金融衍生品的定价与最优套期保值策略

闫海峰 著

科学出版社

金融衍生品的
定价与最优套期保值策略

闫海峰　著

科 学 出 版 社
北　京

内 容 简 介

本书系统地研究了指数半鞅模型的未定权益定价和套期保值问题. 其中包括：一般指数半鞅模型的资产定价基本定理、未定权益的定价与套期保值策略；多维扩散过程模型、随机波动率模型、跳扩散半鞅模型的未定权益近似定价，套期保值策略（均值-方差套期保值策略与效用无差别套期保值策略）以及各类等价鞅测度；具有限制信息和附加信息市场模型的套期保值策略. 此外，系统介绍了期权定价的鞅方法和保险精算方法.

本书可作为高等院校金融学、金融工程、金融数学、数理统计等相关专业高年级学生和研究生教学参考书，也可供财经类相关专业的研究生、教师、科研工作者和从事金融风险管理以及资产定价方面的实务操作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

金融衍生品的定价与最优套期保值策略/闫海峰著. —北京：科学出版社，2012

ISBN 978-7-03-035150-0

Ⅰ. ①金… Ⅱ. ①闫… Ⅲ. ①金融市场-研究 Ⅳ. ①F830. 9

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 162094 号

责任编辑：伍宏发　曾佳佳　黄　海 / 责任校对：纪振红

责任印制：赵德静 / 封面设计：许　瑞

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2012 年 7 月第 一 版　开本：787×1092 1/16

2012 年 7 月第一次印刷　印张：18

字数：408 000

定价：58.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

当珞珈山开满樱花的时候
（代序）

四月的江南，正是珞珈山开满樱花的时候。我钻进自己的书屋，伏在案头，捧起闫海峰教授的《金融衍生品的定价与最优套期保值策略》一书。

我的眼前又浮现出闫教授的身影。闫教授是我们武汉大学的校友，他在武汉大学专攻数学。他学习、生活在樱园，在那一片樱花烂漫的地方。

我记得一位很著名的国际数学大师曾经说过，数学其实就像音乐一样，很美妙很美妙。但是数学这种美妙又与音乐有所不同，音乐的美妙可以雅俗共赏，而数学的美妙只有学会了数学的人才能心领神会。同样的道理，数理金融也像音乐一样美妙，但数理金融的美妙却需要既懂数学又懂金融的人来感受。

闫教授就是这样一位既懂数学又懂金融的人。我曾经在紫金山下听他长谈，关于美国的金融危机、关于金融工程和数理金融的关系、关于中国金融工程的现状与发展、关于中国金融工程人才的培养，等等。

现在读着他的专著，又仿佛在听他如数家珍，娓娓道来：关于随机分析、关于鞅定价、关于套期保值、关于期权的保险精算定价、关于……

闫教授此时此刻，不仅在聆听，而且是在演说。由于这位演说者不仅在数学上下过硬功夫，而且在金融上同样下过大功夫，所以，他的演说便具有了非常浓厚的“功夫数理金融”的味道。同这样的演说者一起去研读和欣赏音乐一般的数理金融，将是最为便捷的路径和最为愉悦的行程。

真想马上清点行装，再去南京，与闫教授倾心交谈，向他请教，什么是指数半鞅模型，什么是跳扩散模型，什么是非时齐泊松跳的扩散过程模型。

对于闫教授的这部作品，我非常清醒，我并非是一个合格的听众，但是有一点我却深信不疑，它一定就会像珞珈山上的樱花，让每一个正在金融工程与数理金融之路上的观花人，赏心悦目，受益匪浅。

我还在想，一个经济上正在崛起的大国，人民币不国际化是不行的。人民币要想国际化，不放开金融市场是不行的。要放开金融市场，没有大批金融高端人才是不行的。而谁要想成为金融高端人才，我就会捧上这部作品，向其真诚推荐。

我在书屋中继续写着序言。写着写着，我又想起了漫山遍野的樱花，我又看见了春风正吹过繁花盛开的枝头，我又听见了花瓣落地的声响。

叶永刚

2012年4月4日

于武昌珞珈山

前　言

数理金融学是一门新兴交叉学科，涉及现代金融学的资产定价理论、投资组合理论以及现代数学中的随机分析、随机控制、优化理论、统计等学科.它的理论研究不仅丰富和发展了现代金融学，而且对数学的许多分支起到了推动作用.未定权益的定价和套期保值理论不仅对金融工具的不断创新和金融市场的有效运作产生直接影响，而且在公司的投资决策、项目评估和风险管理中有广泛的应用.

