新世纪高等学校教材

数学与应用数学基础课系列教材

模型论及其在计算机科学中的应用

MOXINGLUN JIQI ZAI JISUANJI KEXUE JISUANJI KEXUE YONG

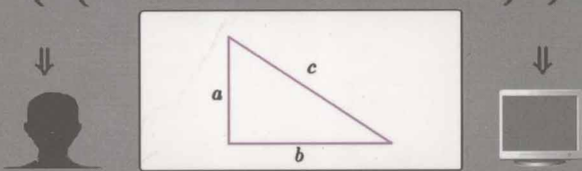
北京师范大学数学科学学院 主 编

罗里波 编 著

$$\forall x_1x_2y_1y_2z_1z_2$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \left\{ \left[\frac{x_1-y_1}{x_2-y_2}\cdot\frac{x_1-z_1}{x_2-z_2}\right] = -1 \right\} \rightarrow \\ \left\{ \begin{array}{c} [(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2]+ \\ [(x_1-z_1)^2+(x_2-z_2)^2] = \\ [(y_1-z_1)^2+(y_2-z_2)^2] \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

$\Downarrow$ $\Downarrow$



(10 min) ⇒ 是定理 ⇐ (2 h)

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

模型论及其在计算机科学中的应用

MOXINGLUN JIQI ZAI JISUANJI KEXUE ZHONG DE YINGYONG

北京师范大学数学科学学院　主　编

罗里波　编　著

北京师范大学出版集团

BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP

北京师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

模型论及其在计算机科学中的应用／罗里波编著．—北京：北京师范大学出版社，2012.1

（新世纪高等学校教材·数学与应用数学基础课系列教材）

ISBN 978-7-303-13602-5

Ⅰ.①模… Ⅱ.①罗… Ⅲ.①模型论—应用—计算机科学—高等学校—教材 Ⅳ.①O141.4②TP3

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第220379号

营销中心电话　010-58802181 58808006
北师大出版社高等教育分社网　http://gaojiao.bnup.com.cn
电子信箱　beishida168@126.com

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街19号
邮政编码：100875
印　　刷：北京中印联印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：170 mm × 230 mm
印　　张：19.5
字　　数：340千字
版　　次：2012年1月第1版
印　　次：2012年1月第1次印刷
定　　价：30.00元

策划编辑：岳昌庆　　责任编辑：岳昌庆　赵国兴
美术编辑：毛　佳　　装帧设计：毛　佳
责任校对：李　菡　　责任印制：李　啸

前　　言

1915 年北京高等师范学校成立数理部，1922 年成立数学系. 2004 年成立北京师范大学数学科学学院. 经过近百年的风风雨雨，数学科学学院在学科建设、人才培养和教学实践中积累了丰富的经验. 将这些经验落实并贯彻到教材编著中去是大有益处的.

1980 年，北京师范大学出版社成立，给教材的出版提供了一个很好的契机. 北京师范大学数学科学学院教师编著的数十种教材已先后在这里出版. 除了北京师范大学现代数学丛书外，就大学教材而言，共有 5 种版本. 第 1 种是列出编委会的高等学校教学用书，这是在 1985 年，由我校出版社王文涌先生约请北京师范大学数学与数学教育研究所所长严士健教授等组成编委会，研究编写出版了 1 套 (17 部) 数学系本科生教材和非数学专业高等数学教材. 在出版社的大力支持下，这一计划完全实现，满足了当时教学的需要. 第 2 种是标注高等学校教学用书，但未列编委会的教材. 第 3 种是面向 21 世纪课程教材. 第 4 种是北京师范大学现代数学课程教材. 第 5 种是未标注高等学校教学用书，但实际上是高等学校教学用书. 在这些教材中，除再次印刷外，已经有多部教材进行了修订或出版了第 2 版.

2005 年 5 月，李仲来教授汇总了北京师范大学数学科学学院教师在北京师范大学出版社出版的全部著作，由李仲来教授和北京师范大学出版社理科编辑部王松浦主任进行了沟通和协商，由北京师范大学数学科学学院组编 (李仲来教授负责)，准备对学院教师目前使用的，或北京师范大学出版社已经没有存书的部分教材进行修订后再版，另有一些教材需要重新编写. 计划用几年时间，出版数学及应用数学、数学教育、大学数学基础课程、数学学科硕士研究生 4 个系列的主要课程教材. 我们希望使用这些教材的校内外专家学者和广大读者，提出宝贵的修改意见，使其不断改进和完善.

