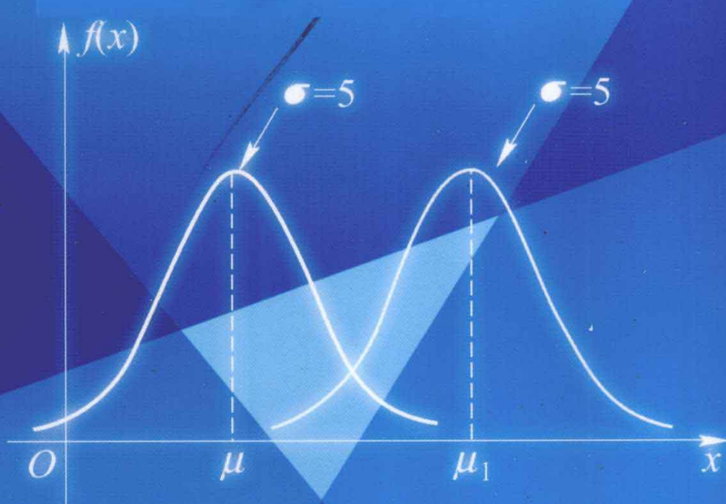
“十二五”应用型本科系列规划教材

概率论与数理统计

李其琛　曹伟平　董晓波　主编



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

本书是应用型本科《概率论与数理统计》教材，共8章，主要内容包括：概率论的基本概念、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验。每小节后配有练习题，每章配有总习题，并配有主要统计学家简介．

本书通俗易懂，简单易学，完全涵盖教学基本要求的内容，适合应用型本科和独立学院各专业使用．

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/李其琛，曹伟平，董晓波主编．—北京：机械工业出版社，2011.8

“十二五”应用型本科系列规划教材

ISBN 978-7-111-35075-0

Ⅰ.①概…　Ⅱ.①李…②曹…③董…　Ⅲ.①概率论－高等学校－教材②数理统计－高等学校－教材　Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第149350号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
策划编辑：韩效杰　责任编辑：韩效杰　昔玉花
版式设计：霍永明　责任校对：李秋荣
封面设计：赵颖喆　责任印制：乔　宇
北京机工印刷厂印刷（三河市南杨庄国丰装订厂装订）
2012年1月第1版第1次印刷
169mm×239mm・15.75印张・303千字
标准书号：ISBN 978-7-111-35075-0
定价：29.80元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务
社服务中心：(010)88361066
销售一部：(010)68326294
销售二部：(010)88379649
读者购书热线：(010)88379203

网络服务
门户网：http://www.cmpbook.com
教材网：http://www.cmpedu.com
封面无防伪标均为盗版

前　言

概率论与数理统计是一门研究随机现象的统计规律性的学科，是一门历史悠久且又新枝丛生的学科，它以研究随机现象本质和其统计规律的基本方法及其应用为主要内容．它在金融、保险、经济与企业管理、工农业生产、军事、医学、地质学、空间技术、气象与自然灾害预报等领域有着广泛的应用，其范围不断扩展、功能不断渗透而且日益深入，以至于我们每个人的生活和工作都离不开它．为此，我们以教学基本要求为最低要求，以具有针对性、实用性、知识性和简洁性为原则，编写了这本《概率论与数理统计》．

本书是结合我校多年对独立学院不同专业讲授概率论与数理统计课程积累的经验，编写的一本实用、简洁的公共必修课教材．教材共分8章．概率论部分包括：概率论的基本概念、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理；数理统计部分包括：数理统计的参数估计、假设检验等内容．本书重点讲解基本概念、基本理论、基本方法和基本应用实例．每节结束后附有练习，每章结束后附有习题和统计学家简介，有助于加深读者对概率统计知识的理解．书的最后附有练习和习题的参考答案．本书可作为高等应用型本科院校概率论与数理统计课程的教材与参考书．

