巴氏空间上的概率论

吴智泉 王向忱 编著

吉林大学出版社

巴氏空间上的概率论

吴智泉　王向忱

吉林大学出版社

巴氏空间上的概率论

吴智泉　王向忱　编

责任编辑：崔晓光	封面设计：甘　莉
吉林大学出版社出版	吉林省新华书店发行
（长春市东中华路 29 号）	吉林工学院印刷厂印刷
开本：850×1168 毫米　1/32	1990 年 12 月第 1 版
印张：16	1990 年 12 月第 1 次印刷
字数：393 千字	印数：1— 900 册
ISBN 7-5601-0761-3/O·91	定价：3.95 元

前　言

抽象空间上的概率理论的研究，虽然可以追溯到 1935 年 A. Kolmogorov 关于巴氏空间上的概率分布的特征泛函的工作，但是真正引起人们重视并被系统地加以研究，应该说是由 Mourièr 和 Fortet 在 1953 年前后的工作才开始的. 时至今，这方面的研究已日趋成熟，不仅得到了一系列重要成果，形成了许多独具特色的研究方法，而且对数学的其他有关领域也产生了日见增长的影响.

在我国，最早介绍这方面研究情况的，是 1962 年刊载于《数学进展》上的王梓坤教授的文章“随机泛函分析引论”，但是在以后的近 20 年的时间里，很少有人从事这方面的工作. 在江泽坚教授建议下，我们在 1980 年组织的学习巴氏空间概率理论的讨论班，很可能是国内从事这方面工作的第一个研究集体. 1982—1983 年编者分别去英国和美国访问，讨论班也中断了一年多，到 1983 年才又恢复. 同时，吉林大学数学研究所也正式为概率论与数理统计专业的硕士生开设了“巴氏空间上的概率理论”一课. 现在这本书，就是在编者历年来所用讲义的基础上整理修改而成的.

由于这本书基本上是一本研究生课的教材，所以我们假设读者具有大学本科水平的数学基础，即具有基本的测度论、概率论知识和一般拓扑与泛函分析的基础知识. 另外，为了读者的方便，证明一般都写得相当详尽.

虽然本书称为《巴氏空间上的概率论》，实际上讲的是这方面的基础知识，而且基本上是有关极限理论方面的. 这既是囿于编者的水平，也是考虑到教学上的实际需要.

在本书的形成过程中，得到了王柔怀教授、杨小云副教授和李德立同志的许多帮助，杨小云、李德立两同志还分别仔细

审校了第五章和第七章的原稿，编者谨向他们表示深切的谢意.在整理、修改讲稿时，编者虽力求避免差误，但水平有限，谬误之处，仍在所难免，欢迎读者批评指正.

编　者
吉林大学数学系
1990年2月

目　　录

第一章　随机元及其基本性质

巴氏空间或一般的抽象空间中的概率论是适应于将随机过程视为适当的函数空间中的随机元(即取值于该空间中的随机变量)这样一种观点而发展起来的. Loéve 在阐述概率论的基本特征时曾指出"……到了今天,概率论在数学上已经发展得充分成熟,于是就呈现出来这样一种预兆,即要摆脱这些限制而考虑从测度空间(不一定是规范化了的)到愈益抽象的空间的更一般的函数族……". 这里所谓的"限制",就是指经典概率论的研究对象只限于取实(或复)值的随机变数.

虽然早在 1935 年 Kolmogorov 就引进了巴氏空间上的测度的特征泛函,以后 Fréchet 又于 1951 年研究过巴氏空间上的 Gauss 分布,但有关巴氏空间上概率论的系统研究应该说是由 Mouriér 和 Fortet(1953)的工作开始的. 至今,这方面的研究发展很快,其研究范围几乎包括了经典概率论的所有课题,同时也涉及到数学中的许多其它领域.