本书系统地研究了指数半鞅模型的未定权益定价和套期保值问题.证明了指数半鞅模型的资产定价基本定理；给出了指数半鞅模型等价局部鞅测度存在的充要条件；证明了指数半鞅模型资产定价的第一和第二基本定理；当市场是无套利不完备市场时，获得了均值方差最优和拟局部风险最小套期保值策略的存在且唯一的充要条件，并且给出了这两种最优套期保值策略的精确表达式和未定权益的最优近似定价；系统研究了最小熵鞅测度、效用无差别定价及效用无差别套期保值策略.获得了最小熵鞅测度存在且唯一的充要条件；讨论了效用无差别定价的性质及其与最小熵鞅测度的关系；构造了效用无差别定价及效用无差别套期保值策略；当市场有套利机会存在时，用新的定价方法——保险精算定价方法，给出了欧式期权的保险精算定价.

本书适合作为高等院校金融学、金融工程、金融数学等相关专业高年级学生和研究生学习动态资产定价理论的教材，同时对金融风险管理以及资产定价方面的实务操作也有一定的指导意义.

本书在写作过程中得到了恩师胡迪鹤教授、韦博成教授、刘三阳教授、方兆本教授、叶永刚教授和林金官教授的悉心指导，并得到国家自然科学基金(项目批准号：70871058)、江苏省博士后科研项目资助计划(苏人通[2005]354-355#)、江苏高校优势学科建设工程资助项目(PAPD)以及南京财经大学学术著作出版资助项目的资助.作者参考了大量国内外论文、论著和教材，借鉴了大量的前人研究成果，对这些论文、论著和教材的作者与编者表示感谢.特别是科学出版社南京分社的伍宏发副社长，他为本书的出版倾注了大量的心血，在此一并表示感谢.本书的部分内容曾和杨建奇(非标准市场套期保值)、刘利敏(效用无差别定价)、翟永会(随机分析引论)、李晓春(Levy 过程鞅测度刻画)、董晓娜、聂红科、刘洁、赵守娟等进行过多次讨论最后形成初稿，没有他们的帮助，此书的出版也是不可能的.虽然我们倾注了大量的精力和时间来完成这本书，但错误和不当之处在所难免，敬请读者指正.

闫海峰

2012 年 4 月 1 日

目　　录

0 绪　　论

数理金融学是一门新兴的交叉学科，在国际金融界和应用数学界受到高度重视. 1997年诺贝尔经济学奖授予 Scholes 和 Merton 就是为了奖励他们在期权定价(如著名的 Black-Scholes 公式)等数理金融学方面的贡献. 数理金融学之所以被人们如此重视的主要原因是：首先，随着金融市场的蓬勃发展，金融市场呈现出高度的不确定性与高风险性，特别是这几年金融衍生工具给国际金融业造成巨大冲击，促使学术界和实业界开始考虑如何正确评估衍生产品的风险性，如何加强对资产投资组合的风险管理，这些客观要求使得人们对金融衍生证券的研究更加重视；其次，由于未定权益定价的基本原理已融汇于其他的经济理论中，这使得关于未定权益定价一般原理的探索、期权定价模型的建立及其实证检验分析越来越受到金融学界的重视；最后，数理金融学模型的建立，对金融市场风险分析、预测与监控有着非常重要的作用.

0.1　数理金融学的历史

数理金融学是金融学和数学的交叉性学科，它通过建立金融市场的数学模型，利用数学工具(如概率论和最优化理论)研究风险资产(包括金融衍生产品和金融工具)的定价、避险和最优投资消费策略的选择. 数理金融学是现代金融学的核心，它不仅对金融工具的不断创新和金融市场的有效运作产生直接影响，而且在公司的投资决策、研究项目的评估和金融机构的风险管理中有广泛的应用.

数理金融学的研究对象是金融市场上风险资产的投资和交易，其目的是利用有效的数学工具揭示金融学的本质特征，并且对具有潜在风险的各种未定权益进行合理定价和选择规避风险的最优策略. 现代数理金融学被认为是两次“华尔街革命”的产物. 第一次“华尔街革命”是指 1952 年马科维茨(H. M. Markowitz，1990 年诺贝尔经济学奖获得者之一)的证券组合选择理论的问世. 第二次“华尔街革命”是指 1973 年布莱克-索尔斯(Black-Scholes)期权定价公式的问世. 两次“革命”的共同特点是避开了一般经济均衡的理论框架，从而导致以华尔街为代表的国际金融市场发生巨大变革，其直接产物就是一门新兴的交叉学科——数理金融学的诞生.

数理金融学的历史最早可以追溯到 1900 年法国数学家巴歇里埃(L. Bachelier)的博士论文——投机理论(the theory of speculation). 这位法国天才在 Einstein 和 Wiener(在 1905 年正式建立 Brown 运动的数学模型)之前就已经认识了 Wiener 函数的一些重要性质，如扩散方程和 Brown 运动的极值分布，并在其博士论文“投机理论”中首次用 Brown 运动来描述股票价格的变化，并给出了欧式买权的定价公式. 遗憾的是，他在建立模型时犯了三个原则性错误：第一，假设标的股票的价格服从正态分布，这使得股价出现负值的

概率大于零，从而与实际的股票价格明显不符；第二，认为在离到期日足够远的时候，买权的价值可能大于标的股票的价值，这显然也是不可能的；第三，假设股票的期望报酬(即股价变化的平均值)为零，这违背了股票市场的实际情况. 正因如此，Bachelier 的论文一直不被人重视，直到 1965 年由著名的经济学家萨缪尔逊(P. Samuelson，1970 年诺贝尔经济学奖获得者)的推荐才被金融界知晓. 尽管如此，他提出的效率市场的概念为后人的研究指出了方向.

