

考研数学复习指导系列丛书

考研数学 基础篇

常考知识点解析 (数学一)

前后联系内容少 抓住基础考得好

陈启浩等 编著



考研数学复习指导系列丛书

考研数学基础篇 常考知识点解析（数学一）

陈启浩等 编著



机械工业出版社

本书是考研数学复习指导系列丛书的一本，是第一阶段复习指导书。特别适合时间紧，任务重的考生备考复习使用。全书精心解析了 124 个知识点，既覆盖了考试大纲，又整合融会了整个知识体系。书中的例题和练习题精心挑选、解答详尽、方法新颖。认真阅读本书，可在较短时间内，复习好考研数学的基本知识点，掌握参加入学考试所必须的基本概念、基本理论和基本计算方法。

图书在版编目 (CIP) 数据

考研数学基础篇常考知识点解析. 数学一/陈启浩等编著. —北京: 机械工业出版社, 2012. 4

(考研数学复习指导系列丛书)

ISBN 978-7-111-37894-5

I. ①考… II. ①陈… III. ①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 057517 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑: 韩效杰 责任编辑: 韩效杰 陈崇昱

版式设计: 霍永明 责任校对: 张 媛

封面设计: 路恩中 责任印制: 乔 宇

北京机工印刷厂印刷 (三河市南杨庄国丰装订厂装订)

2012 年 7 月第 1 版第 1 次印刷

184mm × 260mm · 33.75 印张 · 835 千字

标准书号: ISBN 978-7-111-37894-5

定价: 59.80 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

电话服务

网络服务

社服 务 中 心: (010) 88361066

门户网: <http://www.cmpbook.com>

销 售 一 部: (010) 68326294

教材网: <http://www.cmpedu.com>

销 售 二 部: (010) 88379649

读者购书热线: (010) 88379203

封面无防伪标均为盗版

前言

本书是根据全国硕士研究生入学统一考试数学一考试大纲编写的，旨在指导广大考研学生在较短时间内，复习好考研数学（包括高等数学、线性代数和概率论与数理统计）的基本知识点，掌握参加入学考试所必须的基本概念、基本理论和基本计算方法。

全书共分八章，每章都以常考知识点为核心展开，这与同类的考研参考书有很大的不同。考研数学的各门课程中，都有庞大的知识点群，要全面熟练掌握它们，对考研学生来说，无论在时间上，或在精力上都是巨大的挑战。因此编入本书的知识点，都是在对考纲进行深入研究和对历届考题进行精心分析，并且考虑到作为读者对象的考研学生都是学过或初步学过考研数学的各门课程的基础上总结提炼出来的，因此本书内容精炼，循序渐进，贴近考纲，贴近考生，特别适合时间紧、任务重的考生备考复习。

全书讲述 124 个常考知识点，每个知识点都由“主要内容”与“典型例题”两部分组成。其中典型例题与每章后所附的练习题都是经过精心挑选的，它们既具有代表性，又贴近使用考题，但难度适中，而且书中的例题和练习题的解答详尽、方法新颖，既能启迪解题思路，又能加深对各个知识点所蕴涵的内容的理解和应用。因此通过例题学习和练习题训练，必能把各个常考知识点真正学到手，真正做到在较短时间内复习好考研数学的基础知识。

本书的写作主要由北京邮电大学陈启浩教授完成，寿宇、陈文超、张利霞、杨友云等老师也参与了部分编写工作。

学无止境，考研学子们加油！

编著者

目 录

前言

A. 高等数学

第一章 极限、连续与一元函数微分学	1
一、函数极限与左、右极限的关系	1
二、两个重要极限	2
三、无穷小的比较	4
四、函数连续的定义	7
五、函数的间断点	9
六、闭区间上连续函数的性质	11
七、数列极限存在准则	13
八、函数可导与导数的概念	16
九、导数的几何意义	19
十、复合函数、反函数及隐函数的导数计算	21
十一、高阶导数的计算	24
十二、函数微分的概念	28
十三、罗尔定理及其应用	30
十四、拉格朗日中值定理和柯西中值定理及其应用	33
十五、泰勒公式及其应用	35
十六、洛必达法则	39
十七、函数的单调性	42
十八、函数极值的计算	45
十九、函数最值的计算	48
二十、不等式的导数证明	50
二十一、方程不同实根个数的判定	53
二十二、曲线凹凸性、拐点的计算曲率、曲率圆的概念	55
二十三、曲线渐近线的计算	59
练习题一	61
练习题一解答	65
第二章 一元函数积分学	70
一、不定积分的换元积分法	70
二、不定积分的分部积分法	74
三、有理函数的不定积分方法	77
四、定积分的概念及其计算方法	81
五、奇、偶函数和周期函数的定积分性质及一个重要公式	84
六、积分上限函数的求导方法	88
七、定积分大小的比较与估计方法	92
八、积分中值定理及其应用	95