本书在内容取材的安排上尽量做到新颖、通俗易懂、简单易学，既把握科学研究的需求，又重视实际生活的应用．概率论与数理统计的研究对象、研究方法、思维方式与其他工科数学课程都有较大区别，因此教材力求做到体裁的组织与递进的难度符合学生的认知规律，强调知识的传授与启发式教学相结合，通过实际问题引入基本概念和建立基本定理，指导学生独立思考，融会贯通知识体系，在引导学生步入概率论与数理统计知识殿堂的同时，重在培养学生的学习兴趣，掌握学习方法，养成自学的习惯，培养终身学习的思想，逐步巩固学生对本课程的理论知识和应用方法．

我们在例题的编写中尽量清楚阐述解题的思路、方法和步骤，以精选的例题来巩固学生的课堂知识，做到难易适当，深入浅出，举一反三，融会贯通．本书例题涉及面广，在例题选取和分析上把实用性放在重要位置上，注重在科学和生活中的应用．在习题的选择上，安排由浅入深、有助于加深基本概念和训练基本方法的习题，同时安排一些涉及通信、信息、经济、管理、医学、农业等方面的习题，使学生在获得概率论与数理统计的基本理论与方法的同时，也具备一些解决实际问题的能力．

本书的顺利完成，得到了淮海工学院理学院的领导以及全体教师的大力支持，许多国内专家和同行对本书提出了不少宝贵的意见．机械工业出版社的同志们为本书的顺利出版付出了辛勤劳动．在此一并表示感谢．

由于我们的水平有限，虽经多次修改，错误和不足一定存在，恳请专家及读者批评指正．本书将不断改进与完善，以提高质量，突显特色，更好地为读者服务．

编　者

目　录

第1章

概率论的基本概念

人们外出旅游，遇到刮风下雨的可能性有多大？

一辆汽车通过某路口，遇到红灯的可能性有多大？

某人去买彩票，彩票中奖的可能性有多大？

……

在现实生活中，存在大量这样的现象，虽然其结果具有不确定性，但是人们往往还是会关注它在一定的条件下发生的“可能性大小”．那么，如何去研究这一类不确定性问题呢？概率论就是研究这种“可能性大小”的一门数学分支，它从数学角度去探索这种不确定现象的客观规律性，并为解决这种不确定性问题提供了有效的方法．

本章主要介绍概率论的基本概念．

1.1 随机试验与随机事件

1.1.1 随机现象与随机试验

客观世界中主要存在着两类现象：

一类是**确定性现象**，指在一定的条件下必定会发生或必定不会发生的现象．例如，在一个标准大气压下水加热到100℃便会沸腾；向上抛一粒石子必定会下落；实心铁块放入水中，铁块必定不会浮起，等等．

另一类是**随机现象**，指在一定的条件下，可能发生也可能不发生的现象．例如，在相同的条件下，向上抛一枚质地均匀的硬币，其结果可能出现正面，也可能出现反面；发射一枚炮弹，弹落点与目标的距离可能是5米，也可能不是5米；从生产线上任意抽取一只灯泡测量其寿命，其寿命可能是1000小时，也可能不是1000小时，等等．

注意到，若在相同的条件下，对随机现象进行重复试验或观察，可能会出现多种可能的结果，且事先又无法预测将出现哪一种结果．但是经过长期的实践与探索，人们发现，在大量重复试验或观察中，它的结果却呈现出某种明显的规律性．

例如，在相同的条件下抛掷同一枚硬币时，其结果可能是出现正面，也可

能是出现反面，不论如何控制抛掷条件，在每次抛掷之前无法肯定试验会出现哪一个结果．但如果重复多次抛掷这枚硬币，其中出现正面的次数大约占到一半；又如，用同一门大炮对同一目标进行射击，弹落点不尽相同，并且每次射击之前无法确定弹落点的确切位置．但如果进行重复多次射击，其弹落点的分布呈现出一定的规律．

正如恩格斯所说，“在表面上是偶然性在起作用的地方，这种偶然性始终是受内部的隐蔽着的规律支配的，而问题只是在于发现这些规律．”**概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象的这种内在规律性的一门数学学科**．

