全国高等教育自学考试指定教材

小学教育专业（专科）

高等数学基础

（附高等数学基础自学考试大纲）

全国高等教育自学考试指导委员会 组编
主编　王德谋

北京师范大学出版社

全国高等教育自学考试指定教材

小学教育专业(专科)

高等数学基础

（附高等数学基础自学考试大纲）

全国高等教育自学考试指导委员会　组编

主　编　王德谋

北 京 师 范 大 学 出 版 社
·北 京·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学基础/王德谋主编.—北京:北京师范大学出版社,1999.1

ISBN 7-303-04940-1

Ⅰ.高…　Ⅱ.王…　Ⅲ.高等数学-高等教育-自学考试-教材
Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 39743 号

北京师范大学出版社出版发行
(北京新街口外大街 19 号　邮政编码:100875)
出版人:常汝吉
北京师范大学印刷厂印刷　全国新华书店经销
开本:850mm×1 168mm　1/32　印张:18.25　字数:453 千字
1999 年 4 月第 1 版　1999 年 4 月第 1 次印刷
印数:1～5 000 册　定价:23.00 元

《自学考试教材》出版前言

高等教育自学考试教材是高等教育自学考试工作的一项基本建设. 经教育部同意, 我们拟有计划、有步骤地组织编写一些高等教育自学考试教材, 以满足社会自学和适应考试的需要.《高等数学基础》是为高等教育自学考试小学教育专业 (专科) 组编的一套教材中的一种. 这本教材是根据专业考试计划, 从造就和选拔人才的需要出发, 按照全国考委颁布的《高等数学基础自学考试大纲》的要求, 结合自学考试的特点, 组织高等院校一些专家学者集体编写而成的.

小学教育专业《高等数学基础》自学考试教材, 是供个人自学、社会助学和国家考试使用的. 现经组织专家审定同意予以出版发行. 我们相信, 随着高等教育自学考试教材的陆续出版, 必将对我国高等教育事业的发展, 保证自学考试的质量起到积极的促进作用.

编写高等教育自学考试教材是一种新的尝试, 希望得到社会各方面的关怀和支持, 使它在使用中不断提高和日臻完善.

全国高等教育自学考试指导委员会

1998 年 9 月

前 言

《高等数学基础》是全国高等教育自学考试小学教育专业的试用教材，内容包括空间解析几何、一元函数微积分和线性代数的基础知识，重点讲授基本概念、基本方法和简单应用。开设本课程的目的在于使学员对高等数学的基本思想和一般方法有初步的了解，在数学思维和计算技能方面受到一次较为系统严格的训练，提高对初等数学的认识和处理能力，为今后的教学工作打下较为坚实的基础.

本书选材依据的是自学考试大纲，突出重点，注重基础. 少量打“*”号的内容，仅供有兴趣的读者参考，不属于考试范围之内. 编写教材时，充分考虑到自学的特点，力争叙述简明，深入浅出，通俗易懂；对于难点部分，不仅注意掌握尺度，同时遵照循序渐进原则，逐步加深，既配有较多例题，又充分利用几何直观，以减轻难度；引入重要概念时注意讲清背景；证明定理，努力做到思路清晰. 每章都有小结，帮助学员整理教材内容，抓住重点. 大部分习题都有答案，可供解题后参考.

本书王德谋任主编，参加编写的有：王敬庚教授（第一至四章）、王德谋教授（第五至八章）、高素志教授（第九、十章）、罗承忠教授（十一至十三章）.

