时滞微分方程的分支理论及应用

魏俊杰　王洪滨　蒋卫华　编著

科学出版社

内 容 简 介

本书简要介绍时滞微分方程的基本理论并重点阐述分支问题研究的主要方法. 在基本理论中，介绍了包括初值问题解的存在唯一性、整体解的存在性、线性自治系统谱分解理论和线性稳定性理论、半动力系统和稳定性理论等，围绕分支问题的研究，主要介绍了指数多项式的零点分布的分析方法、建立在中心流形上的局部 Hopf 分支理论、以等变拓扑度理论为基础的全局 Hopf 分支理论、高余维分支的分析方法等. 本书将若干典型实例与最新研究成果相结合介绍了上述理论的具体运用，读者可以从中学会和把握非线性动力学研究的基本方法.

本书可供从事微分方程与动力系统研究的学者和科研工作者使用，也可作为研究生的教材和参考书.

图书在版编目(CIP)数据

时滞微分方程的分支理论及应用/魏俊杰，王洪滨，蒋卫华编著.
—北京：科学出版社，2012

ISBN 978-7-03-034670-4

Ⅰ ①时… Ⅱ. ①魏… ②王… ③蒋… Ⅲ ①时滞系统-微分方程-研究 Ⅳ ①O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012) 第 120322 号

责任编辑：张中兴 / 责任校对：刘小梅
责任印制. 闫 磊 / 封面设计 迷底书装

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码 100717
http //www.sciencep com
骏 杰 印 刷 厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2012 年 6 月第 一 版 开本 720×1000 1/16
2012 年 6 月第一次印刷 印张 14 1/4
字数 275 000

定价：45.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

时滞微分方程是具有时间滞后的微分方程, 它用于描述既依赖于当前状态也依赖于过去状态的发展系统, 其特点是充分考虑到系统的历史对现状的影响, 因而在许多领域都有重要的应用[1].

时滞微分方程的一般形式是泛函微分方程, 其研究已有 200 余年的历史, 早期的研究起源于人们在几何和数论的研究中提出的问题[2,3]. 在 1750 年, Euler 曾提出了一个古典的几何学问题: 是否存在一种曲线, 在经过平移和旋转运动以后能与其渐缩线重合? 1771 年, Condorcet 讨论了这个问题, 并导出了历史上第一个泛函微分方程. 此后, 许多类似的方程被学者们相继提出, 但是对其系统的研究工作直到 20 世纪 50 年代才真正出现. 到 20 世纪 70 年代, 时滞微分方程理论的研究得到长足发展, 在解的基本理论、稳定性理论、周期解理论、解算子理论等许多方面都取得了重要的成果[3~13]. 其中 J. K. Hale 在 1977 年出版的专著 *Theory of Functional Differential Equations* 是对有界时滞泛函微分方程研究的很好总结.

分支问题是动力系统和非线性微分方程研究中的一个重要问题, 其研究对象是结构不稳定的系统. 所谓分支现象是指: 依赖于参数的系统当参数变化并经过某些临界值时系统的某些属性 (如平衡状态、周期现象、稳定性等) 发生的突然变化. 分支现象广泛存在于自然界中, 其研究可以追溯到 18 世纪以来对天体力学、弹性力学、流体力学和非线性振动的一些失稳现象的探讨, 直到 20 世纪 70 年代, 由于动力系统、非线性分析和非线性微分方程等方面研究的推动, 以及强有力的数值计算手段的协助, 开始形成分支研究的数学理论和方法, 并得到广泛的应用. 在此领域中, 国内外出版了许多较全面论述这一领域主要是针对常微分方程的研究成果的专著[14−27]. 关于时滞 (泛函) 微分方程的分支问题, 人们从 20 世纪 50 年代就注意到了, 比如, Wright 研究了刻画单种群增长的模型 —— 时滞 Logistic 方程中的时滞对解的稳定性的影响[4], 我国常微分方程领域的前辈秦元勋先生也研究了微分方程解的稳定性与时滞的关系[5]. 关于时滞微分方程分支理论的系统研究开始于 20 世纪 70 年代, 尽管已有 40 年的历史, 但是在国内目前还没有看到有关于这方面工作的专著出版, 即使在国际上, 也没有像介绍泛函微分方程理论的参考文献[6,7] 那样有影响力的专著. 关于时滞微分方程的分支问题至今仍然是一个热点研究课题, 其原因主要是很多分支现象还没有被充分认识清楚, 比如, 如何能更好地刻画出时滞微分方程的同宿轨和异宿轨分支; 另外,