那么，如何来研究随机现象呢？随机现象是通过随机试验来研究的．

【引例】 E_1：抛一枚硬币，观察出现正面 H、反面 T 的情况；

E_2：抛掷一颗骰子，观察出现的点数；

E_3：从一批产品(含正品和次品)中抽取三件产品来检验，观察正品的件数；

E_4：观察记录某公共汽车站某个时刻的候车人数；

E_5：从一批灯泡中抽取一只，测量它的寿命．

可以发现，上面的试验具有以下共同特点：

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行(试验可重复性)；

(2) 试验的所有可能结果是明确可知的，并且不止一个(全部结果已知性)；

(3) 每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个，但在试验之前却不能确定出现哪一个结果（试验前结果未定性）．

我们称这样的试验是一个**随机试验(random trial)**，为方便起见，也简称为**试验(trial)**，今后讨论的试验都是指随机试验．随机试验常用符号 E 来表示．

随机试验是一个含义广泛的数学术语，它包含各种各样的科学实验，也包括对客观事物进行的“观察”、“调查”或者“测量”等．

1.1.2 样本空间与随机事件

随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的**样本空间(sample space)**，记作 S. 样本空间的元素，即 E 的每个结果，称为**样本点(sample point)**，记作 e.

【例 1.1】 给出引例中随机试验 $E_1 \sim E_5$ 的样本空间．

E_1：$S=\{H, T\}$；

E_2：$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$；

E_3：$S=\{0, 1, 2, 3\}$；

E_4：$S=\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$；

E_5：$S=\{t \mid t \geqslant 0\}$．

样本空间的子集，称为**随机事件**，简称**事件(event)**，一般用大写英文字母

A，B，C 等表示．

例如，在试验 E_2 中，若 A 为“掷出奇数点”的事件，则 $A=\{1, 3, 5\}$；若 B 为“掷出的点数不超过 3”的事件，则 $B=\{1, 2, 3\}$．

在一次试验中，当且仅当 A 中包含的一个样本点出现，则称**事件 A 发生**．

例如，在试验 E_2 中，若一次试验时出现的点数是“5 点”，则上面的事件 A 发生，而事件 B 没有发生．

只含有一个样本点的随机事件，称为**基本事件**．

例如，试验 E_1 有两个基本事件 $\{\mathrm{H}\}$ 和 $\{\mathrm{T}\}$；试验 E_3 有四个基本事件 $\{0\}$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$．

在每次试验中一定发生的事件，称为**必然事件**．样本空间 S 包含所有的样本点，每次试验它必然发生，因而是一个必然事件．必然事件用 S 表示．

在每次试验中一定不发生的事件，称为**不可能事件**，记为 $\varnothing$．它是样本空间的一个空子集．

1.1.3　事件之间的关系和运算

在实际问题中，经常需要在一个随机试验下同时研究多个事件，而这些事件之间往往又是有联系的．下面利用集合之间的关系及运算来讨论事件之间的几种主要关系及其运算．

设 S 为试验 E 的样本空间，A，B，$A_k(k=1, 2, \cdots)$ 为随机事件．

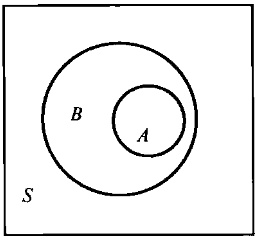
1. 子事件

若事件 A 包含于事件 B 中，则称事件 A 是事件 B 的一个**子事件**，记为 $A\subset B$. $A\subset B$ 时，可知若事件 A 发生，事件 B 必然发生．

对任意事件 A，都有 $\varnothing\subset A\subset S$.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B **相等**，记为 $A=B$.

例如，在试验 E_2 中，记 $A=\{$掷出奇数点$\}$，$B=\{$掷出的点数小于 6$\}$，则 $A=\{1, 3, 5\}$，$B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$．显然，事件 A 发生时，事件 B 必发生．



$A\subset B$

图　1-1

图 1-1 直观地描绘了事件 B 包含事件 A.