随机元概念是普通的随机变量概念的推广或者说一般化. 我们知道,绝大部分关于实随机变数的结果都可以很容易地推广到 n 维随机向量上去. 但是当考虑取值于一般的抽象空间,例如无穷维的巴氏空间的随机变量时,情况就完全不同了. 由于这时值空间的结构比普通的实数系要复杂得多,要推广已有的实随机变数的结果,就常常会遇到本质上的困难,有时还会出现一些全新的问题. 人们发现一些结果是否成立常和值空间的几何结构有着密切的联系. 关于抽象空间中随机元的定义,有各种不

同的方式，在一般情况下，它们还确实是彼此不同的概念. 不同的定义有各自的优缺点，分别适应研究不同问题的需要. 本课程将主要讨论随机元的极限理论，所以采用的是 Hanš(1956)的定义，这也是现今比较通用的定义，它是普通的随机变数概念最自然的推广. 按这一定义，抽象空间中的随机元就是定义于一概率空间上而取值于该抽象空间的可测映射. 因此我们首先介绍一点有关可测映射的知识.

§1 可测映射

设$(\Omega,\mathscr{F})$，$(B,\mathscr{B})$是二可测空间，即 Ω，B 是二非空集合，$\mathscr{F}$，$\mathscr{B}$ 分别为其子集所构成的两个 σ-代数. 映射 $X:\Omega\to B$ 称为是 $\mathscr{F}\mathscr{B}$-可测的（或简称为可测的），如果对于任意 $A\in\mathscr{B}$，$X^{-1}(A)=\{\omega:X(\omega)\in A\}\in\mathscr{F}$.

从定义可知，如果$(Y,\mathscr{E})$是另一可测空间 $f:B\to Y$ 是一 $\mathscr{B}\mathscr{E}$-可测映射，X 是一 $\mathscr{F}\mathscr{B}$-可测映射，则 $f(X):\Omega\to Y$ 是一 $\mathscr{F}\mathscr{E}$-可测映射.

在上述定义中，$(B,\mathscr{B})$只是一个可测空间，但在今后的研究中，B 上总还是有其它结构的. 当 B 是拓扑空间时，一般都限定其上的 σ-代数 $\mathscr{B}$ 就是 B 上的 Borel 集合构成的 σ-代数，即 B 上全体开集所生成的 σ-代数 $\mathscr{B}(B)$. 这时我们称拓扑空间$(B,\mathscr{T})$为可测拓扑空间，记为$(B,\mathscr{T},\mathscr{B})$.

在给定了$(\Omega,\mathscr{T})$和$(B,\mathscr{F},\mathscr{B})$以后，如何判断 $\Omega\to B$ 的映射 X 是不是可测的当然是一个很基本的问题. 注意 $\mathscr{B}_1=\{A:A\subset B,X^{-1}(A)\in\mathscr{F}\}$是 B 上的一个 σ-代数，因此如果 $\mathscr{B}_1$ 包含全体开集（或闭集），则 $\mathscr{B}_1\supset\mathscr{B}$，所以 X 可测的充要条件是对 B 中任意开集 G（或闭集 F）$X^{-1}(G)$（或 $X^{-1}(F)$都属于 $\mathscr{F}$.

命题 1 如果(B,d)是一度量空间，X_n，$n\geqslant1$，都是从 Ω 到 B

的可测映射，并且对于每个 $\omega\in\Omega$，都有 $X_n(\omega)\to X(\omega)$ $(n\to\infty)$，则 X 也是从 Ω 到 B 的可测映射.

证明 对于 B 中任意闭集 F，令

$$f(x)=\inf\{d(x,y):y\in F\}\qquad(x\in B)$$

则 $f(x)$ 是 B 上的实值连续函数，而且 $x\in F$ 的充要条件是 $f(x)=0$. 所以 $X^{-1}(F)=\{\omega:f(X(\omega))=0\}$. 现在 $f(X_n)$ 是 Ω 上的实可测函数*，从 $X_n\to X$ 知 $f(X_n(\omega))\to f(X(\omega))$，所以 $f(X(\omega))$ 也是 Ω 上的实可测函数，这就保证了 $\{\omega:f(X(\omega))=0\}\in\mathscr{F}$.

命题 2 如果 (B,d) 是可分度量空间，则 $X:\Omega\to B$ 为可测映射的充要条件是存在从 Ω 到 B 的可数值可测映射序列 $\{X_n(\omega):n\geqslant 1\}$，使 $X_n(\omega)$ 一致收敛到 $X(\omega)$.