随着反映实际过程的新的时滞微分方程模型不断地被构建出来, 从分支角度研究这些模型, 不仅可以帮助人们更清楚地理解其描述的实际过程, 同时也能为时滞微分方程的理论完善提出一些新方法、增添一些新内容. 基于上述想法, 我们将近年来的相关研究工作和教学中的一些体会汇集起来, 写成了本书, 相信对微分方程领域的研究生和关注时滞微分方程的分支理论及应用的研究人员会有所帮助.

本书共 7 章. 第 1 章简要介绍了时滞微分方程的基本理论, 包括初值问题解的存在唯一性、线性自治系统谱分解理论和线性稳定性理论等. 在考虑分支出现的参数条件时, 关键的一点是分析清楚方程奇点所对应特征方程的根的分布, 而与时滞微分方程相对应的特征方程通常是一种超越方程, 亦称指数多项式方程, 所以, 第 2 章主要介绍指数多项式的零点分布的分析方法, 详细介绍了两种关于超越方程的根的分布分析方法. 在分支问题的研究中, Hopf 分支是一种常见而且重要的分支现象, 作为动力系统理论的重要组成部分, Hopf 分支理论为研究微分方程周期解的存在性提供了一种有效的方法, 第 3 章介绍了局部 Hopf 分支理论, 给出了 Hopf 分支的一般性定理和用于确定 Hopf 分支方向和分支周期解稳定性的几个量的推导方法. 在局部 Hopf 分支存在的基础上, 进一步, 需要考虑经 Hopf 分支出现的周期解的大范围存在性问题, 也称全局 Hopf 分支问题, 第 4 章主要介绍了吴建宏等用等变拓扑度理论建立的泛函微分方程的全局 Hopf 分支理论, 并将其应用于带有时滞的 Nicholson 果蝇方程和具有多时滞的造血干细胞模型, 细致分析了其周期解的局部和全局存在性及稳定性问题. 进一步, 当系统的变化趋势还依赖于过去状态对时间的导数时, 得到的方程通常为中立型微分方程, 最典型的中立型方程来源于无损传输线路模型, 采用扩展时滞反馈控制的模型通常也可以通过转化为相应的中立型方程来研究, 第 5 章主要介绍了中立型微分方程的局部 Hopf 分支理论, 并通过中立型神经网络模型展示了全局 Hopf 分支分析方法. 接下来, 我们注意到, 方程中的时滞因素常常会导致高余维分支的发生, 而高余维分支往往又带来了系统动力学性质的复杂性, 比如, 会伴有同宿、异宿轨分支等半局部分支发生和出现拟周期解、混沌等现象, 第 6 章介绍了时滞微分方程高余维分支的分析方法, 其中既有 Takens-Bogdanov 分支, 也有 Zero-Hopf 分支等. 最后, 为了方便读者学习, 第 7 章扼要介绍了泛函微分方程半动力系统和稳定性理论、微分方程的中心流形定理、复合阵及高维常微分方程的 Poincre-Bendixson 定理, 这些知识在前几个章节有涉及.

本书的第 2 章、第 4 章和第 7 章主要由魏俊杰执笔, 其他章节由王洪滨和蒋卫华共同完成.

在此, 感谢哈尔滨工业大学 (以下简称我校) 数学系给予的支持; 感谢国家自然科学基金委员会多年来对我们的研究工作所给予的资助; 感谢加拿大 Alberta 大学的李

毅教授、美国 Miami 大学的阮世贵教授, 以及毕业于我校数学系的王春程博士、曲颖博士和万阿英博士, 书中的一些内容是我们共同合作的结果; 也要感谢我校数学系在读博士生牛犇、李艳秋、袁锐、王勇、郭宇潇和王楠等同学, 他们为本书的校正工作提供了帮助.

由于我们水平有限, 书中错误和不足之处在所难免, 诚恳希望读者不吝赐教.