1952 年马科维茨的博士论文"投资组合的选择"(Portfolio selection)是金融学也是数理金融学的一个重大突破. 他考虑这样的问题：如果一名投资者为减少风险而同时对多种股票进行投资，那么怎样的投资组合最好？为解决这一问题，他提出了均值-方差最优投资组合模型. 他认为，投资者的目标应该是收益的期望效用最大化，而不仅仅是期望收益最大化. 他用收益率的方差来衡量风险，将各证券收益率之间的比例作为变量，从各证券收益率的统计特性出发，先用二次规划确定可供投资者选择的有效投资组合边界，然后根据投资者的效用函数(对收益和风险的权衡)确定最优投资组合. 这是一个单阶段的投资组合问题，后来众多学者用动态规划的方法将这一理论推广到多阶段的情形.

1954 年阿罗(K. Arrow，1972 年诺贝尔经济学奖获得者之一)和德布罗(G. Debreu，1983 年诺贝尔经济学奖获得者之一)提出了不确定性经济的一般均衡模型，它是金融资产均衡定价理论的基础，是现代数理金融学的重要源泉之一. 他们用泛函分析中的不动点定理严格证明了均衡的存在性. 阿罗在均衡的稳定性、证券市场的经济理论、价格体系对分散化决策的可能性、竞争均衡的 Pareto 最优性等一系列问题上都有影响深远的贡献.

1958 年莫迪里亚尼(F. Modigliani，1985 年诺贝尔经济学奖获得者)和米勒(M. H. Miller，1990 年诺贝尔经济学奖获得者之一)首次从金融市场均衡理论出发研究了公司财务决策，提出的 Modigliani-Miller 定理(M-M 定理)已经成为公司财务理论的基础. 他们在假定金融市场处于均衡状态、公司无赋税且无破产成本的前提下，证明了公司的市场价值只依赖于它的利润流，而与公司的资本结构(债券与股权之比)无关，也与它的分红策略(债券者与股权者之间利润分割)无关. 他们首次提出了无套利假设. 简单地讲，无套利假设是指在一个完善的金融市场中，不存在套利机会(即确定的低买高卖之类的机会). 利用无套利假设证明了：如果 M-M 定理不成立，则在金融市场上可以构造出有套利机会的投资策略. 套利推理对数理金融学的发展(如套利定价理论和期权定价鞅方法)产生了重要的影响.

20 世纪 60 年代中期，在马科维茨的均值-方差投资组合理论的基础上，夏普(W. F. Sharpe)、林特纳(J. Lintner)和毛新(J. Mossin)研究了在竞争均衡市场中，金融资产的价格形成，提出了著名的资本资产定价模型(capital asset pricing model，CAPM). 他们用投资组合(或更一般的资本资产)的价格变化与"市场投资组合"(即按每种证券的市值与市场中证券总市值之比确定权重)的价格变化之间的回归系数来衡量证券交易的风险. 他们认为市场投资组合是刻画证券市场总体变化的量，理论上可由马科维茨的分析得到，实际计算时可由证券指数得到. 他们证明了在均衡市场中，市场投资组合是有效投资组合，每种组合资产的预期收益率和它们与市场投资组合的协方差之间有线性关系，这就是资本

资产定价模型. CAPM 在证券估价、投资组合绩效的测定、资本预算和投资风险分析中得到广泛应用. 马科维茨、夏普、米勒三人因其在金融学中的巨大贡献(投资组合理论、CAPM、M-M 定理)而获得 1990 年诺贝尔经济学奖.

