概率论与数理统计学习指导

韩世迁 主编

化学工业出版社

概率论与数理统计学习指导

韩世迁　主编

化学工业出版社

·北京·

本书共分为十章，内容主要包括随机事件及其概率、条件概率与事件的独立性、一维随机变量及其分布、二维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、点估计、区间估计、假设检验。书中内容力求满足对该门课程的教学基本要求讲解的同时，也充分涵盖了全国硕士研究生入学考试数学大纲的全部内容。

本书可作为高等学校概率论与数理统计课程的教学参考用书，也可作为参加全国硕士研究生入学考试的强化训练指导书。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计学习指导/韩世迁主编．—北京：化学工业出版社，2012.8
ISBN 978-7-122-14560-4

Ⅰ．概… Ⅱ．韩… Ⅲ．①概率论-高等学校-教学参考资料②数理统计-高等学校-教学参考资料 Ⅳ．O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 131727 号

责任编辑：满悦芝　　文字编辑：荣世芳
责任校对：徐贞珍　　装帧设计：张　辉

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）
印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司
装　　订：三河市宇新装订厂
850mm×1168mm　1/32　印张 6　字数 158 千字
2012 年 10 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http：//www. cip. com. cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：14.00 元

本书编写人员

主　　编　韩世迁

副 主 编　吴茂全　裴晓雯　刘　丹

编写人员　鲁亚男　刘　欣　祝　贺　吴会咏　王　阳　季晓蕾　张　成　刘　丹　裴晓雯　吴茂全　韩世迁　谢彦红　常桂松

前　言

概率论与数理统计是高等学校理工科专业学生的一门重要的数学课程，也是全国硕士研究生入学统一考试数学试题的重要内容之一。本书是《概率论与数理统计》（韩世迁，2011，化学工业出版社）的配套学习用书。

本书通过内容提要、典型题精解、教材习题答案单元测试、单元测试答案五个部分内容的编写，力求满足对该门课程的教学基本要求讲解的同时，也充分涵盖了全国硕士研究生入学考试数学大纲的全部内容。

典型题精解中既对近几年考研数学试题中出现的概率论与数理统计考题做了详解，也对概率论与数理统计教材中的习题做了详尽的解答。

由于水平有限，疏漏之处在所难免，希望读者不吝批评指正。

编者

2012 年 8 月

于沈阳化工大学

目 录

第一章　随机事件及其概率

一、内容提要

1. 主要定义

① 为了研究随机现象，要对随机现象进行观察或实验，一般地，称具有以下三个特点的试验为**随机试验**：

a. 试验可在相同条件下重复进行；

b. 试验的所有可能结果是事先已知的或是可以确定的；

c. 每次试验不能确定究竟将会产生什么结果.

② 随机实验的每个可能结果称为**样本点**，记作 ω，样本点的全体称为**样本空间**，记作 Ω.

③ 对于任意一个随机试验 E，样本空间 Ω 的子集称为 E 的**随机事件**，简称事件.

④ 由 Ω 中任何一个样本点构成的集合，作为 Ω 的子集称为**基本事件**.

⑤ 概率的公理化定义．设随机试验的样本空间为 Ω，若对每一事件 A，有且只有一个实数 $P(A)$与之对应，满足如下公理：

a.（非负性）$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

b.（规范性）$P(\Omega)=1$；

c.（完全可加性）对任意一列两两互斥事件 $A_1,A_2,\cdots$，则

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) .$$

则称 $P(A)$为事件 A 的**概率**.

2. 主要定理和公式

（1）事件的关系和运算

① 事件的包含．如果事件 A 发生必导致事件 B 发生，则称事件 B **包含**事件 A，记作 $A\subset B$.

如果 A、B 互相包含，即 $A\subset B$ 与 $B\subset A$ 同时成立，则称 A 与

B **相等**，记作 $A=B$.

② 事件的并（或和）. 如果事件 A 与事件 B 至少有一个发生，称为事件 A 与 B 的**并**（**或和**），记作 $A\cup B$ 或 $A+B$.

③ 事件的交 . 如果事件 A 与事件 B 同时发生，称为事件 A 与 B 的**交**（**或积**），记作 $A\cap B$ 或 AB.