在此，我们对专家评审委员成员郝钢新教授、刘增贤教授和刘培娜副教授所提的宝贵意见，表示衷心的感谢！

编 者

1998年9月

目　录

第一篇　空间解析几何

第一章　平面解析几何复习 …………………………… (3)

1.1　直线……………………………………………… (3)

1.2　圆锥曲线………………………………………… (8)

1.3　参数方程………………………………………… (16)

习题一 ……………………………………………… (20)

第二章　向量代数 ……………………………………… (23)

2.1　空间直角坐标系………………………………… (23)

2.2　向量及其线性运算……………………………… (27)

2.3　向量的坐标……………………………………… (36)

2.4　向量的数量积　向量积和混合积……………… (44)

小结 ………………………………………………… (55)

习题二 ……………………………………………… (57)

第三章　平面和空间直线 ……………………………… (61)

3.1　平面的方程……………………………………… (61)

3.2　二平面的相互位置　点到平面的距离………… (69)

3.3　空间直线的方程………………………………… (74)

3.4　两直线的夹角及平行、垂直的条件 …………… (81)

3.5　空间直线与平面的位置关系…………………… (86)

小结 ………………………………………………… (94)

习题三 …………………………………………………………… (96)
第四章　二次曲面举例…………………………………………… (101)
4.1　曲面方程的概念　球面 ………………………………… (101)
4.2　直圆柱面及母线平行于坐标轴的柱面 ……………… (106)
*4.3　旋转曲面和直圆锥面 ………………………………… (111)
小结…………………………………………………………… (115)
习题四………………………………………………………… (118)

第二篇　微积分

第五章　函数…………………………………………………… (123)
5.1　预备知识 ……………………………………………… (123)
5.2　函数概念 ……………………………………………… (131)
5.3　函数的几种简单性质 ………………………………… (141)
5.4　复合函数和反函数 …………………………………… (144)
5.5　基本初等函数 ………………………………………… (149)
小结…………………………………………………………… (153)
习题五………………………………………………………… (155)
第六章　极限与连续…………………………………………… (161)
6.1　数列极限 ……………………………………………… (162)
6.2　函数极限 ……………………………………………… (176)
6.3　两个重要极限 ………………………………………… (183)
6.4　无穷小量与无穷大量 ………………………………… (186)
6.5　连续函数 ……………………………………………… (190)
小结…………………………………………………………… (199)
习题六………………………………………………………… (201)
第七章　导数与微分…………………………………………… (207)
7.1　导数概念 ……………………………………………… (207)

7.2 简单函数之导数 …………………………………… (213)
7.3 求导法则及导数公式 ……………………………… (215)
7.4 高阶导数 ………………………………………… (228)
7.5 微分 ……………………………………………… (231)
小结……………………………………………………… (238)
习题七…………………………………………………… (239)
第八章 中值定理及导数的应用………………………… (245)
8.1 微分中值定理 …………………………………… (245)
8.2 洛比达法则 ……………………………………… (252)
8.3 函数的增减性与极值 …………………………… (257)
8.4 函数的凸性与拐点 ……………………………… (268)
8.5 曲线的渐近线 …………………………………… (270)
8.6 描绘函数的图象 ………………………………… (272)
小结……………………………………………………… (275)
习题八…………………………………………………… (277)
第九章 不定积分………………………………………… (281)
9.1 不定积分的概念 ………………………………… (281)
9.2 基本积分表和积分的基本性质 ………………… (284)
9.3 第一换元法 ……………………………………… (289)
9.4 第二换元法 ……………………………………… (293)
9.5 分部积分法 ……………………………………… (296)
9.6 几个实例 ………………………………………… (300)
小结……………………………………………………… (307)
习题九…………………………………………………… (309)
第十章 定积分…………………………………………… (315)
10.1 定积分的概念…………………………………… (315)
10.2 定积分的基本性质……………………………… (322)
10.3 定积分的计算…………………………………… (327)

10.4　定积分的几何应用……………………………… (335)
*10.5　定积分的物理应用 …………………………… (341)
小结……………………………………………………… (346)
习题十…………………………………………………… (350)

