

解 由周期函数的拉氏变换可得

$$\begin{aligned}L[f(t)]&=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2bs}}\int_{0}^{2b}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2bs}}\left[\int_{0}^{b}t\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t+\int_{b}^{2b}(2b-t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\right]\\&=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2bs}}\cdot\frac{1}{s^2}(1-\mathrm{e}^{-bs})^2=\frac{1-\mathrm{e}^{-bs}}{s^2(1+\mathrm{e}^{-bs})}.\end{aligned}$$

7.1.3 常用函数的拉氏变换公式

在实际工作中，为了应用的方便，对于一些常用函数的拉氏变换，列表如下(表 7-1).

表 7-1 常用函数的拉氏变换表

序号	$f(t)$	$F(s)$	序号	$f(t)$	$F(s)$
1	$\delta(t)$	1	12	$\cos(\omega t+\varphi)$	$\dfrac{s\cos\varphi-\omega\sin\varphi}{s^2+\omega^2}$
2	$u(t)$	$\dfrac{1}{s}$	13	$t\sin\omega t$	$\dfrac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
3	t	$\dfrac{1}{s^2}$	14	$t\cos\omega t$	$\dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
4	$t^n(n\in\mathbb{N})$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	15	$\sin at\cdot\sin bt$	$\dfrac{2abs}{[s^2+(a+b)^2][s^2+(a-b)^2]}$
5	e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$	16	$e^{-at}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(s^2+a^2)^2+\omega^2}$
6	$1-e^{at}$	$\dfrac{a}{s(s+a)}$	17	$e^{-at}\cos\omega t$	$\dfrac{s+a}{(s^2+a^2)^2+\omega^2}$
7	te^{at}	$\dfrac{1}{(s-a)^2}$	18	$e^{at}-e^{bt}$	$\dfrac{a-b}{(s-a)(s-b)}$
8	$t^ne^{at}(n\in\mathbb{N})$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	19	$\sin\omega t-\omega t\cos\omega t$	$\dfrac{2\omega^3}{(s^2+\omega^2)^2}$
9	$\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$	20	$\dfrac{1}{a^2}(1-\cos at)$	$\dfrac{1}{s(s^2+\omega^2)}$
10	$\cos\omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	21	$2\sqrt{\dfrac{t}{\pi}}$	$\dfrac{1}{s\sqrt{s}}$
11	$\sin(\omega t+\varphi)$	$\dfrac{s\sin\varphi+\omega\cos\varphi}{s^2+\omega^2}$	22	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{s}}$

例 2 求函数 $f(t)=\sin 2t\cdot\sin 3t$ 的拉氏变换.

解 根据拉氏变换表中的第 15 式，取 $a=2,b=3$，可得

$$L[\sin 2t\cdot\sin 3t]=\frac{12s}{(s^2+5^2)(s^2+1^2)}=\frac{12s}{(s^2+25)(s^2+1)}.$$

7.1.4 拉普拉斯变换的性质

利用拉普拉斯变换的性质可以计算较为复杂的函数的拉氏变换. 为了叙述方便，假定在这些性质中，凡是涉及的函数，其拉氏变换都存在.

性质 1(线性性质) 若 α,β 是常数，且 $L[f_1(t)]=F_1(s)$，$L[f_2(t)]=F_2(s)$，则

$$L[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]=\alpha L[f_1(t)]+\beta L[f_2(t)]=\alpha F_1(s)+\beta F_2(s).$$

性质 1 表明，函数的线性组合的拉氏变换等于各函数的拉氏变换的线性组合. 该性质可以推广到有限个函数的线性组合的情形.

例 3 求函数 $f(t)=5\sin 2t+2t^2+3$ 的拉氏变换.

解 $L[5\sin 2t+2t^2+3]=5L[\sin 2t]+2L[t^2]+3L[1]$，

查拉氏变换表得

$$L[f(t)]=5\cdot\frac{2}{s^2+2^2}+2\cdot\frac{2!}{s^{2+1}}+3\cdot\frac{1}{s}=\frac{10}{s^2+4}+\frac{4}{s^3}+\frac{3}{s}.$$

性质 2（平移性质） 若 $L[f(t)]=F(s)$，a 为常数，则

$$L[e^{at}f(t)]=F(s-a).$$

这个性质指出，像原函数 $f(t)$ 乘以 e^{at} 的拉氏变换等于其像函数作位移 a，因此称这个性质为平移性质.

例 4 求函数 $f(t)=e^{-2t}\sin\left(4t+\frac{\pi}{2}\right)$ 的拉氏变换.