证明 显然只有必要性需要证明. 设 $\{X_n\}$ 是 B 中的可数稠子集. 对每一 $n\geqslant 1$，定义

$$A_{ni}=\{x:d(x,x_i)\leqslant\frac{1}{n}\}\setminus\bigcup_{j=1}^{i-1}A_{nj},\quad i=1,2,\cdots$$

此处约定 $\bigcup\limits_{j=1}^{0}A_{nj}=\phi$（空集）. 则 $\{A_{ni}\}_{i=1}^{\infty}$ 是 B 的一个可数部分.

对每个 $n\geqslant 1$，定义

$$X_n(\omega)=x_i,\qquad 当\ \omega\in X^{-1}(A_{ni}),\qquad i=1,2,\cdots$$

不难看出，$\{X_n\}$ 为从 Ω 到 B 的可测映射序列，且由上述定义有：

$$d(X_n(\omega),X(\omega))\leqslant\frac{1}{n}$$

对一切 $\omega\in\Omega$ 成立. 从而 $X_n(\omega)$ 一致收敛于 $X(\omega)$.

命题 3 如果 (B,d) 是可分度量空间，X,Y 是从 Ω 到 B 的可测映射，则 $d(X,Y)=d(X(\omega),Y(\omega))$ 是 Ω 上的实可测函数.

证明 用

$$\pi(\omega)=(X(\omega),Y(\omega))$$

定义从 Ω 到 $B\times B$ 的映射，对于任意 $A_1,A_2\in\mathscr{B}(B)$，

---

* 即对实直线上的任意 Borel 集 A，$\{\omega:f(X_n(\omega)\in A\}\in\mathscr{F}$.

$$\pi^{-1}(A_1\times A_2)=\{\omega:(X(\omega),Y(\omega))\in A_1\times A_2\}$$
$$=X^{-1}(A_1)\cap Y^{-1}(A_2)\in\mathscr{F}$$

因此易见 π 是 $\mathscr{F}\mathscr{B}(B)\times\mathscr{B}(B)$ 可测的.如果它还是 $\mathscr{F}\mathscr{B}(B\times B)$ 可测的,则只要注意到 $d(x,y)$ 是从乘积空间 $(B\times B,d\times d)$ 到实数集的连续映射(从而是可测的)便知 $d(X(\omega),Y(\omega))=(d\circ\pi)(\omega)$ 是 Ω 上的实可测函数,因此问题归结为证明下述引理.

引理 1 如果 (B_1,d_1),(B_2,d_2) 都是可分的度量空间,则乘积度量空间 $(B_1\times B_2,d_1\times d_2)$ 上的 Borel 集合类 $\mathscr{B}(B_1\times B_2)=\mathscr{B}(B_1)\times\mathscr{B}(B_2)$.

证明 对 $i=1,2$,用 P_i 表示从 $(B_1\times B_2,d_1\times d_2)$ 到 B_i 的投影变换,则 P_i 是连续变换,从而对任意 $E_i\in\mathscr{B}(B_i)$,$P_i^{-1}(E_i)\in\mathscr{B}(B_1\times B_2)$.于是 $E_1\times E_2=P_1^{-1}(E_1)\cap P_2^{-1}(E_2)\in\mathscr{B}(B_1\times B_2)$.这证明了 $\mathscr{B}(B_1)\times\mathscr{B}(B_2)=\sigma(\{E_1\times E_2:E_i\in\mathscr{B}(E_i),i=1,2\})\subset\mathscr{B}(B_1\times B_2)$.

为了证明相反的包含关系,我们只需证明 $B_1\times B_2$ 中任一开集都属于 $\mathscr{B}(B_1)\times\mathscr{B}(B_2)$.由于 (B_i,d_i),$i=1,2$,都是可分的,有可数的拓扑基 $\{U_n^i\}_{n=1}^{\infty}$.现在柱集类 $\{P_i^{-1}(U_n^i)\}_{i=1,2;n=1,2,\cdots}$ 是可数的,并且是 $B_1\times B_2$ 上的拓扑的一次基底.注意这种柱集和它们的任意有限交都是属于 $\mathscr{B}(B_1)\times\mathscr{B}(B_2)$ 的,因此作为它们的可数并的任何开集亦然.

注意,当 B 是不可分的度量空间时,上述命题 3 的结论是可以不成立的.Taylor(1978)的专著中有具体的反例.

下面的定理对我们今后的研究是很重要的.