九、含定积分的不等式的证明	98
十、积分和式极限的计算	101
十一、反常积分收敛性的概念及其计算	105
十二、平面图形面积的计算	110
十三、旋转体体积的计算	113
十四、曲线弧长与旋转曲面侧面积的计算	116
练习题二	120
练习题二解答	125
第三章 多元函数微积分学	130
一、二元函数极限与连续的概念、偏导数及二阶偏导数的计算	130
二、二元函数全微分	133
三、二元复合函数偏导数及二阶偏导数的计算	136
四、二元隐函数偏导数及二阶偏导数的计算	139
五、方向导数与梯度	143
六、曲面的切平面与法线、空间曲线的切线与法平面方程的计算	146
七、多元函数极值的计算	150
八、多元函数条件极值的计算	153
九、多元连续函数在有界闭区域上最值的计算	157
十、二重积分的计算	160
十一、二次积分积分次序或坐标系的更换方法	165
十二、二重积分大小的比较与估计	169
十三、三重积分的计算	173
十四、关于弧长曲线积分的计算	179
十五、关于坐标曲线积分的计算	185
十六、格林公式、曲线积分与路径无关的条件	190
十七、关于面积曲面积分的计算	195
十八、关于坐标曲面积分的计算	199
十九、高斯公式与散度	204
二十、斯托克斯公式与旋度	209
练习题三	213
练习题三解答	219
第四章 常微分方程与无穷级数	229
一、变量可分离微分方程、齐次微分方程的求解	229
二、一阶线性微分方程与伯努利方程	231
三、全微分方程	233
四、可降阶的二阶微分方程	236
五、二阶齐次线性微分方程	239
六、二阶非齐次线性微分方程	242
七、二阶欧拉方程	245
八、求解方程 $y(x) = \int_0^x g(x, y(t)) dt + h(x)$ 的方法	247
九、级数收敛性的概念与收敛级数的性质	251
十、正项级数的比值判别法与根值判别法	253
十一、正项级数的比较判别法	256

十二、任意项级数的收敛性判别法	259
十三、幂级数的收敛半径、收敛区间与收敛域	262
十四、函数展开成幂级数	266
十五、求幂级数的和函数	271
十六、函数展开成傅里叶级数	276
练习题四	281
练习题四解答	286
附录 高等数学的应用	295
一、变力做功的计算	295
二、转动惯量、质心(形心)的计算	298
三、引力、水的侧压力计算	303
四、由牛顿第二定律求质点的运动规律	308

B. 线性代数

第五章 行列式、矩阵和向量	311
一、 n 阶行列式的概念	311
二、 n 阶行列式按一行(或一列)展开	314
三、矩阵的加法、数乘、乘法、转置运算及分块矩阵	317
四、矩阵的初等变换、初等矩阵及矩阵等价	321
五、伴随矩阵与矩阵求逆运算	324
六、矩阵的秩	328
七、向量组的线性相关性	331
八、向量组的极大线性无关组与秩	334
九、向量组的标准正交化与正交矩阵	337
十、 n 维向量空间	340
练习题五	344
练习题五解答	350
第六章 线性方程组、矩阵特征值与特征向量及二次型	357
一、 n 元齐次线性方程组及其解法	357
二、 n 元非齐次线性方程组及其解法	360
三、矩阵方程求解	364
四、两个线性方程组的同解与公共解	367
五、矩阵的特征值与特征向量	372
六、矩阵相似	375
七、矩阵的相似对角化	379
八、实对称矩阵正交相似对角化	384
九、二次型化标准形	389
十、二次型化规范形	396
十一、正定二次型与正定矩阵	399
练习题六	401
练习题六解答	408