1973 年布莱克(F. Black)和索尔斯(M. S. Scholes)在"期权定价与公司负债"一文中提出著名的 Black-Scholes 公式. 几乎与此同时,默顿(R. Merton)在"合理的期权定价理论"一文中对 B-S 模型和定价公式做了多方面系统的推广. 三人关于期权定价理论的开创性工作被誉为华尔街的"第二次革命",默顿和索尔斯因此获得了 1997 年的诺贝尔经济学奖(Black 于 1995 年英年早逝,未能分享此项殊荣). 他们的理论和 Markowitz-Sharpe 理论一起构成了蓬勃发展的新学科——数理金融学的主要内容,同时也是研究新型衍生证券设计的新学科——金融工程的理论基础. 期权(option)是一种最典型的未定权益(contingent claim),它是一种合约,它的持有者有权利(但无义务)在一指定日期或一时期内以预先约定的价格购买或出售一定数量和品质的标的资产. 在 Bachelier(1900)的研究基础上,人们对期权定价问题进行了长期的研究,后来 Cowles(1930),Kendall 和 Osborne(1950),Sorenkle(1961),Boness(1964)在股票市场的建模方面也做了一些工作. 但具有实质性进展的结果应属于 P. Samuelson(1965). 1950 年著名统计学家 L. J. Savage 再一次发现了巴歇里埃博士的结果并将这一发现告诉了 P. Samuelson,后者进一步发展了巴歇里埃的有关股票价格波动的结果. 1964 年,Sprenkle 提出了"股票价格服从对数正态分布"的基本假设,并肯定了股价发生随机漂移的可能性. 同年,Boness 将货币时间价值的概念引入期权定价过程,但他没有考虑期权和标的股票之间风险水平的差异. P. Samuelson(1965)用几何 Brown 运动来刻画股票的波动规律,并且在假定期权的风险水平与股票的风险水平不同的基础上提出了一个欧式期权的定价模型. 1969 年 P. Samuelson 和 Merton 又提出了另一个期权定价模型,在这一模型中,他们假设期权价格是股票价格的函数,所得的定价公式依赖于对"典型"的投资者所假定的效用函数. 在此之前,虽然学者们已经建立了各种各样的期权定价模型,但这些模型几乎无任何实用价值,因为它们或多或少地包含一些主观的参数,如投资者个人对风险的态度、市场均衡价格等. 直到 1973 年,期权定价理论才有了突破性的进展,Black 和 Scholes 在前人研究的基础上,发现在无套利的条件下投资者对股票收益的预期是风险中性的,期权价值不依赖于每个投资者对股票收益率的预期. 他们在"期权定价与公司负债"一文中,假定股票价格遵循几何 Brown 运动,股票的收益率和波动率为常数,利用无套利假设和随机分析中的伊藤(K. Ito)公式证明了股票期权价格可被表示成股票价格 S_t 和时间 t 的函数 $\mathscr{F}(t,S_t)$,并且得到了 $\mathscr{F}(t,S_t)$ 满足的偏微分方程以及它的显式解,即 B-S 公式. 在这一工作中,随机分析中的 Ito 公式和随机过程的马氏性起了关键的作用. 正是随机分析在金融衍生定价中的应用,引起了很多数学家对金融的极大兴趣. 所以,B-S 公式的出现不仅在金融界引起了一次"革命",而且在数学上对随机分析、随机控制、非线性分析、偏微分方程、数值分析、数理统计等许多方面也带来了巨大的推动力.

1976 年罗斯(S. A. Ross)针对资本资产定价模型(CAPM)的单因素假定(即假定影响证券收益率的只是单个市场因素)提出了一个多因子模型,即套利定价理论(arbitrage pricing theory,APT),这一理论后来被称为是"资产定价基本定理",其主要结论是:无套

利假设等价于某种等价概率测度的存在，这使得每一种金融资产对该概率测度的期望收益率都等于无风险证券的收益率. APT 是一个多因子模型，它提供了度量股票价格如何随众多的经济因素的改变而变化的方法，而模型的具体结构则由经验来确定. 同年，考克斯(J. C. Cox)和罗斯提出了风险中性定价理论，这一理论对后来的期权定价鞅方法产生了重要影响. 1997 年罗斯和考克斯以及鲁宾斯坦(M. Rubinstein)一起，利用资产定价基本定理给出了 B-S 公式的简化证明，并提出了二项式期权定价模型. 他们将股票价格设想为在未来若干时间间隔中越来越不确定地分叉变化，而在每两个时间间隔之间都有“未来收益的期望值等于无风险收益率”成立. 由此得到期权定价的离散模型，而 B-S 公式无非是这一离散模型当时间间隔趋向于零时的极限.

1979 年哈里森(J. M. Harrison)和克瑞普斯(S. R. Kreps)提出期权定价的鞅方法，他们用鞅论中的鞅测度概念来刻画无套利市场和不完全市场，并用等价鞅测度对期权进行定价、套期保值或对冲. 他们证明了市场无套利的充要条件是等价鞅测度存在；市场完备的充要条件是等价鞅测度存在且唯一；当市场是完备市场时，任意未定权益都是可达到的，并且可由市场上的基础证券无套利复制，此时，任意未定权益都有唯一的无套利定价，并且任意未定权益的定价为未定权益期末收益的折现值在等价鞅测度下的数学期望. 这一结果使随机分析中的鞅测度的概念与金融市场的无套利概念联系起来，从而使随机分析中半鞅的随机积分理论在金融衍生证券定价理论中有了用武之地，这对以后的数理金融学的发展产生了极其深远的影响.

纵观数理金融学在 20 世纪 80 年代以前这段历史，这一阶段奠定了数理金融学的基本框架，并且其基本内容已初步形成. 特别是 50 年代以后，数理金融学在资产组合理论、公司财务理论、资产定价理论、期权定价理论等方面都有较丰富的发展.