定理 4 如果 $(B,\|\cdot\|)$ 是可分的赋范空间,则 $X:\Omega\to B$ 为可测映射的充要条件是对于任意 $f\in B^*$,$f(X)$ 都是 Ω 上的实可测函数,此处 B^* 是 B 的拓扑对偶.

证明 只有充分性需要证明.令

$$\mathscr{E}=\{f^{-1}(A):f\in B^*,A\in\mathscr{B}(R)\}$$

则 $\mathscr{E}\subset\mathscr{B}(B)$,且由于对每个 $A\in\mathscr{B}(R)$,$X^{-1}(f^{-1}(A))=$

$[f(X)]^{-1}(A)\in\mathscr{F}$ 知，若

$$\mathscr{B}_1=\{E:E\in\mathscr{B}(B),X^{-1}(E)\in\mathscr{F}\}$$

则 $\mathscr{B}_1$ 是包含 $\mathscr{E}$ 的一 σ-代数. 因此我们只要能证明 $\sigma(\mathscr{E})=\mathscr{B}(B)$ 就行了. 注意到 B 的可分性，这又只要证明 B 中任何闭球 $S=\{x:\|x-b\|\leqslant r\}$ 都属于 $\sigma(\mathscr{E})$ 即可.

设 $\{x_n\}$ 是 B 中一可数稠密子集，对每一 $n\geqslant1$，选择 $f_n\in B^*$，使 $\|f_n\|=1$，$f_n(x_n-b)=\|x_n-b\|$. 令

$$S_1=\{x:f_n(x-b)\leqslant r,\quad n=1,2\cdots\}$$

显然 $S_1\in\sigma(\mathscr{E})$ 且 $S_1\supset S$.

若 $x\overline{\in}S$，则 $\|x-b\|>r$. 选取 x_k 使

$$\|x-x_k\|<\frac{1}{2}(\|x-b\|-r)$$

则

$$\|x_k-b\|\geqslant\|x-b\|-\|x-x_k\|$$

$$>\|x-b\|-\frac{1}{2}(\|x-b\|-r)=\frac{1}{2}(\|x-b\|+r)$$

$$|f_k(x-b)-\|x_k-b\||=|f_k(x-b)-f_k(x_k-b)|$$

$$\leqslant\|x-x_k\|<\frac{1}{2}(\|x-b\|-r)$$

从而

$$f_k(x-b)=\|x_k-b\|-(\|x_k-b\|-f_k(x-b))$$

$$>\frac{1}{2}(\|x-b\|+r)-\frac{1}{2}(\|x-b\|-r)=r$$

可见 $x\overline{\in}S_1$. 这样我们证明了 $S=S_1\in\sigma(\mathscr{E})$.

推论 1 如果 X_1,X_2 都是从 Ω 到可分赋范空间 B 的可测映射，则对于任意常数 a_1,a_2，$a_1X_1+a_2X_2$ 都是从 Ω 到 B 的可测映射.

注意 Taylor(1978)的专著中也有这样的例子，说明当 B 不可分时，即使 X_1,X_2 都是可测映射，X_1+X_2 也是可能不可测的.

从以上几个命题我们可以看到在讨论可测映象时，值空间

的可分性常常有重要的作用. 关于可分完全度量空间中的 Borel 集，还有一个重要性质，通常称之为 Urysohn 定理或 Kuratowski 定理. 由于它的证明要用到较多的有关解析集的知识，我们此处不能介绍，所以只开列结果. 需要了解证明的读者，可以查阅 Parthasarathy 的专著“Probability Measures on Metric Spaces”第一章 § 3.

Urysohn 定理(Kuratowski 定理) 如果 $\mathscr{X}$，$\mathscr{Y}$ 都是可分度量空间，$\mathscr{X}$ 还是完全的. $\varphi:\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ 是一对一的连续映射，$A\in\mathscr{B}(\mathscr{X})$，则 $\varphi(A)=\{y:y=\varphi(x),x\in A\}\in\mathscr{B}(\mathscr{Y})$.

应用 Urysohn 定理可以证明下述结果.

定理 5 如果 B 是可分的巴氏空间，$\Gamma\subset B^*$，则 Γ 产生的 σ-代数，即使得 Γ 中元素都可测的最小 σ-代数 $\sigma(\Gamma)=\mathscr{B}(B)$ 的充要条件是 Γ 为 B^* 的完整子集(即如果对一切 $x^*\in\Gamma$ 都有 $x^*(x)=0$ 则 $x=0$).