C. 概率论与数理统计

第七章 概率论	416
----------------------	-----

一、随机事件及其概率的概念	416
二、条件概率与乘法公式, 全概率公式与贝叶斯公式	419
三、随机事件的独立性	423
四、(一维) 离散型随机变量及其分布律	425
五、(一维) 连续型随机变量及其概率密度	427
六、(一维) 随机变量的分布函数	430
七、标准正态分布及其性质	434
八、(一元) 随机变量函数的分布	436
九、二维离散型随机变量及其分布律	439
十、二维连续型随机变量及其概率密度	445
十一、二维随机变量的分布函数	449
十二、二维连续型随机变量的两类条件概率的计算	453
十三、两个随机变量的独立性	456
十四、二元随机变量函数的分布	460
十五、二维正态分布的性质	465
十六、随机变量的数学期望	468
十七、随机变量的方差与矩	472
十八、随机变量的协方差与相关系数	475
十九、切比雪夫不等式	479
二十、大数定律与中心极限定理	480
练习题七	485
练习题七解答	490
第八章 数理统计	500
一、总体与样本, 数理统计中的常用分布	500
二、正态总体样本的常用统计量及其分布	505
三、参数的点估计方法	508
四、估计量的无偏性、有效性和一致性	512
五、参数的区间估计	515
六、参数的假设检验	518
练习题八	521
练习题八解答	525
参考文献	530

A. 高等数学

第一章 极限、连续与一元函数微分学

一、

函数极限与左、右极限的关系

【主要内容】

1. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A.$$

注: (i) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$ 对任意 $\varepsilon > 0$, 如果存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \Leftrightarrow$ 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $-\delta < x - x_0 < 0$ 时有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \Leftrightarrow$ 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $0 < x - x_0 < \delta$ 时有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

(ii) 当 x_0 是分段函数 $f(x)$ 的分段点时, 总是通过计算左极限 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 和右极限 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 确定: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 是否存在.

2. 设 $f(x)$ 在 $|x| > N$ (N 是某个正数) 内有定义, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 的充分必要条件是

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A.$$

注 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow$ 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $G > 0$, 使得 $|x| > G$ 时有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \Leftrightarrow$ 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $G > 0$, 使得 $x < -G$ 时有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow$ 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $G > 0$, 使得 $x > G$ 时有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

【典型例题】

例 1.1.1 设函数 $f(x) = \frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|}$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

精解 由于

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} - \frac{\sin x}{x}, & x < 0, \\ \frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

是分段函数, 所以计算它在分段点 $x=0$ 处的极限应从计算左极限与右极限入手.

$$\text{由于 } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} - \frac{\sin x}{x} \right) = \frac{2+0}{1+0} - 1 = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2e^{-\frac{4}{x}} + e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}} + 1} + 1 = \frac{0}{1} + 1 = 1,$$

所以, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

注 应注意 $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$.

例 1.1.2 确定使极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在的常数 a 的值, 其中

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{\sqrt{1 - \cos x}}, & x < 0, \\ -\frac{1}{x} \ln(1+x), & x > 0. \end{cases}$$

精解 由 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在可得 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 存在且相等, 由此即可算出 a 的值.

$$\text{由于 } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin ax}{\sqrt{1 - \cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin ax}{-\sqrt{2} \sin \frac{x}{2}} = \frac{ax}{-\sqrt{2} \cdot \frac{x}{2}} = -\sqrt{2}a,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{x} \ln(1+x) \right] = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = -1,$$

所以, 由 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 得 $-\sqrt{2}a = -1$, 即 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

例 1.1.3 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}}$

精解 由于 $x \rightarrow \infty$ 时, $x-1$ 与 $4x^2$ 相比可忽略不计, 同样 1 与 x 相比可忽略不计, $\sin x$ 与 x^2 忽略不计. 于是

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2} + x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2|x| + x}{|x|} = 2 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{|x|},$$

其中, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x} = -1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$.

所以, 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}}$ 不存在.

二、

两个重要极限

【主要内容】

两个重要极限是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ 和 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e \text{ (或 } \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e).$$

它们的推广形式是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = k \text{ 和 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a.$$

注 以下四个极限也是常用的, 应与上面两个极限一起记住:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} &= 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} &= \mu (\mu \text{ 为常数}), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

【典型例题】

例 1.2.1 计算极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x$.