本套教材可供高等院校本科生、教育学院数学系、函授 (数学专业) 和在职中学教师等使用和参考. (李仲来执笔)

北京师范大学数学科学学院

2011-03-18

作者的话

本书是为了给数学系和计算机科学系的本科生和研究生开设模型论课而写的，它的主要内容是模型论的基本原理和它在计算机科学中的计算复杂度理论和机器证明等方面的应用. 书中主要部分的内容曾经在 2002 年贵州大学，2003 年昆明理工学院和 2004 年贵州民族学院举办的全国计算机 (暑期) 高级研讨班上讲授过. 又在石家庄经济学院的教师研讨班上使用过. 当时学员们认为比较容易接受. 后来我又补充了一些内容使它更为易懂. 我们的目标是让这本书成为开设模型论课程的理想课本，利用这本书来自学模型论也不至于太困难.

本书的特点是补充了必要的集合论和数理逻辑的知识，有助于后面对模型论相关部分的理解. 我在讲授模型论的过程中，学员们经常提出一些问题，我相信这些也是广大的读者们所关心的问题. 其中包括：

(1) 为什么有形式逻辑的完全性定理和 Gödel 的不完全性定理，它们有什么关系和不同？

(2) 什么是集合论中的 Cantor 悖论和 Skolem 悖论，怎样解释这些悖论？

(3) 什么是模型论的内语言和外语言，在使用上要注意什么？

(4) 紧致性定理是怎样得来的，它有什么应用？

(5) 不可判定理论是怎样产生的，它和可判定理论有什么不同，哪些模型的理论是可判定的，哪些模型的理论是不可判定的？

(6) 怎样利用模型论方法来研究计算复杂度？

(7) Cantor 的实数有什么局限性？

(8) 量词消去法在系统的判定和式子的计算上有什么作用？

(9) Goldbach 猜想解决到什么程度，关于它有什么争论？

本书对以上这些问题做出了解释，其中有些结论是作者研究多年的个人理解. 这些看法是在其他书中没有的.

本书的第一章到第三章是学习模型论的准备知识部分. 第一章对模型论做了一般的介绍. 第二章中，我们主要补充了集合论关于基数运算和超限归纳法的知识. 第三章我们梗概地介绍数理逻辑中命题演算和一阶逻辑演算的主要定理. 这些介绍主要是为了让本书更为自给自足，使得读者如果想要翻查数理逻辑的定理，就不必再去找另外一本书. 我们没有全部给出这一部分定理的证明，但是对与模型论相关的知识我们就加以详细的说明.

从第四章到第九章是本书的核心部分，也是模型论的主要内容. 第四章介绍模型的基本性质：其中包括模型的构成，模型的同构，同态，子模型，扩张，膨胀，归约，式子的代入与验证，模型数，模型的同构嵌入和初等等价. 第五章介绍紧致性定理与 LST 定理，其中我们引述了紧致性定理的大量的应用例子.

它们充分显示了模型论对其他领域的研究工作所起的作用. 在 §5.5 模型论的内语言与外语言这一小节中, 我们详细地分析了内语言与外语言的不同之处, 这是学习模型论的最难的地方, 也是最容易出错的地方, 因此也是初学者必读的部分. 第六章主要介绍初等子模型, 完全的理论和模型完全的理论, 每一种理论都给出了很多例子. 第七章讲述利用初等链来构造模型, 并且在式子集的实现与省略这一小节中讨论了无限式子集的实现与省略的问题. 第八章研究对子模型、模型链的并和同态象的保持性定理. 第九章介绍可数语言的几种特殊模型, 它们是素模型、原子模型、齐次模型和可数饱和模型.

