

(经管类)

微积分

同步学习指导与解题能力训练

(第2版)

主 编 相丽驰
副主编 徐园芬 张春丽

 中南大学出版社
www.csupress.com.cn

微积分同步学习指导 与解题能力训练

(第2版)

主 编 相丽驰
副主编 徐园芬 张春丽



中南大学出版社
www.csupress.com.cn

图书在版编目(CIP)数据

微积分同步学习指导与解题能力训练/相丽驰主编.

—长沙:中南大学出版社,2008.7

ISBN 978-7-81105-796-6

I. 微... II. 相... III. 微积分 - 高等学校 - 教学参考资料
IV. 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 120317 号

微积分同步学习指导与解题能力训练
(第 2 版)

主编 相丽驰

☐责任编辑 刘 辉

☐责任印制 文桂武

☐出版发行 中南大学出版社

社址:长沙市麓山南路

邮编:410083

发行科电话:0731-88876770

传真:0731-88710482

☐印 装 长沙市华中印刷厂

☐开 本 787×1092 1/16 ☐印张 15.75 ☐字数 386 千字

☐版 次 2011 年 8 月第 2 版 ☐2011 年 8 月第 1 次印刷

☐书 号 ISBN 978-7-81105-796-6

☐定 价 32.00 元

图书出现印装问题,请与经销商调换

前 言

微积分是经管类各专业必修的基础课。它不仅是后续学习专业基础课和专业课的必备基础,也是硕士研究生入学考试的必考科目,同时它是培养学生数学思想、数学素养的重要载体。为了帮助同学们更加深刻地理解《微积分》的思想、方法,更加牢固地掌握《微积分》的知识、概念,更加灵活地运用《微积分》知识解决相关问题,我们编写了这本《微积分(经管类)同步学习指导与解题能力训练》。相信本书的使用将弥补课堂教学的不足,并使学生基础扎实,能力提高。

本书在编写中,参考了吴赣昌老师主编的《微积分》,华中科技大学高等数学课题组编写的《微积分》等大量书籍,从中汲取了许多优点。同时编写时也充分注意到,目前许多同类参考书中还存在的针对性不够强,选择题、填空题、应用题偏少等不足。因此,本书注意突出了以下特点:①列举大量选择题、填空题;②列举大量的经济应用题;③选题难易适度。既有基本题目,又有考研题目;④通过学习指导,加强学生对知识的理解和升华。

本书在编写中,徐园芬、张春丽、田增峰、宋新霞、李炎华等老师都投入了大量的精力。由于他们对题目的精心组织、反复推敲,因而才有了这本具有特色的参考书,同时本书也得到了中南大学出版社的大力支持,在此向他们表示感谢。

限于编者的水平,书中错漏不当之处,诚恳同行和读者给予批评指正,编者将不断改进和完善,并深表谢意。

编 者

目 录

第一部分 同步学习指导与解题能力训练

第1章 函数 极限与连续	(3)
知识学习指导	(3)
典型例题	(7)
解题能力训练	(10)
自测习题与解答	(19)
第2章 导数与微分	(22)
知识学习指导	(22)
典型例题	(25)
解题能力训练	(27)
自测习题与解答	(33)
第3章 中值定理与导数应用	(37)
知识学习指导	(37)
典型例题	(39)
解题能力训练	(47)
自测习题与解答	(53)
第4章 不定积分	(57)
知识学习指导	(57)
典型例题	(60)
解题能力训练	(63)
自测习题与解答	(69)
第5章 定积分及其应用	(75)
知识学习指导	(75)
典型例题	(79)
解题能力训练	(83)
自测习题与解答	(90)

第6章 多元函数微分学及其应用	(94)
知识学习指导	(94)
典型例题	(98)
解题能力训练	(103)
自测习题与解答	(111)
第7章 重积分	(116)
知识学习指导	(116)
典型例题	(119)
解题能力训练	(122)
自测习题与解答	(129)
第8章 常微分方程	(134)
知识学习指导	(134)
典型例题	(137)
解题能力训练	(140)
自测习题与解答	(145)

第二部分 考研真题与模拟试卷

考研真题	(151)
考研真题一	(151)
考研真题二	(152)
考研真题三	(153)
考研真题四	(155)
考研真题五	(156)
考研真题六	(158)
考研真题七	(161)
模拟试卷	(163)
模拟试卷一	(163)
模拟试卷二	(164)
模拟试卷三	(166)
模拟试卷四	(168)
模拟试卷五	(169)

第三部分 习题答案

解题能力训练习题答案	(175)
考研真题答案	(227)
模拟试卷答案	(230)

第一部分

同步学习指导与解题能力训练

第1章 函数 极限与连续

知识学习指导

一、基本要求

- 要理解函数概念的实质. 熟练掌握基本初等函数的图形及性质. 理解函数的单调、有界、周期和奇偶等特性的含义.