现代数理金融学应该从 20 世纪 80 年代算起，这一时期一大批从事不同学科的科学工作者，如数学(概率论与随机分析、随机控制论、优化理论、数理统计)、统计物理学、非线性科学等学科的科研工作者被吸引到金融领域. 他们试图用本学科研究方法来揭示金融市场这一复杂系统的演变规律. 正是这些科学工作者的工作，使得数理金融学得到了蓬勃发展，主要工作可归纳为以下几个方面.

1) 期权定价与实物期权

期权定价理论在以下几个方面得到了丰富和发展：

(1) 将 B-S 模型推广到带跳的扩散过程(Fabio et al. ,1993)和随机波动率情形，以便解释从实际期权市场观察到的、而 B-S 模型又无法解释的现象. 有关随机波动率模型可参看 Hull 和 White(1987)，J. B. Wiggins(1987)，Chesney 和 Scott(1989)，Stein(1991)，Heston(1993)，S. J. Taylor(1994)，J. Danielson(1994)，M. Fridman 和 L. Harris(1998)，S. J. Koopman 和 E. H. Uspensky(2002).

(2) 研究依赖价格变化路径的变异期权(exotic option)定价及其数值计算方法. 现有文献主要集中研究完备市场模型下(扩散过程模型)各种变异期权的定价问题. 对不完备市场，大部分文献在研究随机波动率模型下的变异期权定价和套期保值问题. 相关文献可参看 P. Carr 等(1998).

(3) 研究不完全市场[主要是带跳的随机过程(Levy 过程)和一般的半鞅过程模型]中的期权定价、套期保值或对冲以及最优消费与投资组合的选择问题. 目前,文献大部分都集中在研究一般半鞅模型下,资产定价的基本定理、未定权益的近似定价以及最优套期保值策略的选择. 在该领域的研究中 Harrison 和 Pliska(1979,1981,1983),F. Delbaen(1991,1994,1995,1998a,1998b),J. Jacod 和 Shiryaev(1998),H. Follmer 和 D. Sondermann(1986),H. Pham(1996,1998,2000),M. Schweizer(1990,1991,1992,1994,1995,1996,1998,1999,2001),Dalang,Morton 和 Willinger(1990),Stricker(1990),R. Jarrow 和 D. B. Madan(1999)等学者做了大量有意义的工作.

(4) 研究带"摩擦"的金融市场中的期权套期保值或对冲,这里"摩擦"是指有交易成本、税收、买卖价差和各种约束条件.

(5) 带违约风险的期权定价问题.

(6) 不对称信息下的市场交易.

(7) 实物期权. 该类期权是以实物或无形资产作为期权的标的资产,它是期权定价理论在公司财务分析(如资本预算)中的应用. 麦克唐纳(McDonald)和西格尔(Siegel)(1986)1986 年首次提出实物期权的概念,迪克希特(A. Dixit)给出了实物期权的广泛应用.

2) 金融计量经济学

金融计量经济学在以下三个方面有较大进展:

(1) 提出了扩散过程模型中参数的各种估计方法. 如极大似然估计法、广义矩方法、模拟矩方法、非参数方法.

(2) 提出了一些行之有效的金融时间序列模型. 如 R. F. Engle(1982)的自回归条件异方差(ARCH)模型,Bollerslev(1986)的广义自回归条件异方差(GARCH)模型,Nelson(1991)的指数 GARCH(EGARCH)模型,证明了可用 EGARCH 来逼近连续时间的扩散过程.

(3) 在市场的微结构分析中,研究了金融市场中存在的买卖价差(bid-ask spread)以及非等时间间隔和非同步交易等问题.

3) 最优消费-投资组合

默顿首次在连续时间金融模型下用随机动态规划方法研究了最优消费-投资组合问题. 此后,众多学者对这一问题做了深入研究. 1987 年,I. Karatzas 等从随机分析中鞅的表示定理出发,将完全市场中的动态最优消费-投资组合问题转化为比较容易处理的静态最优化问题.

4) 利率的期限结构

为研究利率衍生产品的定价和风险管理,提出了许多利率期限结构模型,如 Vasicek 模型(1977)、CIR 模型(1985)、HJM 模型(1992)和 BGM 模型(1997).

5）金融工程

金融工程是集数理金融学、计算数学和工程学为一体的综合性交叉学科，其主要研究范围包括新金融产品和工具的设计与开发. 20世纪80年代以来，为计算美式期权和复杂的变异期权的价格，数学家提出了一些行之有效的方法，如有限差分方法、Monte-Carlo方法和遗传算法等.