2. 和事件

事件 A，B 中至少有一个发生的事件，称为事件 A 与事件 B 的**和事件**，记为 $A\cup B$. 事件 A 与事件 B 的和事件是由 A 与 B 的样本点合并而成的事件，即

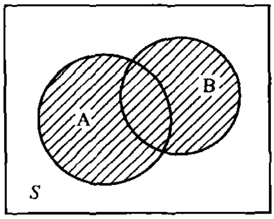
$$A\cup B=\{e\mid e\in A \text{ 或 } e\in B\}.$$

例如，在试验 E_2 中，记 $A=\{$掷出奇数点$\}$，$B=\{$掷出的点数是 3 的倍数$\}$，

则 $A=\{1, 3, 5\}$，$B=\{3, 6\}$，于是事件 A 与事件 B 的和事件 $A\cup B=\{1, 3, 5, 6\}$.

图 1-2 给出了和事件 $A\cup B$ 的直观表示.

类似地，n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 的和事件可记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$. 可列个事件 A_1，A_2，…，A_n，…的和事件可记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.



$A\cup B$

图 1-2

3. 积事件

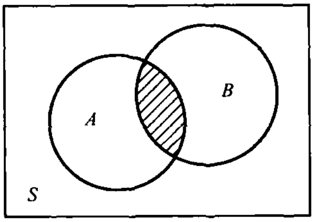
事件 A，B 同时发生的事件，称为事件 A 与事件 B 的**积事件**，记为 $A\cap B$，也可记为 AB. 事件 A 与事件 B 的积事件是由 A 与 B 的公共的样本点所构成的事件，即

$$AB=\{e\mid e\in A \text{ 且 } e\in B\}.$$

例如，在试验 E_2 中，记 $A=\{$掷出奇数点$\}$，$B=\{$掷出的点数是素数$\}$，则 $A=\{1, 3, 5\}$，$B=\{2, 3, 5\}$，于是事件 A 与事件 B 的积事件 $AB=\{3, 5\}$.

积事件 AB 可以用图 1-3 来直观表示.

类似地，n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 的积事件记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$. 可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的积事件记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.



$A\cap B$

图 1-3

4. 差事件

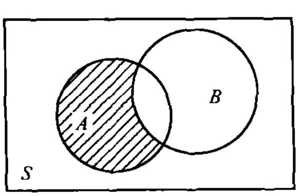
事件 A 发生而事件 B 不发生的事件，称为事件 A 与事件 B 的**差事件**，记为 $A-B$. 事件 A 与事件 B 的差事件是由属于 A 而不属于 B 的样本点所构成的事件，即

$$A-B=\{e\mid e\in A \text{ 且 } e\notin B\}.$$

容易推出 $A-B=A-AB$.

例如，在试验 E_2 中，记 $A=\{$掷出奇数点$\}$，$B=\{$掷出的点数是素数$\}$，则 $A=\{1, 3, 5\}$，$B=\{2, 3, 5\}$，于是事件 A 与事件 B 的差事件 $A-B=\{1\}$.

差事件 $A-B$ 可以用图 1-4 来直观表示.



$A-B$

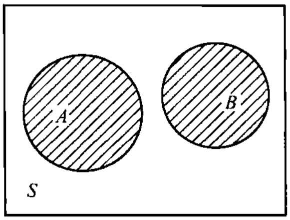
图 1-4

5. 互不相容事件(或互斥事件)

在一次试验中，若事件 A 与事件 B 不能同时发生，则称事件 A 与事件 B 是**互不相容的**，或称事件 A 与事件 B 是**互斥的**，即

$$A \cap B = \varnothing.$$

例如，在试验 E_2 中，记 $A=\{$掷出的点数至多为 $3\}$，$B=\{$掷出的点数大于 $4\}$，则 $A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{5, 6\}$，在组成事件 A，B 的样本点中并无公共部分，故 $AB=\varnothing$，亦即事件 A，B 不会同时发生，所以 A，B 是互不相容的.