证明 必要性. 如果 Γ 不是完整子集，则存在 $x_0\in B$，$x_0\neq 0$，使 $x^*(x_0)=0(\forall\ x^*\in\Gamma)$. 令

$$\mathscr{E}=\{A:A\in\sigma(\Gamma),\quad 0\text{ 和 }x_0\text{ 都属于 }A\text{ 或 }0\text{ 和 }x_0\text{ 都不属于 }A\}$$

易见 $\mathscr{E}$ 是一 σ-代数，包含 $\sigma(\Gamma)$，所以 $\mathscr{E}=\sigma(\Gamma)$，但只含 0 的单元集 $\{0\}\in\mathscr{B}(B)$，却不在 $\mathscr{E}$ 中，因此 $\sigma(\Gamma)\neq\mathscr{B}(B)$.

充分性. 首先注意 $\sigma(\Gamma)\subset\mathscr{B}(B)$. 对任意 $f\in\Gamma$，令

$$V_f=\{(x_1,x_2)\in B\times B;\quad f(x_1)\neq f(x_2)\}$$

则 V_f 为开集，因为 $B\times B$ 是可分度量空间，便存在可数子集 $\Gamma_0\subset\Gamma$ 使得

$$U_{f\in\Gamma}V_f=U_{f\in\Gamma_0}V_f$$

因此 Γ_0 为 B^* 中的完整子集. 由于 $\sigma(\Gamma_0)\subset\sigma(\Gamma)$，只需证明 $\sigma(\Gamma_0)=\mathscr{B}(B)$. B 按拟范数可数族 $\{|f(\cdot)|;f\in\Gamma_0\}$ 导出的局部凸拓扑记为 $\sigma(B,\Gamma_0)$，由于 Γ_0 是一可数的完整子集，$(B,\sigma(B,\Gamma_0))$ 是一分离的局部的可度量空间，记为 B_{Γ_0}. 因为 $\delta(B,\Gamma_0)$ 弱于 B 上原有的拓扑，因此 $\mathscr{B}(B_{\Gamma_0})\subset\mathscr{B}(B)$，并且 B_{Γ_0} 是可分的. 从 B

到 B_{r_0} 的自然嵌入 J 是一个一对一的连续变换，由 Urysohn 定理，对任意 $A\in\mathscr{B}(B)$，$J(A)\in\mathscr{B}(B_{r_0})$，即 $\mathscr{B}(B)\subset\mathscr{B}(B_{r_0})$，所以 $\mathscr{B}(\Gamma_0)=\mathscr{B}(B)$. 注意 $x^*\in\Gamma_0, c>0$, $\{x: |x^*(x)|<c\}$ 便属于 $\sigma(\Gamma_0)$，而所有这样的集合又构成 B_{r_0} 在 O 点的一邻域次基底，另外 B_{r_0} 中任一开集都可表成有限或可数个经过平移后的上述类型的集合的并，因此 $\sigma(\Gamma_0)\supset\mathscr{B}(B_{r_0})=\mathscr{B}(B)$. 显然这证明了 $\mathscr{B}(B)=\sigma(\Gamma_0)$.

练　　习

1. 设 $(\Omega,\mathscr{F})$ 是一可测空间，B, D 为度量空间，D 至少含有两个不同的元素，则从 Ω 到 B 的映射 X 为可测映射的充要条件是对于从 B 到 D 的每一个可测映射 V，$V(X)$ 是从 Ω 到 D 的可测映射.

2. 设 $(\Omega,\mathscr{F})$ 是一可测空间，B 为一可分度量空间，则从 Ω 到 B 的映射 X 为可测映射的充要条件是存在取有限多个值的可测映射的序列 $\{X_i\}$，使得 $X_i(\omega)\to X(\omega)$ 对任意 $\omega\in\Omega$ 成立.

3. 设 $(\Omega,\mathscr{F})$ 是一可测空间，B 是可分的赋范空间，Γ 为 B^* 的完整子集. 从 Ω 到 B 的映射 X 为可测映射的充要条件是对任意 $f\in\Gamma$，$f(X)$ 为实可测函数.