第十章介绍数学的其他领域中的一些具体的模型的逻辑性质. 它们是偏序、有序集模型; 布尔代数模型; 群, 环, 域系列的模型; 还有其他系列的模型. 这一章是联系模型论和数学模型的纽带, 也是模型论之所以有生命力的原因之一. 第十一章讲述模型理论的量词消去法的重要性、量词消去法的一般步骤, 并且以无端稠密有序集作为典型的例子来介绍量词消去法的过程. 量词消去法和判定论、可计算性以及机器证明有着很密切的关系, 是计算机科学的研究人员必须了解的知识. 第十二章专门介绍对不可判定的模型理论的一些研究结果. 从第十三章到第十八章主要介绍模型论与计算机科学和集合论有关的研究工作. 这些研究工作主要是想说明模型论与计算机科学, 数学中其他分支的联系, 以及应用模型论来研究具体的数学系统所用到的主要方法. 在一部分章节的后面我们列出了一些练习题, 它们是为帮助理解书上内容而设置的.

感谢北京师范大学数学科学学院和北京师范大学出版社的大力支持和帮助. 感谢我的导师王世强教授对我的教导和帮助, 感谢厦门大学赵致琢教授, 贵州民族学院何光优教授, 石家庄经济学院刘坤起教授和北京师范大学何青教授的大力帮助. 感谢我的妻子葛月明在本书的 LaTeX 源文件的录入上做的很多工作和大力的帮助.

作者

2011 年 3 月

目 录

第一章　模型论的发生与发展

§1.1　模型论在科学发展中的地位

现代的数学已经发展成为一个含有十几个大分支一百来个小分支的综合性的科学. 数学的研究对象包括数字计算, 微分积分, 概率统计, 各种代数系统, 时间空间, 逻辑推理以及很多其他内容. 数学的应用遍及物理、化学、生物、地理等自然科学, 财经、政治、语言等社会科学. 此外人们还研究了数学所研究的某些对象是否存在, 数学的基础是否坚实和数学的推理是否合理等问题. 一般地, 人们认为数学有三大基础: 数论、数理逻辑和集合论. 所以数理逻辑就是这三大基础之一. 在数理逻辑发展的过程中经过了非形式化与形式化的阶段. 数理逻辑的非形式化阶段经历了从古希腊开始直到 19 世纪初漫长的历史时期. 在这个阶段中, 数理逻辑只是哲人们进行说理或者诡辩的工具. 20 世纪初, Hilbert 提出了将数学形式化, 并且希望利用形式化的数学系统能够找到一个解决所有数学问题的机械性办法. 有人甚至还设想将数学、所有自然科学、物理的时空科学、人的自然行为以及社会行为等统统放入一个方程式之内加以解决. Hilbert 的希望后来证明是不可能实现的, 但是它却大大地促进了对形式系统的研究和数理逻辑的发展.

以上简单地介绍了数学在所有其他科学的地位, 以及数理逻辑在数学中的地位. 在逻辑发展的很长阶段中, 逻辑仅仅是研究抽象推理的学问, 在这个阶段的后期, 逻辑逐渐形式化, 也就更名为数理逻辑. 从这以后, 数理逻辑所表现的内容更为丰富了. 作为数理逻辑的一个分支, 模型论就是在这一段时间内发展起来的. 由于模型论的发展, 数理逻辑的内容就更具体化, 抽象的理论可以在很多模型中加以应用, 这样又进一步发展了数理逻辑, 丰富了数理逻辑和验证了数理逻辑的规律. 什么是模型论, Chang 和 Keisler 把模型论定义为逻辑加全能代数, 这是一种较为模糊的说法, 严格说来, 模型论是研究数学或者其他科学所提供的模型的逻辑规律和性质的科学. 模型论是建立在数理逻辑的基础之上的, 在证明紧致性定理时要用到数理逻辑中形式推演的有限性. 在某种意义上来说, 模型论又是数理逻辑的基础, 因为证明形式推演的完全性定理要用到构造模型的方法. 要彻底地弄清它们之间的关系, 就必须对数理逻辑做出一定程度的说明.