第三篇　线性代数

第十一章　行列式………………………………………… (359)
11.1　二阶、三阶行列式 ………………………………… (359)
11.2　n 阶行列式的定义 ……………………………… (364)
11.3　行列式的性质……………………………………… (371)
11.4　行列式按行(列)展开……………………………… (379)
11.5　克莱姆法则………………………………………… (386)
小结……………………………………………………… (392)
习题十一………………………………………………… (394)
第十二章　矩阵…………………………………………… (403)
12.1　矩阵的概念………………………………………… (403)
12.2　矩阵的运算………………………………………… (407)
12.3　初等矩阵与矩阵的初等变换……………………… (417)
12.4　矩阵的秩…………………………………………… (420)
12.5　逆矩阵……………………………………………… (425)
小结……………………………………………………… (441)
习题十二………………………………………………… (443)
第十三章　线性方程组…………………………………… (453)
13.1　用初等变换解线性方程组………………………… (453)
13.2　线性方程组解的结构……………………………… (475)
小结……………………………………………………… (489)
习题十三………………………………………………… (491)

参考答案……………………………………………………………… (497)
参考文献……………………………………………………………… (530)

《高等数学基础》自学考试大纲

《自学考试大纲》出版前言………………………………………………… (533)
Ⅰ. 课程性质与设置目的 ……………………………………………… (535)
Ⅱ. 课程内容与考核目标 ……………………………………………… (536)
Ⅲ. 有关说明与实施要求 ……………………………………………… (565)
附录　题型举例………………………………………………………… (568)

第　一　篇

空间解析几何

第一章　平面解析几何复习

本章系统地复习了平面解析几何的有关知识，为学习空间解析几何做好准备，包括直线方程的几种形式、直线间的位置关系与夹角、点到直线的距离；圆锥曲线（圆、椭圆、双曲线、抛物线）的定义、方程、几何性质等；曲线的参数方程以及与普通方程间的转化.

1.1　直　线

1.1.1　直线方程的几种形式

1. 平面直角坐标系中的两个基本公式

(1)两点 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$的距离公式

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \tag{1.1}$$

(2)线段的定比分点公式

已知 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，点 $P(x,y)$分线段 P_1P_2 所成的比 $\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda(\lambda\neq-1)$，则点 P 的坐标是

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \tag{1.2}$$

特别地，线段 P_1P_2 的中点 M 的坐标为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

2. 直角坐标系中直线方程的不同形式

(1)点斜式

经过点 $P_1(x_1,y_1)$，斜率是 k 的直线 l 的方程为

$$y-y_1=k(x-x_1). \tag{1.3}$$

方程(1.3)称为直线方程的**点斜式**.

(2)斜截式

斜率为 k，与 y 轴的交点为 $(0,b)$ 的直线 l 的方程为

$$y=kx+b, \tag{1.4}$$

此处 b 称为直线 l 在 y 轴上的截距.

方程(1.4)称为直线方程的**斜截式**.

(3)两点式

经过两点 $P_1(x_1,y_1)$ 及 $P_2(x_2,y_2)$ $(x_1\neq x_2$ 且 $y_1\neq y_2)$ 的直线 l 的方程为

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \tag{1.5}$$

方程(1.5)称为直线方程的**两点式**.

(4)截距式

在 x 轴和 y 轴上的截距分别是 a 和 b $(a\neq 0,b\neq 0)$ 的直线 l 的方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \tag{1.6}$$

方程(1.6)称为直线方程的**截距式**.

(5)直线方程的一般式

直线的上述各种形式的方程都是二元一次方程，反之，关于 x 和 y 的一次方程

$$Ax+By+C=0, \tag{1.7}$$

其中 A，B 不全为零，皆表示直线.

二元一次方程(1.7)称为直线方程的**一般式**. 当 $B\neq 0$ 时，直

线(1.7)的斜率为$-\frac{A}{B}$.

同一条直线的各种形式的方程，可以通过同解变形互相转化，在这个意义下，我们把它们看成是同一个方程. 因此我们可以说直线与二元一次方程一一对应.

例 1 已知$\triangle ABC$的顶点$A(0, 5)$，$B(2, -2)$，$C(-6, 4)$，求BC边上的中线所在的直线方程.