解 因为 $L\left[\sin\left(4t+\frac{\pi}{2}\right)\right]=\dfrac{s\cdot\sin\frac{\pi}{2}+4\cos\frac{\pi}{2}}{s^2+4^2}=\dfrac{s}{s^2+16}$，因此，根据平移性质有

$$L\left[e^{-2t}\sin\left(4t+\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{s-(-2)}{[s-(-2)]^2+16}=\frac{s+2}{(s+2)^2+16}.$$

拉氏变换表 7-1 中的公式 8、16、17 等都可以利用此性质推出.

性质 3（延滞性质） 若 $L[f(t)]=F(s)$，常数 $a\geqslant 0$，则

$$L[f(t-a)]=e^{-as}F(s).$$

若 t 表示时间，性质 3 表明，时间延滞了 a 个单位，相当于它的拉氏变换 $F(s)$ 乘以指数因子 e^{-as}，如图 7-3 所示.

例 5 求函数 $u(t-a)=\begin{cases}0, & t<a\\ 1, & t\geqslant a\end{cases}$ 的拉氏变换.

解 由 $L[u(t)]=\dfrac{1}{s}$ 及性质 3 可得

$$L[u(t-a)]=\frac{1}{s}e^{-as}.$$

例 6 求阶梯函数 $f(t)=\begin{cases}c_1, & 0\leqslant t<a\\ c_2, & t\geqslant a\end{cases}$ $(c_2>c_1>0)$ 的拉氏变换.

解 如图 7-4 所示，因为当 $t\geqslant a$ 时，$f(t)$ 在 c_1 的基础上增加了 c_2-c_1，即 $(c_2-c_1)u(t-a)$，所以 $f(t)=c_1u(t)+(c_2-c_1)u(t-a)$，于是

$$L[f(t)]=\frac{c_1}{s}+\frac{c_2-c_1}{s}e^{-as}.$$

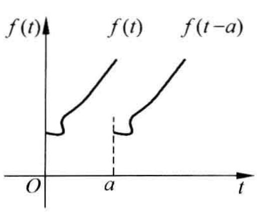

图 7-3

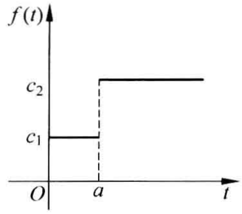

图 7-4

将例 6 推广,若

$$f(t)=\begin{cases} c_1, & 0 \leqslant t < a_1 \\ c_2, & a_1 \leqslant t < a_2 \\ \vdots & \\ c_n, & a_{n-1} \leqslant t < a_n \end{cases},$$

其中 $0<a_1<a_2<\cdots<a_n, c_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为常数,则 $f(t)$ 可以用单位阶梯函数表示成

$$f(t)=c_1u(t)+(c_2-c_1)u(t-a_1)+(c_3-c_2)u(t-a_2)+\cdots+(c_n-c_{n-1})u(t-a_n),$$

其拉氏变换为 $L[f(t)]=\dfrac{1}{s}[c_1+(c_2-c_1)\mathrm{e}^{-a_1s}+(c_3-c_2)\mathrm{e}^{-a_2s}+\cdots+(c_n-c_{n-1})\mathrm{e}^{-a_ns}]$.

性质 4(微分性质) 若 $L[f(t)]=F(s)$,则 $L[f'(t)]=sF(s)-f(0)$.

性质 4 表明,函数求导后的拉氏变换,等于参数 s 乘以函数的拉氏变换后,再减去该函数的初始值.

一般地,若 $L[f(t)]=F(s)$,则

$$L[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0).$$

特别地,当 $f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$ 时,有

$$L[f^{(n)}(t)]=s^nF(s).$$

通过性质 4 可以将函数 $f(t)$ 的微分方程化为像函数 $F(s)$ 的代数方程,从而为求解微分方程提供了一种简便的方法.

例 7 利用拉氏变换的微分性质,求下列函数的拉氏变换.

(1) $f(t)=\cos\omega t$; (2) $f(t)=t^n$.

解 (1) 因为 $f(0)=1, f'(0)=0, f''(t)=-\omega^2\cos\omega t$,所以

$$L[f''(t)]=L[-\omega^2\cos\omega t]=-\omega^2L[\cos\omega t].$$

由拉氏变换的微分性质可知

$$L[f''(t)]=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)=s^2L[\cos\omega t]-s$$

所以 $-\omega^2L[\cos\omega t]=s^2L[\cos\omega t]-s$,可得

$$L[\cos\omega t]=\frac{s}{s^2+\omega^2}.$$

（2）因为 $f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0, f^{(n)}(t)=n!$，所以

$$L[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)=s^nL[t^n],$$

又

$$L[f^{(n)}(t)]=L[n!]=\frac{n!}{s},$$

即

$$s^nL[t^n]=\frac{n!}{s},$$

所以

$$L[t^n]=\frac{n!}{s^{n+1}}.$$

性质 5（积分性质） 若 $L[f(t)]=F(s)\,(s\neq 0)$，且 $f(t)$ 连续，则

$$L\left[\int_0^t f(x)\mathrm{d}x\right]=\frac{F(s)}{s}.$$

性质 5 表明，函数积分后的拉氏变换，等于函数的拉氏变换除以参数 s.