- 了解反函数、复合函数和隐函数的概念. 会求简单函数的复合, 会把复杂函数分解成几个简单函数, 会画一些简单的分段函数的图像.

- 会建立简单实际问题中的函数关系, 掌握常用的经济学函数.

- 关于极限概念, 着重理解数列极限、函数极限的含义, 对于极限的 $\varepsilon - N$, $\varepsilon - \delta$ 等方法的运用不作过高要求, 知道极限的惟一性及有界性定理, 知道极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 与左右极限的关系.

- 掌握极限的四则运算法则及两个重要极限, 能运用它们求一些简单的极限, 会求分段函数在分段点的极限.

- 知道判别极限存在的两个准则(单调有界准则及夹挤准则), 知道极限的保号性.

- 了解无穷小、无穷大的概念及其相互关系, 知道无穷小的性质, 会对无穷小进行比较, 会用等价代换法求极限.

- 理解函数在一点连续的概念、了解间断点的概念, 会判断间断点的类型, 会判断分段函数在分段点的连续性.

- 知道初等函数的连续性, 知道闭区间上连续函数的性质(最值定理、介值定理等), 会用介值定理证明简单方程的根的存在性.

二、内容提要

1. 函数的概念

函数 设 x 和 y 是两个变量, D 是一个给定的非空数集. 如果对于每个数 $x \in D$, 变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应, 则称 y 是 x 的函数, 记作

$$y = f(x) \quad x \in D$$

其中, x 称为自变量, y 称为因变量, 数集 D 称为这个函数的定义域. 当 x 遍取 D 的所有数值时, 对应的函数值 $f(x)$ 的集合称为函数的值域.

2. 数列极限

• 概念

单调列 称 $\{x_n\}$ 为单调增, 若 $x_n \leq x_{n+1} (n \in N)$;

称 $\{x_n\}$ 为单调减, 若 $x_n \geq x_{n+1} (n \in \mathbb{N})$.

将以上定义中不等号换作严格不等号即得严格单调数列定义.

有界列 存在 $M > 0$, 使 $|x_n| \leq M (n \in \mathbb{N})$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ 若对任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N , 当 $n > N$ 时 $|x_n - A| < \varepsilon$.

• 性质

惟一性与有界性 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 则极限惟一确定且 $\{x_n\}$ 有界.

收敛判别准则 (1) 单调有界准则: 单调有界数列是收敛数列. (2) 夹挤准则: 若 $a_n \leq x_n \leq b_n (n \in \mathbb{N})$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$.

• 计算

四则运算法则 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = A + B, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = AB, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n / y_n = A/B (B \neq 0).$$

常用极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a > 0), \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0 (|a| < 1)$.

3. 函数的极限

• 概念

函数 $f(x)$ 趋于常数 A 依 x 变化方式不同而分为以下 6 种.

$$\begin{array}{lll} (1) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A & (2) \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A & (3) \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \\ (4) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A & (5) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A & (6) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \end{array}$$

• 性质

保号性 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使

$$f(x) > 0, x \in N^0(x, \delta).$$

注: 这是以 (1) 为例写的, 其余几种可类比写出, 下同.

左右极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$.

夹挤准则 若 $a(x) \leq f(x) \leq b(x) (x \in N^0(x_0))$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} a(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} b(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

• 计算

四则运算法则 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 则

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) &= A \pm B, \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) g(x) = AB, \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) / g(x) &= A/B (B \neq 0). \end{aligned}$$

变量代换 若 $x \rightarrow x_0$ 时 $\varphi(x) \rightarrow l (l \text{ 为有限或无穷})$, 则令 $y = \varphi(x)$, 便有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(\varphi(x)) = \lim_{y \rightarrow l} f(y).$$

重要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e.$$

4. 无穷小量与无穷大量

• 概念

无穷小量 以零为极限的函数变量或数列;

无穷大量 趋向无穷的函数变量或数列.