解 设BC的中点为$D(d_1, d_2)$，由中点公式得

$$d_1 = \frac{2+(-6)}{2} = -2,\quad d_2 = \frac{-2+4}{2} = 1,$$

于是有$D(-2, 1)$. 过两点$A(0, 5)$与$D(-2, 1)$的直线方程(两点式)为

$$\frac{x-0}{-2-0} = \frac{y-5}{1-5},$$

整理得

$$2x - y + 5 = 0.$$

1.1.2 两条直线的位置关系

1. 两条直线平行和垂直的条件

设直线l_1和l_2的斜率分别为k_1和k_2，则

$$l_1 \parallel l_2(\text{包括重合}) \Longleftrightarrow k_1 = k_2;$$

$$l_1 \perp l_2 \Longleftrightarrow k_1 = -\frac{1}{k_2}(\text{或 } k_1 \cdot k_2 = -1).$$

若直线l_1和l_2的方程分别为

$$l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

$$l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

则

$$l_1 \parallel l_2(\text{不重合}) \Longleftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2};$$

$$l_1 \text{ 与 } l_2 \text{ 重合} \Longleftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2};$$

$$l_1 \perp l_2 \Longleftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0.$$

2. 两条直线所成的角

我们把直线 l_1 依逆时针方向旋转到与 l_2 重合时所转的角，叫做 **l_1 到 l_2 的角**. 在图 1.1 中，直线 l_1 到 l_2 的角是 θ_1，l_2 到 l_1 的角是 $\theta_2(\theta_1+\theta_2=180°)$. θ_1 和 θ_2 中不大于直角者，称为**直线 l_1 和 l_2 所成的角**. 简称**夹角**.

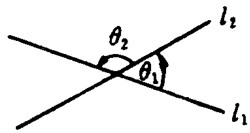

图 1.1

设直线 l_1 的斜率为 k_1，l_2 的斜率为 k_2，直线 l_1 到 l_2 的角为 θ. 若 $1+k_1k_2=0$，则 $\theta=90°$；若 $1+k_1k_2\neq 0$，则 $\tan\theta=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$. 计算 l_1 与 l_2 的夹角 φ 用公式

$$\tan\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|.$$

3. 两条直线的交点

求两条直线 $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ 与 $l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$ 的交点，只需将这两个方程联立求解.

已知方程组

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2=0.\end{cases}$$

当 $\dfrac{A_1}{A_2}\neq\dfrac{B_1}{B_2}$ 时，方程组有唯一解：

$$\begin{cases}x=\dfrac{B_1C_2-B_2C_1}{A_1B_2-A_2B_1},\\ y=\dfrac{C_1A_2-C_2A_1}{A_1B_2-A_2B_1}.\end{cases}$$

它就是二直线的唯一交点的坐标.

当$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$时，方程组无解，即二直线无交点(二直线平行).

当$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$时，方程组有无穷多组解，即二直线有无穷多交点(二直线重合).

4. 点到直线的距离

设点$P(x_0,y_0)$到直线$l:Ax+By+C=0$的距离为d,则

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

例2 当a为何值时，直线$ax-5y+9=0$与$2x+3y-15=0$ (1)互相平行；(2)互相垂直.

解 (1)依二直线平行的充要条件$\frac{a}{2}=\frac{-5}{3}\neq\frac{9}{-15}$，得$a=-\frac{10}{3}$；

(2)依二直线垂直的充要条件$a\times2+(-5)\times3=0$，得$a=\frac{15}{2}$.

例3 求二平行直线$2x-7y+8=0$与$2x-7y-6=0$间的距离.

解 二平行直线间的距离处处相等，且都等于其中一条直线上的任一点到另一条直线的距离. 为计算简单，我们取一条直线与某个坐标轴的交点，例如取$2x-7y-6=0$与x轴的交点$P(3,0)$，计算$P(3,0)$到直线$2x-7y+8=0$的距离

$$d=\frac{|2\times3-7\times0+8|}{\sqrt{2^2+(-7)^2}}=\frac{14}{\sqrt{53}}=\frac{14}{53}\sqrt{53}.$$

这就是所求二已知平行直线间的距离.