精解 用重要极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 的推广形式计算.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{-a}{x}\right)\left(1 + \frac{b}{x}\right)} \right]^x \\ &= \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-a}{x}\right)^x \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{b}{x}\right)^x} \\ &= \frac{1}{e^{-a} \cdot e^b} = e^{a-b}. \end{aligned}$$

例 1.2.2 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+f(x)\sin x} - 1}{e^{2x} - 1} = 3$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

精解 由题设知 $\lim_{x \rightarrow 0} [\sqrt{1+f(x)\sin x} - 1] = 0$, 即 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)\sin x = 0$,

$$\begin{aligned} \text{所以, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)\sin x}{e^{2x} - 1} \cdot \frac{e^{2x} - 1}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt{1+f(x)\sin x} - 1}{e^{2x} - 1} \cdot (\sqrt{1+f(x)\sin x} + 1) \cdot \frac{\frac{e^{2x} - 1}{2}}{\frac{\sin x}{x}} \right] \quad (1) \end{aligned}$$

其中 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+f(x)\sin x} - 1}{e^{2x} - 1} = 3$ (题设),

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+f(x)\sin x} + 1) = \sqrt{1+0} + 1 = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} \stackrel{\text{令 } t=2x}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

将它们代入式(1)得

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3 \times 2 \times \frac{1}{\frac{1}{2} \times 1} = 12.$$

例 1.2.3 求使得极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ 的常数 a 和 b , 其中函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - 1}{\sin x} + a, & -1 < x < 0, \\ \frac{\ln(1 + bx)}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

精解 由 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ 知 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$,

$$\text{即} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^{x^2} - 1}{\sin x} + a \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + bx)}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} = 1, \quad (1)$$

$$\text{其中} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^{x^2} - 1}{\sin x} + a \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot x \right) + a = 1 \times 1 \times 0 + a = a,$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + bx)}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + bx)}{2x} (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + bx)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1 + bx)}{bx} \cdot b \right) = 1 \cdot b = b. \end{aligned}$$

将它们代入式(1)得 $a = b = 1$.

三、

无穷小的比较

【主要内容】

1. 无穷小的比较

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, (或 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = 0$, 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = 0$), 则称 $f(x)$ 是 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow x_0^-$, 或 $x \rightarrow x_0^+$) 时的无穷小;

如果 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ (或 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, 或 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$), 则称 $f(x)$ 是 $x \rightarrow \infty$ (或 $x \rightarrow -\infty$ 或 $x \rightarrow +\infty$) 时的无穷小.

以下以 $x \rightarrow x_0$ 情形为例叙述两个无穷小的比较:

设 $\alpha(x)$, $\beta(x)$ (其中 $\beta(x) \neq 0$) 都是 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小.

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, 则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小, 记为 $\alpha(x) = o(\beta(x))$;

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, 则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 低阶的无穷小;

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0$, 则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小, 当 $\beta(x) = b(x - x_0)^k$ (其中 b, k 是常数, 且 $b \neq 0, k > 0$), 称 $\alpha(x)$ 是 k 阶无穷小. 特别当 $c = 1$ 时, 称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小, 记为 $\alpha(x) \sim \beta(x) (x \rightarrow x_0)$.

2. 常用等价无穷小

$x \rightarrow 0$ 时, 以下的等价无穷小是常用的:

$$\sin x \sim x, \quad \tan x \sim x, \quad \arcsin x \sim x, \quad \arctan x \sim x,$$

$$\ln(1+x) \sim x, e^x - 1 \sim x, (1+x)^\mu - 1 \sim \mu x (\mu \neq 0), 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2.$$

3. 等价无穷小代替定理

设 $x \rightarrow x_0$ 时, 无穷小 $\alpha(x), \alpha_1(x), \beta(x), \beta_1(x)$ 满足 $\alpha(x) \sim \alpha_1(x), \beta(x) \sim \beta_1(x)$.

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ 存在或为无穷大, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$.

这里的 x_0 若改为 $x_0^+, x_0^-, \infty, +\infty$ 或 $-\infty$, 上述结论仍成立.

【典型例题】

例 1.3.1 (单项选择题) 设当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 - \cos x) \ln(1 + x^2)$ 是比 $x \sin x^n$ 高阶的无穷小, $x \sin x^n$ 是比 $e^{x^2} - 1$ 高阶的无穷小, 则正整数 n 为().

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

精解 通过寻找 $x \rightarrow 0$ 时 $(1 - \cos x) \ln(1 + x^2)$, $x \sin x^n$ 及 $e^{x^2} - 1$ 的等价无穷小即可算得 n 的值.