例 8 利用拉氏变换的积分性质，求函数 $f(t)=\sin 5t$ 的拉氏变换.

解 因为 $L[\cos 5t]=\frac{s}{s^2+25}$，$\sin 5t=5\int_0^t \cos 5x\mathrm{d}x$，所以

$$L[\sin 5t]=L\left[5\int_0^t \cos 5x\mathrm{d}x\right]=5\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{s}{s^2+25}=\frac{5}{s^2+25}.$$

性质 6（相似性质） 若 $L[f(t)]=F(s)$，常数 $a>0$，则

$$L[f(at)]=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right).$$

性质 6 表明，像原函数的自变量扩大 a 倍，像函数的自变量反而缩小同样的倍数.

性质 7（像函数的微分性质） 若 $L[f(t)]=F(s)$，则

$$L[t^nf(t)]=(-1)^nF^{(n)}(s)\quad \text{或}\quad F^{(n)}(s)=L[(-t)^nf(t)].$$

例 9 利用像函数的微分性质，求函数 $f(t)=t\sin\omega t$ 的拉氏变换.

解 因为 $L[\sin\omega t]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}=F(s)$，所以

$$L[t\sin\omega t]=(-1)\cdot F'(s)=-\left(\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right)'=\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}.$$

性质 8（像函数的积分性质） 若 $L[f(t)]=F(s)$，且 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}$ 存在，则

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_s^{+\infty}F(s)\mathrm{d}s.$$

例 10 利用像函数的积分性质，求函数 $f(t)=\frac{\sin t}{t}$ 的拉氏变换，并求 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.

解 因为 $L[\sin t]=\dfrac{1}{s^2+1}=F(s)$，且 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$，所以

$$L\left[\frac{\sin t}{t}\right]=\int_s^{+\infty}\frac{1}{s^2+1}\mathrm{d}s=\arctan s\,\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-\arctan s.$$

由拉氏变换的定义可知，$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}-\arctan s$，当 $s=0$ 时，$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$.

表 7-2 给出了拉氏变换的性质.

表 7-2 拉氏变换的性质

性　　质	设 $L[f(t)]=F(s)$
1. 线性性质	$L[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]=\alpha F_1(s)+\beta F_2(s)$
2. 平移性质	$L[\mathrm{e}^{at}f(t)]=F(s-a)$
3. 延滞性质	$L[f(t-a)]=\mathrm{e}^{-as}F(s)\ (a>0)$
4. 微分性质	$L[f'(t)]=sF(s)-f(0)$ $L[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)-[s^{n-1}f(0)+s^{n-2}f'(0)+\cdots+f^{(n-1)}(0)]$
5. 积分性质	$L\left[\int_0^t f(t)\mathrm{d}t\right]=\dfrac{F(s)}{s}$
6. 相似性质	$L[f(at)]=\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right)\ (a>0)$
7. 像函数的微分性质	$L[t^nf(t)]=(-1)^nF^{(n)}(s)$
8. 像函数的积分性质	$L\left[\dfrac{f(t)}{t}\right]=\int_s^{+\infty}F(s)\mathrm{d}s$

习　题　7.1

1. 求下列函数的拉氏变换.

(1) $f(t)=\mathrm{e}^{-4t}$；

(2) $f(t)=t^3+2t-2$；

(3) $f(t)=5\sin 2t-3\cos 2t$；

(4) $f(t)=(t-1)^2\mathrm{e}^t$；

(5) $f(t)=t\cos 3t$；

(6) $f(t)=t\mathrm{e}^t\sin t$；

(7) $f(t)=\dfrac{\mathrm{e}^{3t}-\mathrm{e}^{2t}}{t}$；

(8) $f(t)=\begin{cases}-1, & 0\leqslant t<4\\ 1, & t\geqslant 4\end{cases}$.

2. 设 $f(t)=t\sin at$，验证 $f''(t)+a^2f(t)=2a\cos at$，并利用此结果求 $L[f(t)]$.

7.2 拉普拉斯变换的逆变换

7.1 节主要讨论了由已知函数 $f(t)$ 求它的像函数 $F(s)$ 的问题，但是在实际应用中常常会碰到与此相反的问题，即由已知像函数 $F(s)$ 求它的像原函数 $f(t)$，这就是拉普拉斯逆变