④ 事件的互斥（或不相容）. 如果事件 A 与事件 B 不能在同一试验中同时发生，则称事件 A 与事件 B **互不相容或互斥**.

⑤ 对立事件（或补事件）. 对任一事件 A，称 $B=\{A$ 不发生$\}$ 为 A 的**对立事件或补事件**.

⑥ 事件的差 . 事件的差即事件 A 发生而 B 不发生，记作

$$A-B\equiv A\overline{B}$$

(2) 事件的运算规律

① 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$

② 结合律：$A\cup B\cup C=(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$A\cap B\cap C=(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

③ 分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

④ 对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$（De Morgan 律）

我们称具有下列两个特征的随机试验模型为**古典概型**：

a. 随机试验只有有限个可能结果；

b. 每一个结果发生的可能性大小相同.

设事件 A 包含其样本空间 Ω 中 k 个基本事件，即 $A=A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}$，则事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 包含的基本事件数}}{\Omega\text{ 中基本事件总数}}$$

如果一个随机试验相当于从直线、平面或空间的某一区域 Ω 任取一点，而所取的点落在 Ω 中任意两个度量（长度、面积、体积）相等的子区域内的可能性是一样的，则称此试验模型为**几何模型**。对于任意有度量的子区域 $A\subset\Omega$，定义事件“任取一点落在区域 A 内”的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 的度量}}{\Omega\text{ 的度量}},$$

这样定义的概率称为**几何概率**.

加法公式　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

减法公式　若 $A\subset B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$，且 $P(A)\leqslant P(B)$

3. 考研大纲要求

考试内容包括：随机事件与样本空间，事件的关系与运算，完备事件组，概率的概念，概率的基本性质，古典型概率，几何型概率.

考试要求如下：

① 了解样本空间（基本事件空间）的概念，理解随机事件的概念，掌握事件的关系及运算.

② 理解概率的概念，掌握概率的基本性质，会计算古典型概率和几何型概率，掌握概率的加法公式、减法公式.

二、典型题精解

1. 设 $A\subset B, P(A)=0.1, P(B)=0.5$，则 $P(AB)=$________，$P(A\cup B)=$________，$P(\overline{A}\cup\overline{B})=$________.

解：因为 $A\subset B$，所以 $AB=A, A\cup B=B, \overline{A}\cup\overline{B}=\overline{AB}$

故
$$P(AB)=P(A)=0.1\qquad P(A\cup B)=P(B)=0.5$$
$$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=0.9$$

2. [2009 三/一 (7)] 设事件 A 与 B 互不相容，则

(A) $P(\overline{A}\,\overline{B})=0$　　(B) $P(AB)=P(A)P(B)$

(C) $P(A)=1-P(B)$　　(D) $P(\overline{A}\cup\overline{B})=1$

解：因为 A 与 B 互不相容，所以 $P(AB)=0$

(A) $P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$　因为 $P(A\cup B)$ 不一定为 1

(B) 当 $P(A)$，$P(B)$不为 0 时，(B) 不成立

(C) 只有当互为对立事件时才成立

(D) $P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1$　故 (D) 正确

3. 设袋中有大小相同的 10 个球，其中 3 个红球，2 个黑球，5 个白球。从中无放回地任取 2 次，每次取 1 个，如以 A_k、B_k、

C_k分别表示第 k 次取到红球、黑球、白球（$k=1,2$）。试用 A_k、B_k、C_k表示下列事件：

（1）所取得两个球中有黑球；

（2）仅取到一个黑球；

（3）第二次取到黑球；

（4）没取到黑球；

（5）最多取到一个黑球；

（6）取到的球中有黑球而没有红球；

（7）取到的两个球颜色相同.

解：（1）“有黑球”与“至少一个黑球”等价，因此“有黑球”$=B_1+B_2$

（2）$B_1\overline{B_2}+\overline{B_1}B_2$

（3）$A_1B_2+B_1B_2+C_1B_2=(A_1+B_1+C_1)B_2=B_2$

（4）$(A_1+C_1)\cap(A_2+C_2)$

其对立事件为“取到了黑球”，因此也可以表示成$\overline{B_1\cup B_2}=\overline{B_1}\ \overline{B_2}$

（5）$B_1\overline{B_2}+\overline{B_1}B_2+\overline{B_1}\ \overline{B_2}$

其对立事件为“都是黑球”，因此也可以表示成

$$\overline{B_1B_2}=\overline{B_1}+\overline{B_2}$$

（6）$(B_1+B_2)\overline{A_1}\ \overline{A_2}=B_1\overline{A_2}+\overline{A_1}B_2$或 $B_1C_2+C_1B_2+B_1B_2$