0.2 未定权益定价与套期保值的主要内容

未定权益定价与套期保值是当今数理金融学研究的热点问题之一. 目前，有大批数学工作者（主要是从事随机分析、随机控制、优化理论和数理统计等学科的研究者）云集该领域，他们将很深奥的数学概念（如鞅测度）与金融学中的概念（如无套利和市场完备性）相联系，试图说明或解释金融现象. 本节就有关未定权益的定价和套期保值的研究作一综述，以便读者能够对该领域研究现状和研究方法有一个初步认识.

研究未定权益的定价和套期保值问题，首先要解决市场的无套利性和完备性的刻画问题，即资产定价基本定理. 第一基本定理涉及无套利机会（absence of arbitrage opportunities）存在与等价鞅测度（equivalent martingale measures）存在之间的关系. 第二基本定理涉及市场完备性与等价鞅测度的唯一性之间的关系. F. Delbaen（1993，2003）在一般半鞅模型假设下研究了无套利与等价鞅测度存在之间的关系，并获得了一系列重要的结果. Harrison 和 Kreps（1979），Harrison 和 Pliska（1981，1983），Taqqu 和 Willinger（1987）系统阐述并建立了未定权益分析的两个基本定理. Back 和 Pliska（1991）研究了无限证券市场模型下的资产定价的基本定理，并给出了无限证券市场模型下资产定价第一基本定理的一个反例. Dalang，Morton 和 Willinger（1990），Stricker（1990），Delbaen 和 Marc（2002），Lakner（1993），F. Delbaen 和 W. Schachermayer（1994，1998b）讨论了资产价格过程为一般半鞅模型下的第一基本定理. 在市场上存在有限多个资产的情况下，Harrison 和 Pliska（1983）推广了资产定价的第二基本定理. R. Jarrow 和 D. B. Madan（1999）将资产定价的基本定理从有限个可交易资产推广到无限个可交易资产的情况.

未定权益（contingent claims）是指一切未确定的（或然的）权益. 本书中未定权益主要指一切金融衍生证券和金融工具. 常见的金融衍生证券有远期合同（forward contracts）、期货（futures）、期权（options）和互换（swaps）. 期权是最典型也是最常用的一种未定权益. 我们以期权为例来说明未定权益这一概念.

期权是一项选择权，期权交易实质上是一种权利的买卖，期权的一方在向对方支付一定数额的货币（期权价）后，即拥有一定时间内以一定价格向对方购买或出售一定数量和一定品质的某种商品或有价证券（这一商品或有价证券被称为标的资产）的权利，而不承担必须买进或卖出的义务. 看涨期权（call option）的持有者有权在某一确定时间以某一确定的价格购买标的资产；看跌期权（put option）的持有者有权在某一确定时间以某一确定的价格出售标的资产. 期权被执行时支付给标的资产的价格叫做“执行价格”或“敲定价格”（exercise price or strike price）. 期权可被执行的最后时期叫“到期日”、“执行日”或“期

满日”(expiration date, exercise date or maturity date). 美式期权(American options)可在期权有效期内任何时候执行,欧式期权(European options)只能在到期日执行. 期权赋予其持有者做某件事的权利,在期权有效期内,持有者有购买或出售标的资产的权利,但没有一定要行使其权利的义务.

未定权益定价是指为了拥有在将来某时刻(如 T 时刻)支付的未定权益 H 而现在应该支付的费用. 传统的未定权益定价方法有 M. F. Sharpe 等的资本资产定价模型、S. A. Ross 的套利定价理论、Black-Scholes 期权定价理论、J. C. Cox 和 S. A. Ross 的风险中性定价理论,这些传统的定价方法都需要一个基本的市场假设条件,即市场是无套利的完备市场. 然而,现实市场中完备的金融市场是极为罕见的一种理想市场,大量存在的是不完备的金融市场. Harrison 和 Kreps(1979),Harrison 和 Pliska(1981,1983)用等价鞅测度来刻画金融市场的无套利性和完备性,并提出了未定权益定价的鞅方法. 这一方法不仅适用于完备市场,而且对不完备市场也十分有效. 它证明了市场无套利的充要条件是等价鞅测度存在,市场完备的充要条件是等价鞅测度存在且唯一,当市场是完备市场时,任意未定权益都有唯一的无套利定价,并且未定权益的定价为未定权益期末收益的折现值在等价鞅测度下的数学期望. 在无套利的不完备市场上,由于有多个(无穷多个)等价鞅测度,而未定权益的折现价格在每一个等价鞅测度下的数学期望都是该未定权益的无套利定价,这时为了给出最合理的定价,需要按照一定的最优性标准从所有的等价鞅测度集中种选择某些特定的鞅测度. 现有文献中通常用的最优性准则有三种:极小等价鞅测度(Föllmer et al. ,1991;J. P. Ansel et al. ,1993;M. Schweizer,1992a,1995b,1999;P. Li et al. ,2002),方差最优等价鞅测度(M. Schweizer,1996;F. Delbaen et al. ,1996a;J. P. Laurent et al. 1999;T. Arai,2001),最小相对熵等价鞅测度(M. Frittelli,2000b;Y. Miyahara,2000;T. Fujiwara et al. ,2003). 但到目前为止还没有一种方法被公认为是最好的. V. Henderson(2002)在随机波动率模型下对上述三种鞅测度所给出的定价进行了比较分析. 1998 年,M. Bladt 和 H. H. Rydberg(1998)首次提出期权定价的保险精算方法,他们将“公平保费”原理引入期权定价,将期权定价问题转化为等价的保险问题. 这一方法不仅对无套利完备市场有效,而且对有套利非均衡的市场模型也有效. 闫海峰和刘三阳(2003a,2003b,2003c)对保险精算方法做了进一步的研究,在不同的市场模型假设下研究了保险精算定价和鞅方法定价之间的关系.