对模型论的研究有两个相反的大方向: 一个方向研究某一类模型具有什么

样的理论．另一个方向研究是否能构造出符合某些理论的模型．一个理论如果能够构造出模型，也就证明了这个理论是合理的．从 20 世纪 70 年代开始人们对各种数学模型做了大量的研究．证明了数学的很多子系统是合理的．不但这样，模型论还负担着证明数学的三大基础的合理性的任务．但是反过来模型论本身是否合理也是要用三大基础来证明的．为了证明数论的合理性要用数论、数理逻辑和集合论来证明．为了证明数理逻辑的合理性也要用数论、数理逻辑和集合论来证明．为了证明集合论的合理性还是要用数论、数理逻辑和集合论来证明．从以上三项的证明看来，都存在自己证明自己是合理的怪事．就像为了要任命三个大法官，于是组织一个委员会来遴选这三个大法官，这个委员会就由这三个大法官组成．这种自己证明自己是合理的现象也给数学的发展带来很多的困难．

模型有很多不同的叫法．有些书把它叫做结构，有些书把它叫做泛代数，又有些书把它译作全能代数．为了使研究对象具有最广泛的实用性，我们将模型定义为一种最一般的类似于代数的结构．

例如，布尔代数模型 $\mathfrak{B} = \{B, 0, 1, \prec, \succ, \cup, \cap, \bar{x}\}$, 我们把它理解为如下形式的结构：

B 是由一些元素所组成的集合；

$0, 1$ 是两个特殊的个体记号，我们把它用来指定 B 的元素．在布尔代数里是指它的最小元和最大元；

$\prec, \succ$ 是两个二元关系记号，我们把它用来指定 B 的两个二元关系．就是布尔代数里的大小关系；

$\cup, \cap$ 是两个二元函数记号，我们把它用来指定 B 的并函数和交函数；

$\bar{x}$ 是一个一元函数记号，我们把它用来指定 B 的余函数．

个体记号有些书又把它叫做常数、常量，我们在这本书里一律把它叫做个体记号，主要是强调它作为记号的特点．类似地，我们也强调关系记号和函数记号作为记号的特点，以便和模型中的元素严格地区分开来．以上的个体、关系和函数记号要满足一些公理．

一般地，一个模型的语言是可以有多个个体、关系和函数记号，它们组成集合 (C, R, F); 我们把它们用来指定模型中相应的元素、关系和函数，其中 C, R 和 F 可以是有限，无限或者超限 (超限专指不可数) 的集合．在这样的定义之下，几乎所有的数学系统和计算机科学所研究的具体模型，都在我们的研究范围之内了．而模型论就是研究这些模型的逻辑性质的．

模型论所研究的逻辑性质与逻辑的其他分支相比具有自己的特色．它着眼

于一个模型的整体的理论，并且对各种模型加以比较．从这里得到了与很多其他逻辑或者数学分支极不相同的结果．例如紧致性定理给出了存在一个含有无限大数的非标准数论模型的合理性证明．又如有理数加群与实数加群的等价性使得我们在有理数上证明的很多定理可以直接用到实数上．这些有趣的定理在没有模型论之前是不可以想象的．

本书的第十七、十八章介绍了关于集合论的一些悖论．实数的不可数性是一个非常奇怪的近乎于假象的判断．很多的逻辑学者不愿意谈及此事．我们从模型论的角度出发来介绍实数个数的悖论，目的是为了尊重大众的知情权．只有让更多的人知道问题的所在，才有可能更快更好地解决问题，其中也寄托着我们对年轻人和未来的逻辑工作者的期望．