（7）$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2$

4. 袋中有 50 个乒乓球，其中 20 个是黄球，30 个是白球．今有两人依次随机从袋中各取一球，取后不放回，则第二个人取得黄球的概率是多少？

解：设 A 表示事件“第二个人取得黄球”，Ω 中基本事件总数应为 50×49，第二个人取得黄球的情况为：（1）第一个人取得白球，第二个人取得黄球；（2）第一个人取得黄球，第二个人取得黄球.

$$A\text{ 发生的基本事件总数应为 }C_{30}^1C_{20}^1+C_{20}^1C_{19}^1=20\times49$$

$$P(A)=\frac{20\times49}{50\times49}=\frac{2}{5}$$

5. 任意将 10 本书放在书架上，其中有两套书，一套 3 卷，另一套 4 卷，求下列事件的概率：

（1）3 卷一套的放在一起；

（2）4 卷一套的放在一起；

（3）两套各自放在一起；

（4）两套中至少有一套放在一起；

（5）两套各自放在一起，还按卷次顺序排好.

解： 设 A 表示"3 卷一套的放在一起"，B 表示"4 卷一套的放在一起"，C 表示"两套各自放在一起"，D 表示"两套各自放在一起，还按卷次顺序排好".

（1）3 卷一套的放在一起，可把 3 卷看成一个整体，总共有 8 个位置，不同的放法共有 8！种，3 卷一套之间可以任意排，共有 3！种放法，所以 $P(A)=\frac{8!\times 3!}{10!}=\frac{1}{15}$

（2）$P(B)=\frac{7!\times 4!}{10!}=\frac{1}{30}$

（3）两套各自放在一起，把两套分别看成两个整体，总共有 5 个位置，不同的放法共有 5！种，3 卷一套之间可以任意排，共有 3！种放法，4 卷一套之间可以任意排，共有 4！种放法，所以

$$P(C)=P(AB)=\frac{5!\times 4!\times 3!}{10!}=\frac{1}{210}$$

（4）$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$$=\frac{1}{15}+\frac{1}{30}-\frac{1}{210}=\frac{2}{21}$$

（5）这是求事件 ABD 的概率，每一卷书按卷次顺序排好只有 2 种排法，所以

$$P(ABD)=\frac{5!\times 2\times 2}{10!}=\frac{1}{7560}$$

6. 袋中有 $1,2,\cdots,N$ 号球各一只，采用（1）无放回；（2）有放回方式摸球，试求在第 i 次摸球时首次摸到 1 号球的概率.

解： 设 $A_i=$（第 i 次摸到 1 号球）$(i=1,2,\cdots,N)$.

（1）因袋中 N 个球均已编号，显然为各不相同的球。若把摸出的球依次排成一列，则 N 个球的每个排列就是一个事件，故基

本事件总数为数码 1,2,…,N 的全排列 $N!$.

事件 A_i 的基本事件数为$(N-1)!$．因为在第 i 个位置上排列的球一定是一号球，其他$(N-1)$个位置上，球的排列总数为$(N-1)!$，所以 $p(A_i)=\frac{(N-1)!}{N!}=\frac{1}{N}$.

(2) 因为是有放回摸球，每次袋中都有 N 个球，共摸 i 次共有 N^i 可能结果，基本事件总数 N^i。事件 A_i 的基本事件数为$(N-1)^{i-1}$，因前 $i-1$ 次未摸到一号球，所以求概率为

$$p(A_i)=\frac{(N-1)^{i-1}}{N^i}$$

7. 将 13 个分别写有 A、A、A、C、E、H、I、I、M、M、N、T、T 的卡片随意排成一行，求恰好排成单词"*MATHEMATICIAN*"的概率

解：13 个字母中的排列数为 13!，恰好排成单词"*MATHEMATICIAN*"的样本点数为 $3!\times1\times1\times1\times2!\times2!\times1\times2!$，所求概率

$$P=\frac{3!\times1\times1\times1\times2!\times2!\times1\times2!}{13!}=\frac{48}{13!}$$

8. 一串钥匙共有 10 把，其中有 4 把能打开门，因为开门者忘记哪些能打开门，便逐把试开，求下列事件的概率：

(1) 第 3 把钥匙能打开门；

(2) 第 3 把钥匙才打开门.