§2　随机元

在前一节中我们讨论可测映射时，只假定 $(\Omega,\mathscr{F})$ 是一可测空间，并没有在其上引进概率. 如果 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是一概率空间，$(B,\mathscr{B})$ 是一可测空间，$X:\Omega\to B$ 是 $\mathscr{F}\mathscr{B}$ 可测的映射，则我们就说 X 是 B 中的一**随机元**. 由于 X 是从 Ω 到 B 的映射，所以在给定了 $\omega\in\Omega$ 以后，$X(\omega)$ 是 B 中的一个元素，而当 ω 并未给定时，

$X(\omega)$是 B 中的一个变动元素. 对于任意 $A\in\mathscr{B}$, $X^{-1}(A)\in\mathscr{F}$,因此

$$P_X(A) = P(X^{-1}(A))$$

定义了 $\mathscr{B}$ 上的一个函数,易见它是 $\mathscr{B}$ 上的一概率函数,称为**随机元 X 的分布**. $P_X(A)$表示 $X(\omega)$这一变元落在 A 中的概率. 所以一个随机元就是 B 上的那样的一个变元,对于任意 $A\in\mathscr{B}$,都知道这个变元落在 A 中的概率. 和经典的概率论主要是研究随机变数的由其分布所确定的性质一样,抽象空间中的概率论主要研究的是随机元的由其分布确定的性质. 这时在引进随机元定义时所依据的概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$常常不起什么作用. 因此今后我们在研究随机元时常常只说 X 是 B 中的一个随机元,分布为 P_X,而忽略 X 所定义于其上的$(\Omega,\mathscr{F},P)$,不过既然说 X 是一随机元,自然就默认了存在一个概率空间,而且除非另有声明,我们总认为所讨论的随机元是定义于同一个这样的空间上和假定在这个空间上是有"足够多的"定义于其上的随机元的. 另外,虽然并不是必须的,而只是为了讨论时的方便,我们一般还假定概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$是完备的,即如果 $A\in\mathscr{F}$, $P(A)=0$,则 A 的任何子集也都属于 $\mathscr{F}$.(于是 P 在其上必为零.)

注意在$(B,\mathscr{B})$上给定一个概率 P,则$(B,\mathscr{B},P)$就是一个概率空间(虽然一般说来它并不完备),如果把它取作$(\Omega,\mathscr{F},P)$而定义 I 为其上的恒等映射,则 I 是$(B,\mathscr{B})$中的一个随机元,其分布 P_I 即为 P. 因此不仅$(B,\mathscr{B})$中的任何随机元分布都是 $\mathscr{B}$ 上的概率函数而且 $\mathscr{B}$ 上的任何概率函数也都可以视为 $\mathscr{B}$ 中某一随机元的分布.

定义 1 $(B,\mathscr{B})$中的两个随机元 X 和 Y 称为是**同分布的**,如果 P_X 和 P_Y 是 $\mathscr{B}$ 上的同一概率函数,即对任意 $A\in\mathscr{B}$,都有 $P_X(A)=P_Y(A)$. $(B,\mathscr{B})$中的一族随机元称为是同分布的,如果其中任意两个都是同分布的.

注意,$(B,\mathscr{B})$中的两个随机元 X 和 Y 即使是定义在不同的

概率空间上的，上述同分布的概念也是适用的.

为了进一步讨论的需要，我们先介绍一个定义和一个重要的引理.

定义 2 可测空间$(B,\mathscr{B})$上的一个子集族$\mathscr{E}\subset\mathscr{B}$称为是一个**唯一性族**(Unicity)或**决定类**(Determining Class)，如果$\mathscr{B}$上的任意两个概率函数P和Q只要在$\mathscr{E}$上相等就必然恒等，即若对于任意$C\in\mathscr{E}$都有$P(C)=Q(C)$，则对于任意$A\in\mathscr{B}$也有$P(A)=Q(A)$.

根据概率扩张定理，如果$\mathscr{E}$是一半代数，$\sigma(\mathscr{E})=\mathscr{B}$，则$\mathscr{E}$是一决定类. 如果$\mathscr{B}$是一可分的(线性)赋范空间，则

$$\mathscr{D}=\{\{x;(f_1(x),\cdots,f_n(x))\in A\};\quad A\in\mathscr{B}(R^n),$$
$$f_i\in B^*,i=1,2\cdots,n,\quad n=1,2,\cdots\}$$

是一代数，而且$\sigma(\mathscr{D})=\mathscr{B}(B)$(参见定理 1.4 的证明)，所以$\mathscr{D}$是一决定类. 下述引理表明存在比这个$\mathscr{D}$更小的决定类.