$\alpha = o(\beta)$ 若 $\frac{\alpha}{\beta} \rightarrow 0$, 称 α 是 β 高阶无穷小;

若 $\frac{\alpha}{\beta} \rightarrow l \neq 0$, 称 α 较 β 同阶无穷小;

$\alpha \sim \beta$ 若 $\frac{\alpha}{\beta} \rightarrow 1$, 称 α 较 β 等阶无穷小.

(其中, α, β 均为同一过程的无穷小量.)

• 性质

运算规则 $\alpha \pm \beta \rightarrow 0, \alpha \cdot \beta \rightarrow 0, \alpha \cdot B \rightarrow 0$.

(其中, α, β 为无穷小量, B 为有界量)

等价代换法则 若 $\alpha \sim \beta$, 则当等式一端极限存在时

$$\lim \alpha \gamma = \lim \beta \gamma, \lim \frac{\gamma}{\alpha} = \lim \frac{\gamma}{\beta}.$$

5. 连续函数

• 概念

在一点连续 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 连续;

在 (a, b) 上连续 若 $f(x)$ 在每个 $x_0 \in (a, b)$ 处连续;

在 $[a, b]$ 上连续 若 $f(x)$ 在 (a, b) 上连续, 且在 a 点右连续, b 点左连续.

间断点 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ 不成立, 则 x_0 见表 1-1-1:

表 1-1-1

第一类间断点:	$f(x_0^+)$ 与 $f(x_0^-)$ 都存在	$f(x_0^+) = f(x_0^-) \neq f(x_0)$ (可去)
		$f(x_0^+) \neq f(x_0^-)$ (跳跃)
第二类间断点:	$f(x_0^+)$ 与 $f(x_0^-)$ 至少有一个不存在	

• 性质

最值定理 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是有界函数, 能达到最大值 $\max f(x)$ 及最小值 $\min f(x)$.

介值定理 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则对 $f(a)$ 与 $f(b)$ 间任何实数 A 均有 $x_0 \in (a, b)$ 使 $f(x_0) = A$.

零点存在定理 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 若 $f(a)f(b) < 0$, 则存在 $x_0 \in (a, b)$ 使 $f(x_0) = 0$.

初等函数的连续性 初等函数在其定义区间内处处连续.

三、学习指导

• 本章函数部分的一些内容, 读者在中学阶段可能已经十分熟悉, 如: 基本初等函数, 求定义域、值域等. 学习中只要留心与过去所学是否一致, 以及注意新增内容即可, 如: 有界

性等,以便加快学习进度.

- 分段函数、复合函数是新接触的函数形式. 要熟悉分段函数的基本特征, 注意赋值时应用相应的解析式, 以及分段点的函数值, 复合函数注意从外向内分解成简单函数.

- 从实际问题中寻求变量的相互依从关系, 从而建立函数关系是非常重要的环节, 对经济学函数的建立, 切勿认为麻烦而一跳而过, 要认真完成习题, 这对于后面学习微积分在经济方面的应用非常重要.

- 本章介绍的极限理论十分重要, 后面将要学习的导数、积分、级数等均是用极限描述的, 极限运算是一种基本的计算工具, 须熟练掌握, 连续函数作为利用极限描述 ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow f(x)$ 在 x_0 连续) 的一类特殊函数, 其应用亦十分广泛, 这从它所满足的最值定理, 介值定理, 零点存在定理, 以及初等函数均在定义区间上连续的性质上可以看出.

- 可将数列极限与函数极限的定义、性质、运算法则对比, 会找到较多的共性, 对不同之处进行比较亦可加深印象. 比如极限的惟一性, 四则运算法则, 夹挤准则是完全一致的, 而有界性则略有不同, 数列 $\{x_n\}$ 收敛时可以说它是有界数列, 因为 N 之前的 x_n 是有限个, 从中能找出最大最小者. 但函数 $f(x)$ 收敛时不能说它在定义域上有界, 如 $f(x) = \frac{x}{x+1}$, 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, 可以说 $f(x)$ 在某个区间 $[X, +\infty)$ 上有界, 但不能说 $f(x)$ 在定义域 $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ 上有界, 因 $x \rightarrow -1$ 时, $f(x) \rightarrow \infty$.