作 者

2012 年 1 月于哈尔滨

目　　录

第 1 章　时滞微分方程的基本理论

常微分方程反映了事物发展的趋向仅由当前的状态决定, 而不是明显地依赖于它的过去和未来. 但是, 早在 18 世纪末就已发现, 有许多现象并非如此, 它们的发展趋向不仅依赖于当前的状态, 而且还取决于它的过去或未来的某一段时间中的状态. 描述这类现象的微分方程已不是通常意义的常微分方程, 它不仅含有自变量 t, 而且还含有有限个 (甚至无限个) 形如 $t-r(t)$ 的带滞后的变元, 其中 $r(t)$ 称为偏差. 由于 $t-r(t)$ 并不是新的独立变量, 所以这类方程也不是偏微分方程, 我们通常称之为滞后型偏差变元的微分方程, 下面看几个源于实际背景的这类方程的实例.

1838 年, Verhulst 在研究单种群增长规律的过程中, 考虑到资源有限及种群内部的竞争等因素[28], 构造了 "logistic 模型"

$$N'(t)=rN(t)\left(1-\frac{N(t)}{K}\right),$$

其中 r 是内秉增长率, K 是所考虑的地域对该种群的最大容纳量. 容易证明: 只要初值 $N_0>0$, 则满足 $N(t_0)=N_0$ 的解就有 $\lim\limits_{t\to\infty}N(t)=K$. 上述 Logistic 模型考虑的是在 t 时刻种群的增长速度仅依赖于 t 时刻种群的数量, 但实际上, 种群 (生物) 的再生繁衍有个时间过程, 也就是种群在 t 时刻的变化速度不仅依赖于 t 时刻的种群数量, 而且还与过去种群的数量有关. 基于这些考虑, 1948 年 Hutchinson 首次构造出大家熟知的具时滞的 Logistic 模型[29]

$$N'(t)=rN(t)\left(1-\frac{N(t-\tau)}{K}\right).$$

该模型更好地解释了人们所观察到的种群的数量往往是振动的这一现象.

具时滞的 Nicholson's 果蝇模型

$$N'(t)=aN(t-r)\times ce^{-N(t-r)/N_0}-\delta N(t).$$

果蝇的繁殖过程是产卵, 卵孵化出幼体, 并最终成为成熟果蝇. 该模型假设卵经时间 r 成为成熟果蝇, 成熟果蝇按常数率供给食物, N_0 反映的是承载量. 方程右端第一项反映了新的成熟个体的补充, $aN(t-r)$ 为产卵项, $ce^{-N(t-r)/N_0}$ 为从卵直到成熟个体这一过程的幸存概率, 因为不成熟果蝇之间内部竞争食物的原因, 幸存概率随着虫口的增加而减少, 右端第二项反映了死亡率. 上述方程正是根据果蝇波动的实验数据建立起来的, 能很好地描述果蝇繁殖增长的发展变化[13].

另一个典型的例子是船舶的稳定性控制问题. 考虑船舶受到风浪影响而摇摆的运动, 设 $\theta(t)$ 表示在时刻 t 时船体与法向垂直位置的倾斜角, 则 $\theta(t)$ 满足运动方程

$$m\theta''(t) + c\theta'(t) + k\theta(t) = f(t).$$

为了消除摇摆, 可设法增加阻尼 c, 在早期的一些船舶中, 于船舶两侧的舱中装有水, 由泵把水从一个舱输入另一个舱中, 这样使得在方程中增加了阻尼项 $q\theta'(t)$.

但由于控制系统的伺服机构不能立刻做出响应, 而控制项正比于时刻 $t-r$ 的速度, $r>0$ 是滞后量, 于是方程变成

$$m\theta''(t) + c\theta'(t) + q\theta'(t-r) + k\theta(t) = f(t),$$

这是一个二阶的带滞后变元的微分方程.

在处理带滞后变元的微分方程时, Н.Н.Красовский 在 1959 年提出了把微分方程右端函数定义在某一函数空间中, 作为轨线段的泛函来考虑的想法, 并自此称这类方程为泛函微分方程, 这使得该类方程的研究有了本质性的进展. 有关泛函微分方程的一些基本概念的进一步精确化是由 Hale 给出的[6], 下面予以介绍.