因为当 $x \rightarrow 0$ 时

$$(1 - \cos x) \ln(1 + x^2) \sim \frac{1}{2}x^2 \cdot x^2 = \frac{1}{2}x^4,$$

$$x \sin x^n \sim x \cdot x^n = x^{n+1},$$

$$e^{x^2} - 1 \sim x^2,$$

所以, 由题设知 $4 > n+1 > 2$, 即 $n=2$, 因此选项 B 是正确的.

例 1.3.2 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x^3} - 1}{1 - \cos \sqrt{x(1 - \cos x)}}$.

精解 由于 $x \rightarrow 0^+$ 时,

$$e^{x^3} - 1 \sim x^3$$

$$1 - \cos \sqrt{x(1 - \cos x)} \sim \frac{1}{2} [\sqrt{x(1 - \cos x)}]^2 = \frac{1}{2} x(1 - \cos x) \sim \frac{1}{2} x \cdot \frac{1}{2} x^2 = \frac{1}{4} x^3,$$

$$\text{所以, } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x^3} - 1}{1 - \cos \sqrt{x(1 - \cos x)}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3}{\frac{1}{4} x^3} = 4.$$

例 1.3.3 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\csc^2 x}$.

精解 利用公式 $A^b = e^{b \ln A}$ 得

$$(\cos x)^{\csc^2 x} = e^{\csc^2 x \ln \cos x},$$

然后计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \csc^2 x \ln \cos x$ 即可.

$$\begin{aligned} \text{由于 } \lim_{x \rightarrow 0} \csc^2 x \ln \cos x &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[1 + (\cos x - 1)]}{\sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{所以, } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\csc^2 x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \csc^2 x \ln \cos x} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

注 应记住公式 $A^b = e^{b \ln A}$, 它可将幂指函数转换成指数函数.

例 1.3.4 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - 1) + (\sqrt{1+x^3} - 1) \sin \frac{1}{x}}{1 - \cos x}$.

精解
$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - 1) + (\sqrt{1+x^3} - 1) \sin \frac{1}{x}}{1 - \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - 1)}{1 - \cos x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^3} - 1}{x(1 - \cos x)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - 1)}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x}{\frac{1}{2}x^2} = 2,$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^3} - 1}{x(1 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^3}{x \cdot \frac{1}{2}x^2} = 1,$$

$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ (利用无穷小的性质: 设 $x \rightarrow x_0$ 时, $\alpha(x)$ 是无穷小, $\beta(x)$ 在点 x_0 的某个

去心邻域内有界, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x)\beta(x) = 0$).

将它们代入式(1)得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - 1) + (\sqrt{1+x^3} - 1) \sin \frac{1}{x}}{1 - \cos x} = 2 + 1 \times 0 = 2.$$

例 1.3.5 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left[1 + \frac{f(x)}{\sin 2x} \right]}{3^x - 1} = 5$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$.

精解 由题设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left[1 + \frac{f(x)}{\sin 2x} \right]}{3^x - 1} = 5$ (1)

得 $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \left[1 + \frac{f(x)}{\sin 2x} \right] = 0$, 即 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sin 2x} = 0$, 并且 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

于是由式(1)得

$$5 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{\sin 2x}}{x \ln 3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\ln 3 \cdot x \cdot \sin 2x} = \frac{1}{2 \ln 3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}.$$

因此, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 10 \ln 3.$

四、

函数连续的定义

【主要内容】

1. 函数在点 x_0 处连续的概念

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义, 如果

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 既左连续 (即 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$)

又右连续 (即 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$), 即 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

2. 函数在开区间 (a, b) 内和闭区间 $[a, b]$ 上连续的定义

如果函数 $f(x)$ 在 (a, b) 的每一点处都连续, 则称 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续.

如果函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续, 且在点 $x = a$ 处右连续, 在点 $x = b$ 处左连续, 则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续.

注 初等函数在其定义区间内连续.

【典型例题】

例 1.4.1 设函数 $f(x) = \begin{cases} \ln \cos(x-1), & x \neq 1, \\ 1 - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right), & \\ -\frac{4}{\pi^2}, & x = 1, \end{cases}$ 问 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处是否连续?

精解 按定义只要检验 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ 是否成立即可.