$A\cap B=\varnothing$

图　1-5

特别地，基本事件是两两互不相容的.

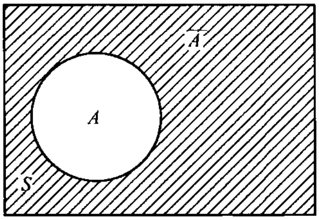
图 1-5 直观地表示了两事件互不相容的含义.

6. 对立事件

若 $A\cap B=\varnothing$ 且 $A\cup B=S$，则称事件 A 与事件 B 互为**对立事件**，或称事件 A 与事件 B 互为**逆事件**. 事件 A 与事件 B 互为对立事件，是指事件 A 与事件 B 不能同时发生又不能同时不发生，即每次试验中事件 A 与事件 B 有且仅有一个发生. A 的对立事件记为 $\overline{A}$.

显然，$\overline{A}=S-A$，$A\cup\overline{A}=S$，$A\cap\overline{A}=\varnothing$.

例如，在试验 E_2 中，记 $A=\{$掷出奇数点$\}$，$B=\{$掷出偶数点$\}$，则 $A=\{1, 3, 5\}$，$B=\{2, 4, 6\}$. 此时 $A\cap B=\varnothing$，$A\cup B=S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，所以 A，B 互为对立事件. 于是 $B=\overline{A}$，$A=\overline{B}$.



$A\cup\overline{A}=S, A\cap\overline{A}=\varnothing$

图　1-6

图 1-6 直观地表示了两事件对立的含义.

注意：对立事件必为互不相容事件，反之，互不相容的两个事件未必是对立事件.

1.1.4　事件的运算律

设 A，B，C 为事件，则有

交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

德·摩根(De Morgan)律：$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$，$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

【例 1.2】　某人向指定目标射击三枪，以 A_1，A_2，A_3 分别表示事件“第一、二、三枪击中目标”，试用 A_1，A_2，A_3 表示下列事件：

(1) 只击中第一枪；

(2) 只击中一枪；

(3) 三枪都未击中；

（4）至少击中一枪．

解　（1）$A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$；

（2）$A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$；

（3）$\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$；

（4）$A_1\cup A_2\cup A_3$ 或

$A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\cup A_1A_2\overline{A_3}\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup\overline{A_1}A_2A_3\cup A_1A_2A_3$.

【例 1.3】　设 A 表示事件“甲产品畅销”，B 表示事件“乙产品滞销”，试说明 $A\cup\overline{B}$，$\overline{A\cup B}$表示的事件．

解　$A\cup\overline{B}$ 表示事件“甲产品畅销或乙产品畅销”，

$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ 表示事件“甲产品滞销且乙产品畅销”.

练习 1.1

1. 写出下列随机试验的样本空间 S：

（1）同时掷两颗骰子，观察两颗骰子的点数之和；

（2）一人连续投篮，直到投中为止，观察投篮的次数；

（3）向单位圆内任投一点，观察点的坐标.

2. 若要击落飞机，必须同时击毁两个发动机或击毁驾驶舱．记：$A_1=\{$击毁第一个发动机$\}$，$A_2=\{$击毁第二个发动机$\}$，$B=\{$击毁驾驶舱$\}$．试用 A_1，A_2 和 B 表示事件$\{$飞机被击落$\}$.

3. 设 A，B，C 表示三个事件，试将下列事件用 A，B，C 表示出来：

（1）A 与 B 都发生而 C 不发生；

（2）A，B，C 都发生；

（3）A，B，C 都不发生；

（4）A，B，C 恰有一个发生；

（5）A，B，C 至少有一个发生；

（6）A，B，C 中不多于一个发生；

（7）A，B，C 中恰有两个发生；

（8）A，B 至少有一个发生，而 C 不发生．

4. 一批产品中有合格品和废品，从中有放回地抽取三次，每次取一件，设 $A_i=\{$第 i 次抽到废品$\}$，$i=1$，2，3，试用 A_i 表示下列事件：