1.1　基 本 概 念

假设 $r \geqslant 0$ 是已知实数, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $\mathbb{R}^n$ 是实 n 维线性向量空间, 并有范数 $|\cdot|$. 考虑从区间 $[a,b]$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的一切连续映射所构成的空间 $C([a,b],\mathbb{R}^n)$, 并在其中定义模为

$$\| \varphi \|_{[a,b]} = \sup_{a\leqslant\theta\leqslant b} |\varphi(\theta)|, \quad \varphi \in C([a,b],\mathbb{R}^n),$$

那么 $C([a,b],\mathbb{R}^n)$ 是一个 Banach 空间. 特别地, 记 $C := C([-r,0],\mathbb{R}^n)$, 当 $\phi \in C$ 时, 其模 $\| \phi \|_{[-r,0]}$ 简记为 $\| \phi \|$.

若 $\sigma \in \mathbb{R}$(σ 表示初始时刻), $A \geqslant 0$ 且 $x \in C([\sigma - r, \sigma + A), \mathbb{R}^n)$, 则对任意 $t \in [\sigma, \sigma + A)$, 定义 $x_t \in C$ 为

$$x_t(\theta) = x(t+\theta), \qquad -r \leqslant \theta \leqslant 0.$$

若 $D \subseteq \mathbb{R} \times C$, $f : D \to \mathbb{R}^n$ 是给定的泛函, "$\cdot$" 表示右导数, 则称关系式

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) \tag{1.1.1}$$

是集合 D 上的滞后型泛函微分方程, 或称为时滞微分方程.

下面几种方程都是时滞微分方程:

(1) 常微分方程 $\dot{x}(t) = F(x(t))$.

(2) 微分差分方程 $\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau_1(t)), \cdots, x(t-\tau_p(t))), 0 \leqslant \tau_j(t) \leqslant r, j = 1, 2, \cdots, p$.

(3) 积分微分方程 $\dot{x}(t) = \int_{-r}^{0} g(t, \theta, x(t+\theta))\mathrm{d}\theta$.

(4) $\dot{x}(t) = -\max\limits_{t-r\leqslant s\leqslant t} x(s)$.

定义 1.1.1 若存在 $\sigma \in \mathbb{R}$, $A > 0$ 和 $x \in C([\sigma - r, \sigma + A), \mathbb{R}^n)$, 使得：当 $t \in [\sigma, \sigma + A)$ 时, $(t, x_t) \in D$ 且满足方程 (1.1.1), 则称函数 $x(t)$ 是方程 (1.1.1) 在 $[\sigma - r, \sigma + A)$ 上的一个解.

定义 1.1.2 对于给定的 $\sigma \in \mathbb{R}, \varphi \in C$, 若 $\exists A > 0$, 使得 $x(t)$ 是方程 (1.1.1) 在 $[\sigma - r, \sigma + A)$ 上的一个解且满足条件 $x_\sigma = \phi$, 则称 $x(t)$ 是方程 (1.1.1) 在 σ 处具有初值 ϕ 的一个解, 或简称为方程 (1.1.1) 过点 (σ, ϕ) 的一个解, 且记之为 $x(\sigma, \phi, f)(t)$.

因此, 方程 (1.1.1) 的初值问题可以写成

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t), \\ x_\sigma = \phi. \end{cases} \tag{1.1.2}$$

引理 1.1.1 若 $x \in C([\sigma - r, \sigma + \alpha], \mathbb{R}^n)$, 则 x_t 是关于 t 在 $[\sigma, \sigma + \alpha]$ 上的连续函数.

证明 因 $x(t)$ 在 $[\sigma - r, \sigma + \alpha]$ 上连续, 从而在其上一致连续, 故对任给的 $\varepsilon > 0$, 必存在 $\delta > 0$, 使当 $\forall t, \tau \in [\sigma - r, \sigma + \alpha]$, 只要 $|t - \tau| < \delta$, 就有

$$|x(t) - x(\tau)| < \varepsilon.$$

于是, 对 $\forall t, \tau \in [\sigma, \sigma + \alpha]$, 只要 $|t - \tau| < \delta$, 就有 $|x(t+\theta) - x(\tau+\theta)| < \varepsilon$ 对一切 $\theta \in [-r, 0]$ 成立. 所以,

$$\| x_t - x_\tau \| = \sup_{-r\leqslant\theta\leqslant 0} |x(t+\theta) - x(\tau+\theta)| < \varepsilon.$$

所以, x_t 关于 t 在 $[\sigma, \sigma + \alpha]$ 上连续, 引理得证.