解：(1) 用 A 记事件"第 3 把钥匙能打开门"，这说明第 3 把钥匙是能打开门的 4 把钥匙中的 1 把，有利的基本事件数目为 4，总的基本事件为 10，则

$$P(A)=\frac{4}{10}$$

(2) 用 B 记事件"第 3 把钥匙才打开门"，总的基本事件数为 $10\times9\times8$，事件 B 包含的基本事件数为 $6\times5\times4$，则

$$P(B)=\frac{6\times5\times4}{10\times9\times8}=\frac{1}{6}$$

9. 匣中有 3 个白球，5 个黑球，4 个红球，先从匣中一个接一个的抽出所有球，试求红球出现比白球早的概率.

解：用 A 记事件"红球出现比白球早"，以 B、R 分别表示抽到黑球和红球，则

$$A=R+BR+BBR+BBBR+BBBBR+BBBBBR$$

其中等式右端 6 个事件分别表示接连取 0、1、2、3、4 和 5 个黑球后取到红球，6 个事件显然两两不相交，且

$$P(R)=\frac{4}{12},\ P(BR)=\frac{5\times4}{12\times11},\ P(BBR)=\frac{5\times4\times4}{12\times11\times10}$$

$$P(BBBR)=\frac{5\times4\times3\times4}{12\times11\times10\times9},\ P(BBBBR)=\frac{5\times4\times3\times2\times4}{12\times11\times10\times9\times8}$$

$$P(BBBBBR)=\frac{5\times4\times3\times2\times1\times4}{12\times11\times10\times9\times8\times7}$$

因此 $P(A)=P(R)+P(BR)+P(BBR)+$

$$P(BBBR)+P(BBBBR)+$$

$$P(BBBBBR)=\frac{4}{7}$$

10. [2007 四/二（16）] 在区间（0，1）中随机地取两个数，则这两个数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$ 的概率为多少?

解：利用几何概型计算，如图 1-1 所示.

$$P(A)=\frac{S(A)}{S(\Omega)}$$

$$=\frac{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1^2}=\frac{3}{4}$$

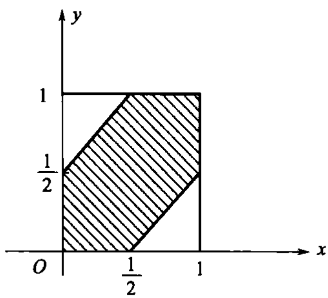

图 1-1

三、教材习题解答

1. 设 A_i 表示事件"第 i 次抽到次品"，设 $\overline{A_i}$ 表示事件"第 i 次抽到合格品"：

（1）$A_1\cup A_2$；　（2）$A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$；　（3）$A_1A_2A_3$；

（4）$\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\overline{A}_3$；　（5）$A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3$.

2. $P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cap B)$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$P(AB)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$

$P(\overline{A}\cup\overline{B})=1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$

3. A、B、C 全不发生的对立事件是 A、B、C 至少有一个发生，所以

$$P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=1-P(A\cup B\cup C)$$

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

又因为 $ABC\subset AB$，故 $0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AB)=0$，$P(ABC)=0$，所以

$$P(A\cup B\cup C)=\frac{1}{4}\times 3-\frac{1}{16}\times 2=\frac{5}{8}$$

$$P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=1-P(A\cup B\cup C)=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$$

4. 设 A 表示事件“能打开门锁”，Ω 中基本事件总数应为 $C_{10}^{2}=45$，两把能打开门锁的情况：

(1) 两把全是能开门锁的钥匙；(2) 一把是能开门锁的钥匙，一把不是.

A 发生的基本事件总数应为 $C_3^2\cdot C_7^0+C_3^1\cdot C_7^1=24$

所以 $P(A)=\frac{24}{45}=\frac{8}{15}=0.53$

5. 设 A 表示事件“第一次取到红球”，B 表示事件“第二次取到红球”；

$\overline{A}$ 表示事件“第一次取到白球”，$\overline{B}$ 表示事件“第二次取到白球”.