§1.2 模型论的发展概述

模型论起源于对几何公理的研究，大约在一两千年里，人们试图证明欧氏几何中的平行公理，但是证来证去人们发现，总是用一个和它等价的命题去证明它．因此人们怀疑它是不可能被其他公理证明的．后来人们创造了非欧几何，人们利用欧氏几何来构造了一个几何模型，但它却具有非欧几何的性质，这样就证明了平行公理的独立性．这是人们第一次利用构造模型的方法来证明一个逻辑命题． A. Robinson 系统地研究了许多代数模型，并且把它们的逻辑性质写成了一本书，于是人们注意到各种各样的模型都有它们自己的逻辑规律，例如有些系统是可以判定的，有些系统就不能，有些系统是完全的，有些系统就不是，这样判定论发展起来了，完全的系统的研究也开展了 (完全性有些书又叫做完备性，其实都是从英文 completeness 翻译过来的，本书就一律使用完全性). Tarski 的工作大大地发展了模型论，他的书《初等几何和代数的判定》 [35] 第一次为初等几何的全体定理设计了一个统一的判定过程．过程大体是这样的：先将几何定理利用形式逻辑记号把它写出，由于代数闭域内所有方程式都有解使最基本的存在型正语句为真．对多个方程式和不等式的合取式，它的有解条件就可以转化为系数之间的条件，这样就消去了一个存在量词． Tarski 的量词消去法是很复杂的，在他的书中用了 30 多个定理来证明这个结果． Tarski 的定理第一次使人们能够对一个比较复杂而有用的系统中的定理证明有了机械性的解决方案，也就是说，对这个系统给出了统一的判定程序．于是计算机科学家就进一步问这个程序是否真的能够在机器上实现呢？这就是计算复杂度的研究内容．后来证明了这个程序的计算复杂度是 $\mathcal{O}(2^{2^{2^{cn}}})$, 其中 n 是输入的长度， c

是一个适当的常数. 虽然这个等级的计算复杂度几乎是不可计算的，但是却大大地促进了判定论，机器证明等逻辑分支的发展.

§1.3 模型论与计算机科学的关系

本书主要是为数学系和计算机科学系的本科生和研究生写的，计算机科学在发展的最初阶段就与逻辑结下了不解之缘，从电子计算机的元件开始，与门、或门和非门，就是从最基本的逻辑运算得到启发的，元件组合成为组件，集成电路直到大规模集成电路就是递归函数的一个应用. 由于技术的进步，计算机已能处理光、声、文字综合的由多媒体而表现出来的各种事物，网络的普及又使计算机得以组成各种各样的局域网和统一的因特网，这样计算机就有能力处理世间各色各样的事物. 因此不同的模型就成为计算机科学的研究对象，具体的模型有些是很复杂的，需要大量的人力来协作才能有条不紊地进行工作，这里和谐性 (又叫做协调性或者相容性，都是从英文 consistency 翻译过来的) 就是模型论研究的一个重要方面，而抽象的模型更是与人工智能有密切关系的研究对象. 在计算机科学发展的过程中的几次飞跃都是与人工智能所提供的模型作为先行的. 反过来人工智能所提供出的模型是否合理也是模型论研究的主要内容之一.

可以这样说：一个数学研究工作者最好能对模型论有深入的了解，一个计算机工作者更必须对模型论有深入的了解. 一个数学工作者如果不对模型论有深入的了解，在构造自己所研究的系统时会发生困难. 一个计算机工作者更是这样，他在做研究工作时往往会自己构造一些特定的系统，或者遇到别人构造的一些系统，这些系统的合理与否是需要解决的. 在研究人工智能时也会有人提出一套新的理论或者对旧的系统进行某些改善. 他们并且声称这些理论和模型会产生一代全新的性能更好的计算机. 这种新的理论和模型的合理与否也是需要解决的. 作者就在会议上遇到过很多新的理论. 例如多值逻辑的理论是否可以完善，是否能造出更好的计算机；情态逻辑是否具有合理性；软件工程的模型是否合理等. 我们计算机工作者在遇到这些理论和模型时，就要自己具有识别能力，以免被引入歧途.

在计算机的理论研究中，对一个系统的判断可以按先后顺序分为以下 6 个阶段来进行：

(1) 系统是否和谐，是否具有合理性.

(2) 系统是否具有可判定性.

(3) 系统是否具有可计算性.

(4) 系统的可计算部分是否有有效的办法来构造它的算法.

(5) 有了算法的问题是否可以落实到计算机的程序来实际进行操作.

(6) 能够上机进行计算的问题，它的内存和时间消耗量是多少，也就是所谓计算复杂度.

以上这些问题有些似乎是分属于计算机科学的很多分支而与模型论没有多大关系. 其实不是这样的，因为模型论能提供更为有效的方法来解决这些问题.