由 $f(1) = -\frac{4}{\pi^2}$,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \cos(x-1)}{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)} \stackrel{\text{令 } t=x-1}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln \cos t}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln[1 + (\cos t - 1)]}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t - 1}{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}t\right)^2} \\ &= -\frac{4}{\pi^2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{\frac{1}{2}t^2} = -\frac{4}{\pi^2} \cdot 1 = -\frac{4}{\pi^2} \end{aligned}$$

知 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$, 所以 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处连续.

例 1.4.2 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{ax^2} - 1}{x \sin \frac{x}{4}}, & x < 0, \\ b, & x = 0, \\ \frac{\ln(1+x^3)}{\sqrt{1+x^3} - 1}, & x > 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续, 求常数 a, b .

精解 根据 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续的充分必要条件有

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0). \quad (1)$$

其中, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{ax^2} - 1}{x \sin \frac{x}{4}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax^2}{x \cdot \frac{x}{4}} = 4a,$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x^3)}{\sqrt{1+x^3} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3}{\frac{1}{2}x^3} = 2.$$

$$f(0) = b$$

将它们代入式(1)得

$$4a = 2 = b, \text{ 即 } a = \frac{1}{2}, b = 2.$$

例 1.4.3 设函数 $f(x) = \frac{1}{x^3} \left[\left(\frac{2 + \cos x}{3} \right)^x - 1 \right]$, 那么如何定义 $f(0)$ 的值, 使得 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

精解 由函数在点 $x=0$ 处连续的定义知, 只要

$$f(0) \stackrel{\text{定义}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

即可. 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{2 + \cos x}{3} \right)^x - 1}{x^3} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{其中, } \left(\frac{2 + \cos x}{3} \right)^x - 1 &= e^{x \ln \left(\frac{2 + \cos x}{3} \right)} - 1 \sim x \ln \left(\frac{2 + \cos x}{3} \right) \\ &= x \ln \left(1 + \frac{\cos x - 1}{3} \right) \sim -\frac{1}{3}x(1 - \cos x) \sim -\frac{1}{3}x \cdot \frac{1}{2}x^2 \\ &= -\frac{1}{6}x^3 \quad (x \rightarrow 0). \end{aligned}$$

将它代入式(1)得

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

因此, 定义 $f(0) = -\frac{1}{6}$, 使得 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

例 1.4.4 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2e^x}{\sqrt{1+2x^2}}, & x < 0, \\ \frac{x^2+4x-5}{2x^2-x-1}, & x > 1, \end{cases}$ 试将 $f(x)$ 的定义域扩充到 $(-\infty, \infty)$.

$+\infty$), 并使 $f(x)$ 处处连续, 且在 $(0, 1)$ 内的图形是关于直线 $x = \frac{1}{3}$ 对称的抛物线.

精解 显然 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ 上连续. 设 $(0, 1)$ 上的抛物线方程为 $y = a\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + b$. 要使 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 必须在 $x = 0, 1$ 上连续, 即常数 a, b 应满足

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[a\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + b \right] = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1+x^2 e^x}{\sqrt{1+2x^2}}, \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[a\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + b \right] = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+4x-5}{2x^2-x-1}, \end{cases}$$

即 $\begin{cases} \frac{1}{9}a + b = 1, \\ \frac{4}{9}a + b = 2. \end{cases}$ 解此方程组得 $a = 3, b = \frac{2}{3}$.

所以, 扩充定义域后的 $f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2 e^x}{\sqrt{1+2x^2}}, & x < 0, \\ 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{x^2+4x-5}{2x^2-x-1}, & x > 1. \end{cases}$

五、

函数的间断点

【主要内容】

1. 函数间断点的定义

如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续 (即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在, 或 $f(x)$ 在点 x_0 处无定义, 或虽然 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 与 $f(x_0)$ 都存在, 但它们不相等), 则称 x_0 是 $f(x)$ 的间断点.

2. 函数间断点分类

(1) 第一类间断点

设 x_0 是 $f(x)$ 的间断点, 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 都存在, 则称 x_0 是 $f(x)$ 的第一类间断点. 特别当 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ (即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在) 时, 称 x_0 是 $f(x)$ 的可去间断点; 当 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 时, 称 x_0 是 $f(x)$ 的跳跃间断点.

(2) 第二类间断点

设 x_0 是 $f(x)$ 的间断点, 但不是第一类间断点, 则称 x_0 是 $f(x)$ 的第二类间断点, 特别地, 当 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ 时, 称 x_0 是 $f(x)$ 的无穷间断点, 它是常见的第二类间断点.