引理 1 如果$\mathscr{B}$是一可分的赋范空间，则$\mathscr{B}$中半空间的全体构成一决定类，即所有形如

$$\{x:f(x)<t\},\quad f\in B^*,t\in R$$

的集合构成一决定类.

证明 记这个集合类为$\mathscr{E}$. 设P_1,P_2为$\mathscr{B}(B)$上的两个概率，它们在$\mathscr{E}$上恒等.

对于任意$n\geqslant1$及$f_1,f_2\cdots,f_n\in B^*$，定义$\mathscr{B}(R^n)$上的概率测度：

$$P_i^{f_1,\cdots,f_n}(A)=P_i\{x:(f_1(x),\cdots,f_n(x))\in A\}$$
$$A\in\mathscr{B}(R^n),i=1,2.$$

如果能证明对于任意的$f_1,\cdots f_n\in B^*$，如上定义的$P_1^{f_1,\cdots,f_n}$和$P_2^{f_1,\cdots,f_n}$都恒等，则P_1,P_2在$\mathscr{D}$上是恒等的，从而在$\mathscr{B}(B)$上也就恒等. 以下我们就来证明$P_1^{f_1,\cdots,f_2}$和$P_1^{f_1,\cdots,f_n}$恒等，而这又只需证明它们的特征函数$\phi_{P_1}^{f_1,\cdots,f_n}$和$\phi_{P_2}^{f_1,\cdots,f_n}$相同即可.

对任意 $t=(t_1,\cdots,t_n)\in R^n, f=\sum_{i=1}^{n}t_if_i\in B^*$. 令

$$S_{t,z}=\{(y_1,\cdots y_n):\sum_{i=1}^{n}t_iy_i<z\},\quad z\in R$$

则 $S_{t,z}\in\mathscr{B}(R^n)$ 且由 P_1 和 P_2 在 $\mathscr{E}$ 上恒等知

$$\begin{aligned}P_1^{f_1,\cdots,f_n}(S_{t,z})&=P_1\{x;(f_1(x),\cdots,f_n(x))\in S_{t,z}\}\\&=P_1\{x:\sum_{i=1}^{n}t_if_i(x)<z\}\\&=P_1\{x:f(x)<z\}\\&=P_2\{x:f(x)<z\}\\&=P_2\{x:\sum_{i=1}^{n}t_if_i(x)<z\}\\&=P_2\{x:(f_1(x),\cdots f_2(x))\in S_{t,z}\}\\&=P_2^{f_1,\cdots,f_n}(S_{t,z})\end{aligned}$$

这说明对任意固定的 $t=(t_1,t_n)$,由

$$F_i(z)=P_i^{f_1,\cdots,f_n}(S_{t,z}),\qquad z\in R,\quad i=1,2$$

定义的两个一维分布函数相同,从而它们的特征函数 $\phi_1(u)$, $\phi_2(u)$应相同. 注意

$$\begin{aligned}\phi_i(u)&=\int_{-\infty}^{\infty}e^{iuz}\mathrm{d}F_i(z)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{iuz}\mathrm{d}P_i^{f_1\cdots f_n}(s_{t,z})\\&=\int_{R^n}e^{iu(t_1x_1+\cdots+t_nx_n)}P_i^{f_1,\cdots,f_n}(\mathrm{d}x)\\&=\phi_{P_i}^{f_1,\cdots,f_n}(ut),\qquad i=1,2\end{aligned}$$

便得

$$\phi_{P_1}^{f_1,\cdots,f_n}(ut)=\phi_{P_2}^{f_1,\cdots,f_n}(ut)$$

令 $u=1$,便有

$$\phi_{P_1}^{f_1,\cdots,f_n}(t)=\phi_{P_2}^{f_1,\cdots,f_n}(t)$$

对于 n-维空间,上述命题的结论是由 Gramér(1936)证明的,后来 Grenander(1963)把它推广到可分赋范空间.