最初模型论主要是考虑数学模型，经典的模型论教程是以研究工作者为对象，因此它们的着眼点是科学研究的生长点、难点，整个教程都是以研究文献为基线，另外还要附以大量的研究问题. 现在的数学系和计算机系的本科生和研究生却是将着眼点放在构造模型的方法、技巧，模型的内部构造，合理性，各种模型的性质的比较，我们的书以数学系和计算机系的本科生和研究生为主要读者，与此同时也兼顾研究工作者，对最新的生长点和研究方向也加以注意，并且提供给读者.

§1.4 模型论研究的方法与特点

在模型论发展的最初阶段，着眼点是模型的一般性质. 例如理论的完全性，ω–范畴性等在很多模型中成立的逻辑性质. 模型论也从逻辑的角度来分析各种各样的模型，研究某些理论是否有模型，如何构造模型. 后来人们发现讨论具体的模型与各门学科有着紧密的联系. 利用模型论的理论和方法来研究各种具体的模型会带来一些意想不到的结果. 模型论所用到的方法如量词消去法、具体模型的判定方法等在计算机科学的发展中起过重大作用的，模型论的方法与技巧我们要加以掌握并且尽可能地付诸应用.

普通逻辑所研究的对象是一般的逻辑规律，它的作用范围是所有的系统. 一个普通逻辑的定理可以用到布尔代数也可用到半群. 而模型论的定理一般是随系统不同而不同的. 普通逻辑中所研究的内容主要是普通的命题逻辑和谓词逻辑，它是以后研究其他类型的逻辑以及模型论的基础.

模型论的最大特点是它的形式语言中有等号. 普通逻辑一般地不研究等号，或者是只研究关于等号的一般性质，而在模型论中为了要指定模型的元素，在大多数情况下必须使用等号.

§1.5 语法与语义

由于模型论中涉及大量的具体模型与逻辑式子. 我们既要兼顾语法学与语义学, 又要注意到它们的区别. 模型论中的语言不同于中文、英文等自然语言, 自然语言所涉及的对象包括字符、组词、语句以及语句之间联络的总体. 模型论中的语言是在严格的意义之下定义为一些符号的集合, 也就是相当于一个字母表. 在字母表确定之后, 利用这些符号, 根据确定的规则构造这个语言的式子和语句. 形成式子和语句之后, 主要的研究对象就是这些式子和语句的集合. 它们不再像自然语言那样按一定规律和顺序组成文章. 在利用语言构造语句的过程中, 完全是按照一定的规律来形式化地生成. 而语义并不介入这个生成过程. 最后得到的结果是式子集. 严格地说起来式子集就是一个由语言所生成的字符串的集合. 如果不是后来将它们赋予一定的意义, 它们本身就仅仅是一些字符串而已. 所以语法学也可以叫做句法学或者是语形学. 那么读者不禁要问为什么要这样做呢? 因为数理逻辑就是要把世间中各种各样的逻辑推理形式化. 这样就使得逻辑推理变成一个有确定规律的, 可以进行计算的有限过程, 也就是说融入了有限的方法. 所以说语法学只注意语言的形式, 构成, 记号, 长度, 排列等, 不管它们的含义.

那么语义学又是什么呢? 模型论所研究的语义学也主要是对利用形式语言所生成出来的语句在适当的模型中给予解释, 使它们得到一定的含义. 这些含义往往就是我们研究的目的. 因为我们不是为逻辑而逻辑, 将逻辑的规律应用到具体的模型中才体现出研究的效果. 不过这里还是要注意不能将一个形式化的式子和它在模型中的含义等同起来. 形式化的式子还是字符串; 它在模型中的含义是模型内部的事情, 这两者有一定的联系, 但是它们不是同一种事物. 语义学只注意语言的含义 (不管是英文、中文或者其他语言, 可以表达同样的含义) 不注意它的形式. 形式逻辑的研究工作者自古以来总是强调语法学而不重视语义学. 反之, 一般的非逻辑研究工作者却总是强调语义学而根本不理睬语法学. 我们学习模型论就要对语法学和语义学都有深刻的了解, 这样才能将其运用自如. 英语中有一个很有名的句子: “Time flies.” 这句话如果按照主谓结构来分析, 它的意思是“时间过得飞快”, 而如果按动宾结构来分析它的意思就变成“请测量苍蝇的飞行速度”. 这个例子说明了语法对语义的决定性作用.