(1) $P(AB)=\frac{5^2}{7^2}=\frac{25}{49}$

(2) $P(A\overline{B})=\frac{5\times 2}{7^2}=\frac{10}{49}$

(3) $P(A\overline{B}\cup\overline{A}B)=\frac{C_5^1}{C_7^1}\frac{C_2^1}{C_7^1}+\frac{C_2^1}{C_7^1}\frac{C_5^1}{C_7^1}=\frac{20}{49}$

(4) $P(B)=\frac{C_5^1}{C_7^1}=\frac{5}{7}$

6. 设 A 表示事件“第一次取到合格品”，B 表示事件“第二次取到合格品”；

$\overline{A}$ 表示事件“第一次取到次品”，$\overline{B}$ 表示事件“第二次取到次品”；

C 表示事件“至少有一个是合格品”，此题为“无放回抽样”类型.

(1) $P(AB)=\frac{C_4^1}{C_6^1}\frac{C_3^1}{C_5^1}=\frac{2}{5}$

(2) $P(A\overline{B}\cup\overline{A}B)=\frac{C_4^1}{C_6^1}\frac{C_2^1}{C_5^1}+\frac{C_2^1}{C_6^1}\frac{C_4^1}{C_5^1}=\frac{8}{15}$

(3)“至少有一个是合格品”包含两种情况：本题中第一问和第二问，

所以 $P(C)=\frac{2}{5}+\frac{8}{15}=\frac{14}{15}$

7. 设 A 表示事件“3 张牌中花色全不相同”，$\overline{A}$ 表示事件“3 张牌中至少有 2 张花色全相同”.

因为一副牌中有 4 种花色，每种花色有 13 张牌，所以 Ω 中基本事件总数应为 C_{52}^3，A 发生的基本事件总数应为$\frac{C_4^3C_{13}^1C_{13}^1C_{13}^1}{C_{52}^3}$，

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{C_4^3C_{13}^1C_{13}^1C_{13}^1}{C_{52}^3}=0.602$$

8. 设 A 表示事件“3 张考签全部被抽到”，$\overline{A}$ 表示事件“3 张牌中至少有一张没有被抽到”.

此题为“有放回取样”类型，3 个考生抽 3 张考签，每个考生都面临 3 种选择，所以 Ω 中基本事件总数应为 3^3，A 发生的基本事件总数应为 C_3^3.

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{C_3^3}{3^3}=\frac{7}{9}$$

9. 设 A 表示事件"恰有一件次品"，B 表示事件"至少有一个是次品"，$\overline{B}$ 表示事件"全部是正品"

(1) 一次拿 3 件的情况：

① Ω 中基本事件总数应为 C_{100}^3，A 发生的基本事件总数应为 $C_2^1 \cdot C_{98}^2$

$$P(A)=\frac{C_2^1 \cdot C_{98}^2}{C_{100}^3}=0.0588$$

② Ω 中基本事件总数应为 C_{100}^3，$\overline{B}$ 发生的基本事件总数应为 C_{98}^3

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{C_{98}^3}{C_{100}^3}=0.0594$$

(2) 每次拿一件，有放回取样的情况：

① $P(A)=\dfrac{C_3^1 \cdot C_{98}^1 \cdot C_{98}^1 \cdot C_2^1}{100^3}=0.0576$

② $P(B)=1-P(\overline{B})=1-\dfrac{98^3}{100^3}=0.0588$

(3) 每次拿一件，无放回取样的情况：

① Ω 中基本事件总数应为 $100\times99\times98$，A 发生的基本事件总数应为 $98\times97\times2\times3$

$$P(A)=\frac{98\times97\times2\times3}{100\times99\times98}=0.0588$$

② Ω 中基本事件总数应为 $100\times99\times98$，$\overline{B}$ 发生的基本事件总数应为 $98\times97\times96$

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{98\times97\times96}{100\times99\times98}=0.0594$$

10. 设 A 表示事件"3 个学生住在不同宿舍"，3 个学生分到 5 间宿舍中，每个学生都有 5 种选择，所以 Ω 中基本事件总数应为 5^3，A 发生的基本事件总数应为 $5\times4\times3$.

$$P(A)=\frac{5\times4\times3}{5^3}=\frac{12}{25}$$