（1）第一次、第二次中至少有一次抽到废品；

（2）只有第一次抽到废品；

（3）三次都抽到废品；

（4）至少有一次抽到合格品；

（5）只有两次抽到废品．

5. 袋中有 10 个球，分别编有号码 1 ~ 10. 从中任取一球，设 $A=\{$取到球的号码是偶数$\}$，$B=\{$取到球的号码是奇数$\}$，$C=\{$取到球的号码小于 5$\}$，试问下述运算分别表示什么事件？

(1) $A\cup B$;　(2) AB;　(3) AC;　(4) $\overline{A}\,\overline{C}$;　(5) $\overline{B\cup C}$.

1.2　频率与概率

对于一个事件(除必然事件和不可能事件外)来说，它在一次试验中可能发生，也可能不发生. 我们常常希望知道某些事件在一次试验中发生的可能性究竟有多大. 随机现象在大量重复试验中所呈现出的内在规律性为我们用数来表示事件发生的可能性提供了客观的依据. 为此，首先引入频率，它描述了事件发生的频繁程度，进而引出表示事件在一次试验中发生的可能性大小的数——概率.

1.2.1　频率

在相同的条件下，将试验 E 重复进行 n 次，以 n_A 表示事件 A 在这 n 次试验中发生的次数(频数). 比值 n_A/n 称为事件 A 在这 n 次试验中发生的**频率(frequency)**，记作 $f_n(A)$.

易知频率具有以下性质：

1° 非负性：$f_n(A)\geqslant 0$;

2° 规范性：$f_n(S)=1$;

3° 有限可加性：若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 两两互不相容，则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k).$$

事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 反映了事件 A 发生的频繁程度，$f_n(A)$ 越大，事件 A 发生越频繁，这就意味着 A 在一次试验中发生的可能性也越大. 那么，是否可以用频率来表示事件 A 在一次试验中发生的可能性大小？先看一个例子：

【例 1.4】 抛掷一枚均匀对称的硬币，可能出现正面，也可能出现反面. 设 $A=\{$出现正面$\}$，记录 A 发生的频数及频率，得到数据如下表：

试验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_A	$f_n(A)$	n_A	$f_n(A)$	n_A	$f_n(A)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506

（续）

试验序号	n = 5		n = 50		n = 500	
	n_A	$f_n(A)$	n_A	$f_n(A)$	n_A	$f_n(A)$
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

从上表可以看出，当试验次数较少时，出现正面的频率差别比较大，但是，当试验次数增多时，频率明显地在0.5左右摆动.

历史上，也有一些统计学者做过类似的实验，根据资料记载，所得数据见下表.

实验者	n	n_A	$f_n(A)$
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲　丰	4040	2048	0.5069
K·皮尔逊	12000	6019	0.5016
K·皮尔逊	24000	12012	0.5005

从上表可以看出，当试验次数增加时，频率$f_n(A)$总是在0.5左右摆动，并且随着试验次数的逐渐增加，频率呈现出稳定于0.5的趋势. 频率的这种稳定性就是平常所说的统计规律性，它揭示了随机现象内在的必然规律性，因此用频率的稳定值来刻画事件A发生的可能性的大小是合适的.

1.2.2　概率

定义 1.1（概率的统计定义）　设有随机试验E，若当试验重复次数n充分大时，事件A发生的频率$f_n(A)$稳定地在某一数值p附近摆动，则称数p为事件A发生的**概率（probability）**.

概率的统计定义虽然比较直观且容易理解，但其在数学上不够严密. 这是因为它主要依据的是"重复试验次数充分大时，频率所呈现的稳定性"这一事实. 然而究竟试验次数应该大到怎样的程度，以及所谓"在某一数值p附近摆动"都无法确切地理解. 另一方面，在实际问题中，我们也不可能对每个事件都做大量的试验，然后求得事件的频率，用以表示事件发生的可能性大小. 因此，有必要对"概率"这一重要的基本概念作数学的公理化处理，这也是概率论作为一门学科进一步研究的需要.