- 计算极限的方法较多, 后面介绍的洛必达法则将是一个十分有效的工具. 目前, 初学者主要是应用四则运算规则, 等价代换法则以及初等变形、变量代换来进行计算. 计算时可以从以下几点来考虑:

▲ 若 a 是 $f(x)$ 的连续点 (如初等函数的定义点), 则 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, 例如

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x^2} = e^{\sin \pi} / \pi^2 = 1 / \pi^2, \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin x}{x} = \frac{2}{\pi}.$$

▲ 若 a 是基本初等函数的定义区间的端点, 在端点处函数无定义, 则可根据基本初等函数的特性来求极限, 如

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x &= -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0; \\ \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \tan x &= +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty. \end{aligned}$$

▲ 利用两个重要极限.

▲ 利用夹挤准则.

▲ 利用等价代换.

▲ 利用变量代换.

▲ 利用初等变形 (如 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$).

(又如 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - n}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - 1/n}{1 + 1/n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2 - 1/n) / \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n^2) = 2$.)

- 对于分段函数, 常常讨论它在分段点 x_0 的极限与连续问题 (后面还要讨论可导性问题). 这时要注意首先计算单侧极限. 仅当 $f(x_0^+) = f(x_0^-)$ 时, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 才存在, 而当 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) =$

$f(x_0)$ 时, 函数 $f(x)$ 在 x_0 为连续. 另外, 有些分段函数 $f(x)$, 在 x_0 两侧的表达式完全一样, 但两侧的左右极限不相同, 因而也须分段考虑, 例如

$$f(x) = \begin{cases} 2^{\frac{1}{x}} + 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在分段点 $x=0$, $f(0^+) = 1$, $f(0^-) = -1$, 所以, $x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点.

典型例题

例 1 设 $f(x) = e^{x^2}$, $f[\varphi(x)] = 1 - x$, 且 $\varphi(x) \geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

解 由 $f[\varphi(x)] = e^{\varphi^2(x)} = 1 - x$, 有 $\varphi^2(x) = \ln(1 - x)$, 又 $\varphi(x) \geq 0$, 所以 $\varphi(x) = \sqrt{\ln(1 - x)}$

令 $\ln(1 - x) \geq 0$ 得 $1 - x \geq 1$, $x \leq 0$ 即为 $\varphi(x)$ 的定义域

例 2 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3}\sqrt{n} - \sqrt{n-\sqrt{n}})$

解 原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3\sqrt{n} - (n-\sqrt{n})}{\sqrt{n+3}\sqrt{n} + \sqrt{n-\sqrt{n}}}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{n}}} + \sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}} = 2.$$

例 3 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\sqrt{x+2} + \sqrt{2}) \sin x \cos x}{x+2-2}$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x} \cdot \cos x \cdot (\sqrt{x+2} + \sqrt{2}) \right] = 4\sqrt{2}.$$

或者利用 $\sin 2x \sim 2x$, $x \rightarrow 0$.

原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})}{x} = 4\sqrt{2}.$

例 4 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{x \ln x}$.

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x \ln x} - 1}{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{x \ln x} = 1$ (注意到 $e^x - 1 \sim x$)

例 5 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - \cos x}{\sin^2 \frac{x}{2}}$

解法一 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \sin x - \cos^2 x}{\sin^2 \frac{x}{2} (\sqrt{1+x \sin x} + \cos x)}$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (\sin x + x)}{\sin^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{x}{2} (\sin x + x)}{\sin \frac{x}{2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{x}{2} \cdot \left[2 \cos \frac{x}{2} + \frac{x}{\sin \frac{x}{2}} \right] = 4
 \end{aligned}$$

解法二 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x} - \cos x}{\frac{x^2}{4}}$

$$\begin{aligned}
 &= 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (\sin x + x)}{x^2 (\sqrt{1+x\sin x} + \cos x)} \\
 &= 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x + \sin x)}{x^2} \cdot \frac{1}{2} \\
 &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right) = 4.
 \end{aligned}$$

(其中用到了 $\sin^2 \frac{x}{2} \sim \frac{x^2}{4}$, $\sin x \sim x$, $x \rightarrow 0$)

由以上两例可以看出,在求极限运算中,将等价无穷小代换与其他求极限方法联合使用,可以大大简化计算过程.

例 6 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+k}{x-k} \right)^x = 9$, 求 k 值.

解 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+k}{x-k} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{k}{x} \right)^x}{\left(1 - \frac{k}{x} \right)^x} = \frac{e^k}{e^{-k}} = e^{2k} = 9$

所以 $k = \ln 3$.

例 7 设 $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^3 + x^2}$, 指出 $f(x)$ 的间断点, 并判断其类型.