应用引理 1.1.1 不难得到下面的结论.

引理 1.1.2 若给定 $\sigma \in \mathbb{R}, \varphi \in C$, $f(t, \varphi)$ 在 D 上连续. 那么初值问题 (1.1.2) 等价于求解泛函积分方程.

$$\begin{cases} x(t) = \phi(0) + \displaystyle\int_{\sigma}^{t} f(s, x_s)\mathrm{d}s, \quad t \geqslant \sigma, \\ x_\sigma = \phi. \end{cases} \tag{1.1.3}$$

1.2 解的存在性理论

本节考虑初值问题 (1.1.2) 的解的存在唯一性和整体解的存在性等问题. 本节内容主要参考文献 [6, 13].

定义 1.2.1　设 $f:\mathbb{R}\times C\to\mathbb{R}^n$ 是连续函数, 若 (**Lip**) 对任意 $a,b\in\mathbb{R}, M>0$, 存在 $K>0$, 使得

$$|f(t,\phi)-f(t,\psi)|\leqslant K\parallel\phi-\psi\parallel,\quad a\leqslant t\leqslant b,\quad \parallel\phi\parallel,\parallel\psi\parallel\leqslant M, \tag{1.2.1}$$

则称 f 在 $\mathbb{R}$ 的每个有界子集上满足 Lipschitz 条件, 并称 K 为 f 相应于 $[a,b]$ 和 M 的 Lipschitz 常数.

引理 1.2.1　设 $f:\mathbb{R}\times C\to\mathbb{R}^n$ 是连续的, 且满足 Lipschitz 条件 (**Lip**). 则对于每个有限区间 $[a,b]$ 和 $M>0$, 存在 $L>0$, 使得

$$|f(t,\psi)|\leqslant L,\quad t\in[a,b],\quad \parallel\psi\parallel\leqslant M.$$

证明　记 $\hat{0}$ 为 C 空间中的零函数, $\parallel\psi\parallel\leqslant M$, K 是 (1.2.1) 中对于 $[a,b]$ 和 M 的 Lipschitz 常数. 那么

$$|f(t,\psi)|\leqslant|f(t,\psi)-f(t,\hat{0})|+|f(t,\hat{0})|\leqslant K\parallel\psi-\hat{0}\parallel+|f(t,\hat{0})|\leqslant KM+P\triangleq L,$$

其中 $P=\max\limits_{a\leqslant s\leqslant b}|f(s,\hat{0})|$. 证毕.

下面的引理在进行解的估计时经常用到, 其证明参见参考文献 [6].

引理 1.2.2　(Gronwall 不等式)

若 u,α 是 $[a,b]$ 上的实值连续函数, 函数 $\beta\geqslant 0$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且

$$u(t)\leqslant\alpha(t)+\int_a^t\beta(s)u(s)\mathrm{d}s,\quad t\in[a,b],$$

则

$$u(t)\leqslant\alpha(t)+\int_a^t\beta(s)\alpha(s)\exp\left(\int_s^t\beta(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s,\quad t\in[a,b].$$

进一步, 若 α 是单调不减的, 那么

$$u(t)\leqslant\alpha(t)\exp\left(\int_a^t\beta(s)\mathrm{d}s\right),\quad t\in[a,b].$$

定理 1.2.1(解的存在唯一性定理)　假设 f 是连续的, 且满足 Lipschitz 条件 (**Lip**). 那么, 对于 $\sigma\in\mathbb{R}$, $M>0$, 存在 $A>0$, 使得当 $\parallel\phi\parallel\leqslant M$ 时, 方程 (1.1.2) 的解 $x(t)=x(t,\phi)$ 在 $[\sigma-r,\sigma+A]$ 上存在唯一. 进一步, 存在 $k>0$, 使得

$$|x_t(\phi)-x_t(\psi))|\leqslant\parallel\phi-\psi\parallel\mathrm{e}^{K(t-\sigma)},\quad \sigma\leqslant t\leqslant\sigma+A,\quad \parallel\phi\parallel,\parallel\psi\parallel\leqslant M. \tag{1.2.2}$$

证明　设 K 是 f 对于集合 $[\sigma,\sigma+r]\times\{\psi\in C:\parallel\psi\parallel\leqslant 2M\}$ 的 Lipschitz 常数, L 是引理 1.2.1 中 $|f|$ 相应于这个集合的界, 记 $A=\min\{r,M/L\}$.