未定权益的套期保值问题,是解决未定权益的出售者选择什么样的策略才能避免或尽可能降低因出售未定权益而在未来可能遭受的损失. 在完备市场上,任意未定权益都是可达到的,即总可以找到能够完全复制未定权益的确定性的投资组合,所以未定权益的潜在风险可由复制策略完全对冲. 在不完备市场上,由于真实的金融市场上随机因素的个数大于可用于交易的基础证券个数,从而导致未定权益不可能由现存的基础证券无套利复制,所以在不完备的金融市场上存在着大量的不可达到的未定权益,用市场上现有的基础证券来复制这些不可达未定权益是有风险的,即有一定的复制成本. 为了选择使复制成本最低的组合策略,必须确定一个最优性准则. 目前,最常用的选择最优套期保值策略的准则有三种:一种是由 Föllmer 和 Sondermann(1986)提出的风险最小准则,另一种是由 Bouleau 和 Lamberton(1998)首次提出的均值方差最优准则,还有一种是由 S. D. Hodegs

和 A. Neuberger(1998)首次提出的效用无差别定价准则. 由于在一般半鞅模型下风险最小策略未必存在,所以在 1988 年 M. Schweizer(1990,1991)又提出了局部风险最小策略的概念. H. Follmer 和 M. Schweizer(1991)证明了局部风险最策略存在的充要条件是未定权益 H 具有 F-S 分解;M. Schweizer(1994a)研究了基于部分信息的风险最小策略问题;R. Frey 和 W. J. Runggaldier(1999)研究了随机波动率模型下的局部风险最小策略的构造问题;P. Fischer, E. Platen, W. J. Runggaldier(1999)研究了扩散过程模型下,基于部分信息的风险最小化策略的构造问题. 在均值方差最优准则下,选择均值方差最优套期保值策略实质上是一个在 L^2 范数下的最小距离问题. 解决这一问题通常有两种途径,一种是直接用 L^2 空间的投影定理,另一种是通过坐标变换和概率测度变换,将问题转化为能够直接用 Kunita-Watanabe 投影定理来解决的情况(Gourieroux et al. ,1998). 使用投影定理的关键是要证明 $G_T(\Theta_2^S)$ 是 L^2 中的闭子空间. M. Schweizer(1994b, 1995a, 1996), M. Schal(1994), P. Monat 和 C. Stricker(1995)给出了一般半鞅模型下 $G_T(\Theta_2^S)$ 是闭的充分条件, F. Delbaen, P. Monat, W. Schachermayer, M. Schweizer, C. Stricker(1990)给出了一个充要条件. 关于均值方差最优策略的构造问题,在风险资产的价格过程是连续的情况下已有不少结果,如 Boulean 和 Lamberton(1998)研究了风险资产价格过程 S 是 P-鞅的特殊情况;Duffie 和 Richardson(1991)研究了 S 是一般半鞅的情况;Schweizer(1992a)和 Hipp(1993,1996)研究了 S 是几何 Brown 运动的情况;在一些限制条件下,Schal(1994), Schweizer(1995b)研究了离散时间框架下的未定权益的套期保值问题;在一般连续半鞅模型下,Schweizer(1994a), Monat 和 Stricker(1995), T. Rheinländer 和 M. Schweizer(1997), H. Pham 等(1998,2000)给出了构造均值方差最优策略的方法. 对具有不连续的半鞅模型(如带跳的 Levy 过程模型),均值方差最优策略的构造问题到目前还是一个悬而未解的难题. 目前,对于效用无差别套期保值策略的研究还处于起步阶段,对于它的构造还没有一个统一的方法,但许多学者对效用无差别套期保值策略的研究做了探索. F. Delbaen, P. Grandits, T. Rheinländer, D. Samperi, M. Schweizer 和 C. Stricker 研究了局部有界半鞅下指数效用函数的最优投资组合和最小熵鞅测度之间的对偶问题,得到了效用无差别定价和套期保值策略的刻画;Y. M. Kabanov 和 C. Stricker(2002b)进一步分析了一般半鞅下的指数效用最优投资策略的鞅性质;R. Rouge 和 E. N. Karoui(2000)研究了效用最大化定价和熵的关系,用倒向随机微分方程给出了最优财富过程和最优投资策略的刻画;D. Becherer 用反应扩散系统(reaction-diffusion systems)给出了随机波动率模型的效用无差别定价和效用无差别套期保值策略;M. P. Owen 研究了基于效用最优的套期保值策略;J. Cvitanic, W. Schachermayer 和 H. Wang 研究了有随机赋值情况下不完全市场的效用最大化问题.