解 由于 $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2(1+x)}$, 显然 $f(x)$ 在 $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ 处无定义, 所以 $f(x)$ 的间断点为 $x_1 = 0$, $x_2 = -1$.

又由于 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2(1+x)} = \frac{1}{2}$

所以 $x_1 = 0$ 是第一类可去间断点.

又 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - \cos x}{x^2(1+x)} = \infty$, 所以 $x_2 = -1$ 是第二类间断点.

例 8 试讨论函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$ 的连续性.

解 当 $|x| < 1$ 时, $f(x) = 1 + x$,

当 $x = 1$ 时, $f(x) = 1$,

当 $|x| > 1$ 时, $f(x) = 0$,

当 $x = -1$ 时, $f(x) = 0$.

即

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ 0, & x > 1 \text{ 或 } x \leq -1 \end{cases}$$

易知 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ 内连续.

在 $x = -1$ 处, 有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} (1+x) = 0 \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处连续.

在 $x = 1$ 处, 有

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1+x) = 2$$

所以 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处不连续.

综上有 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1] \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ 内连续, $f(x)$ 在 $x = 1$ 处间断.

例 9 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} \sin x, & x < 0 \\ k, & x = 0 \\ x \sin \frac{1}{x} + 2, & x > 0 \end{cases}$, 试确定常数 k 的值, 使 $f(x)$ 在定义域内连续.

解 $f(x) = \frac{2}{x} \sin x$ 在 $(-\infty, 0)$ 内为初等函数, 在其定义域 $(-\infty, 0)$ 内连续.

$f(x) = x \sin \frac{1}{x} + 2$ 在 $(0, +\infty)$ 内为初等函数, 在定义区间内连续.

由于在 $x = 0$ 处

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{x} \sin x = 2 \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \sin \frac{1}{x} + 2 \right) = 0 + 2 = 2 \end{aligned}$$

所以要使 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 必须要求

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 2$$

即当 $k = 2$ 时, $f(x)$ 在其定义域内连续.

例 10 证明方程 $x^3 - 3x - 1 = 0$ 至少有一个根在 1 与 2 之间.

证明 令 $f(x) = x^3 - 3x - 1$, 因为

$$f(1) = 1 - 3 - 1 = -3, \quad f(2) = 8 - 6 - 1 = 1,$$

即 $f(1)$ 与 $f(2)$ 异号, 又 $f(x)$ 为初等函数, 在其定义区间 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 故在 $[1, 2]$ 上连续, 由零点定理知, $f(x) = 0$ 必定至少有一个根在 1 与 2 之间.

解题能力训练

一、填空题

1. 设 $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \frac{1}{x^2}$, 则 $f(x) =$ _____.
2. 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) =$ _____.
3. 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2} \sin x}{x + 1} =$ _____.
4. 设 $x \rightarrow \infty$ 时, $f(x)$ 与 $\frac{1}{x}$ 是等价无穷小, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} 2xf(x) =$ _____.
5. 设 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 则 $f(x-1) =$ _____.
6. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + x + 1}{2x^2 + x - 5} = 3$, 则 $a =$ _____.
7. 设 $f(x) = \begin{cases} (x-1)\sin \frac{1}{x-1}, & x > 1 \\ a + x^2, & x < 1 \end{cases}$, 已知 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 存在, 则 $a =$ _____.
8. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1} =$ _____.
9. 函数 $y = \sqrt{x-2} + \frac{1}{x-3} + \ln(5-x)$ 的定义域为 _____.
10. 极限 $\lim_{x \rightarrow \pi} (x - \pi) \cos \frac{1}{x - \pi} =$ _____.
11. 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt{1+ax^2} - 1$ 与 x^2 是等价无穷小, 则 $a =$ _____.
12. 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+k}{x-2k} \right)^x = 8$, 则常数 $k =$ _____.
13. 函数 $y = \frac{\sqrt{\ln(x-1)}}{x(x-3)}$ 的定义域为 _____.
14. 若 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + kx - 2}{x - 1}$ 为有限值, 则 $k =$ _____.
15. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x^2+1} (2 + 3\arctan x) =$ _____.
16. 若 $\alpha =$ _____, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, 有 $\sin(x^2) \sim x^\alpha$.
17. 设 $f(x) = e^{\sin x}$, 则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\pi + \Delta x) - f(\pi)}{\Delta x} =$ _____.
18. 设 $y = f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 则 $f(2x-3)$ 的定义域为 _____.
19. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2+1)(n^2-1)}{n^4 + 2n^2 + 3} =$ _____.