假设 $\| \phi \| \leqslant M$, 每给定一个 $[\sigma - r, \sigma + A]$ 上的连续函数 $y(t)$, 且满足 $y_\sigma = \phi$ 和

$$|y(t)| \leqslant 2M, \quad t \in [\sigma, \sigma + A],$$

就可以定义一个 $[\sigma - r, \sigma + A]$ 上的连续函数 z 如下:

$$\begin{cases} z(t) := \varphi(0) + \int_\sigma^t f(s, y_s)\mathrm{d}s, & \sigma \leqslant t \leqslant \sigma + A, \\ z(t) = \phi(t - \sigma), & \sigma - r \leqslant t < \sigma. \end{cases}$$

而且, $|z(t)| \leqslant M + L(t - \sigma) \leqslant M + LA \leqslant 2M, \quad \sigma \leqslant t \leqslant \sigma + A$.

下面, 采用逐次近似计算法. 取初始估计

$$x^{(0)}(t) = \phi(0), \sigma \leqslant t \leqslant \sigma + A \quad \text{和} \quad x^{(0)}(t) = \varphi(t - \sigma), t \in [\sigma - r, \sigma].$$

显然

$$|x^{(0)}(t)| \leqslant M, \quad \sigma \leqslant t \leqslant \sigma + A.$$

对 $m = 0, 1, 2, \cdots$, 定义

$$\begin{cases} x^{(m+1)}(t) = \phi(0) + \int_\sigma^t f(s, x_s^{(m)})\mathrm{d}s, & \sigma \leqslant t \leqslant \sigma + A, \\ x^{(m+1)}(t) = \phi(t - \sigma), & \sigma - r \leqslant t < \sigma. \end{cases} \tag{1.2.3}$$

于是

$$|x^{(1)}(t) - x^{(0)}(t)| = |\int_\sigma^t f(s, x_s^{(0)})\mathrm{d}s| \leqslant L(t - \sigma), \quad \sigma \leqslant t \leqslant \sigma + A.$$

注意到 $x_\sigma^{(m)} = x_\sigma^{(m+1)}$, 有

$$\begin{aligned} |x^{(m+1)}(t) - x^{(m)}(t)| &= |\int_\sigma^t [f(s, x_s^{(m)}) - f(s, x_s^{(m-1)})]\mathrm{d}s| \\ &\leqslant K \int_\sigma^t \| x_s^{(m)} - x_s^{(m-1)} \| \,\mathrm{d}s \\ &\leqslant K \int_\sigma^t \sup_{\sigma \leqslant \eta \leqslant s} |x^{(m)}(\eta) - x^{(m-1)}(\eta) \| \,\mathrm{d}s, \quad \sigma \leqslant t \leqslant \sigma + A. \end{aligned}$$

于是

$$|x^{(2)}(t) - x^{(1)}(t)| \leqslant K \int_\sigma^t L(s - \sigma)\mathrm{d}s = KL(t - \sigma)^2/2$$

和

$$|x^{(3)}(t) - x^{(2)}(t)| \leqslant K \int_\sigma^t KL\frac{(s - \sigma)^2}{2}\mathrm{d}s = \frac{L}{K}\frac{[K(t - \sigma)]^3}{3!},$$

由归纳法得

$$|x^{(m+1)}(t)-x^{(m)}(t)|\leqslant \frac{L}{K}\frac{[K(t-\sigma)]^{m+1}}{(m+1)!}.$$