有关非标准市场下未定权益的定价与套期保值问题也是目前备受关注的问题之一. M. Schweizer(1994a)研究了限制信息下的局部风险最小套期保值问题;Frey 和 Runggaldier(1999)研究了风险资产价格仅能在离散的时间点上被观测到模型下的风险最小套期保值问题;Pham(2002)研究了具有不可料漂移的扩散模型下的均方套期保值问题;杜立金、刘继春和汤思英(2004)讨论了保险合约的局部风险最小套期保值问题;王春发(2002)也研究了有支付过程的局部风险最小策略问题;成海波(2004)讨论了获取信息有

花费时限制信息下的风险最小套期保值问题;A. Grorud 和 M. Pontier(1998)讨论了连续时间金融市场中的内部信息者的最优消费和投资问题,J. Amendinger,P. Imkeller 和 M. Schweizer(1998)研究了内部信息者附加对数效用问题;J. Amendinger(2000)研究了有初始扩大信息流下的鞅表示定理;A. Grorud(2000)比较了有初始扩大信息流的带跳市场中的两类投资者最优投资策略;A. Grorud 和 M. Pontier(2001)研究了不对称信息市场的完备性和无套利性;F. Biagini 等(2004)用 Malliavin 积分讨论了内部信息者均方最优套期保值策略.

1 随机分析引论

未定权益定价与套期保值的数学基础主要是随机数学.随机分析构成了金融衍生证券定价的重要理论基础与分析手段.尤其是几何 Brown 运动、多维扩散过程、带 Poisson 跳的几何 Brown 运动和指数 Levy 过程等随机过程以及 Ito 随机积分理论在金融学中得到了广泛的应用,可用以分析与解决几乎所有的金融衍生证券的定价与套期保值问题.本章主要介绍数理金融学所必需的随机分析的基本知识,力求用尽可能少的篇幅介绍现代概率论基础和随机分析的一些重要定义和定理,目的是为解决更为复杂的金融衍生证券定价和套期保值问题提供一个良好的理论基础.

1.1 现代概率论基础

现代概率论(probability theory)以测度论(measure theory)为基础.概率实际上是建立在事件域上的测度,用公理化体系的语言来建立概率空间始于事件 σ-域(代数).

定义 1.1.1 设 Ω 是一个集合,$\mathscr{F}$ 是 Ω 的子集合组成的集合族(类),如果 $\mathscr{F}$ 满足:

(1) $\Omega\in\mathscr{F}$;

(2) 若 $A\in\mathscr{F}$,则 $\overline{A}\in\mathscr{F}$;

(3) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots\in\mathscr{F}$,则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{F}$.

称 $\mathscr{F}$ 为 σ-域(代数),σ-域 $\mathscr{F}$ 中的元素称为可测集(或事件),$(\Omega,\mathscr{F})$ 称为可测空间.

如果 $\mathscr{F}$ 为事件 σ-域,则

(1) $\Phi\in\mathscr{F}$;

(2) 如果 $A_n\in\mathscr{F},n\geqslant 1$,则 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{F}$.

若 $\mathcal{G}$ 是 Ω 中的子集类,包含 $\mathcal{G}$ 的一切 σ-域的交集称为由 $\mathcal{G}$ 生成的 σ-域,记为 $\sigma(\mathcal{G})$.例如,$\forall A\in\mathscr{F}$,集类 $\{A,A^C\}$ 生成的 σ-域为 $\{\Phi,A,A^C,\Omega\}$.

特别地,若 $\Omega=R=(-\infty,\infty)$,$\mathcal{G}$ 为 $\Omega=R=(-\infty,\infty)$ 上的所有开集组成的集类,则由 $\mathcal{G}$ 生成的 σ-域称为 Borel 域,记为 $\mathscr{B}$. Borel 域 $\mathscr{B}$ 中的元素称为 Borel 集.

定义 1.1.2 可测空间 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的概率测度 P 是一个从 Ω 的子集族 $\mathscr{F}$ 到 $[0,1]$ 区间的实值集合函数,满足三公理:

(1) 规范性:$P(\Omega)=1$;

(2) 非负性:$\forall A\in\mathscr{F},0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

(3) 可列可加性:若 $A_1,A_2,\cdots$ 为 $\mathscr{F}$ 中的互不相交的子集列,即 $\{A_i\}_{1\leqslant i<\infty}\subset\mathscr{F},A_iA_j=\Phi,i\neq j$,则有