由三角不等式, 对于 $m>n$, 有

$$\begin{aligned}&|x^{(m)}(t)-x^{(n)}(t)|\\ \leqslant&|x^{(m)}(t)-x^{(m-1)}(t)|+|x^{(m-1)}(t)-x^{(m-2)}(t)|+\cdots+|x^{(n+1)}(t)-x^{(n)}(t)|\\ \leqslant&\frac{L}{K}\left[\frac{[K(t-\sigma)]^{m}}{m!}+\frac{[K(t-\sigma)]^{m-1}}{(m-1)!}+\cdots+\frac{[K(t-\sigma)]^{n+1}}{(n+1)!}\right]\\ \leqslant&\frac{L}{K}\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{(KA)^j}{j!}\to 0, n\to\infty.\end{aligned}$$

即 $\{x^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$ 是 $[\sigma,\sigma+A]$ 上带有上确界范数的连续向量值函数空间上的柯西序列, 这个空间是完备的度量空间, 所以存在连续函数 $x:[\sigma,\sigma+A]\to\mathbb{R}^n$ 满足

$$\sup_{\sigma\leqslant t\leqslant\sigma+A}|x^{(m)}(t)-x(t)|\to 0,\quad m\to\infty.$$

拓展 $x(t)$ 到 $[\sigma-r,\sigma+A]$: $\quad x(t)=\phi(t-\sigma),\quad \sigma-r\leqslant t\leqslant\sigma.$

因为 $|f(s,x_s^{(m)})-f(s,x_s)|\leqslant K\|x_s^{(m)}-x_s\|\leqslant K\sup\limits_{\sigma\leqslant t\leqslant\sigma+A}|x^{(m)}(t)-x(t)|$, 所以 $f(s,x_s^{(m)})\to f(s,x_s),\quad \sigma\leqslant s\leqslant\sigma+A$, 当 $m\to\infty$ 时是一致的, 故

$$\lim_{m\to\infty}\int_\sigma^t f(s,x_s^{(m)})ds=\int_\sigma^t f(s,x_s)\mathrm{d}s$$

将 (1.2.3) 的第一式的两侧取极限, 得 (1.1.3) 式成立, 即解 $x(t,\phi)$ 在 $[\sigma-r,\sigma+A]$ 上存在.

下面证明唯一性. 如果 $y:[\sigma-r,\sigma+a]$ 是初值问题的另一个解, $a>0$. 则这两个解在 $[\sigma-r,\sigma+\min\{a,A\}]$ 上一定相同.

首先, 在该区间上 $|y(t)|\leqslant 2M$, 否则, 因为 $|y(\sigma)|\leqslant M$, 一定存在最小的 $p<A$, 有 $|y(p)|=2M$, 所以

$$|y(t)|\leqslant|\phi(0)|+\int_\sigma^t|f(s,y_s)|\mathrm{d}s\leqslant M+L(t-\sigma),\quad \sigma\leqslant t\leqslant p.$$

取 $t=p$, 得 $2M<2M$, 矛盾. 所以, 在 $[\sigma-r,\sigma+\min\{a,A\}]$ 上有 $|y(t)|\leqslant 2M$.

下面利用 Gronwall 不等式证明在该区间上 $y(t)=x(t,\phi)$.

$$\begin{aligned}&|x(t,\phi)-x(t,\psi)|\\ \leqslant&|\phi(0)-\psi(0)|+|\int_\sigma^t[f(s,x_s(\phi))-f(s,x_s(\psi))]\mathrm{d}s|\end{aligned}$$

$$\leqslant ||\phi - \psi|| + K\int_\sigma^t ||x_s(\phi) - x_s(\psi)||\mathrm{d}s$$
$$\leqslant ||\phi - \psi|| + K\int_\sigma^t \max_{\sigma - r\leqslant\eta\leqslant s} |x(\eta,\phi) - x(\eta,\psi)|\mathrm{d}s.$$

令 $u(s) := \max\limits_{\sigma - r\leqslant\eta\leqslant s} |x(\eta,\phi) - x(\eta,\psi)|,\quad \sigma\leqslant s\leqslant\sigma + A$, 有

$$u(t)\leqslant ||\phi - \psi|| + K\int_\sigma^t u(s)\mathrm{d}s,\quad \sigma\leqslant s\leqslant\sigma + A.$$

由 Gronwall 不等式, $u(t)\leqslant ||\phi - \psi||\mathrm{e}^{K(t-\sigma)},\quad \sigma\leqslant s\leqslant\sigma + A$, 特别地,

$$||x_t(\phi) - x_t(\psi)||\leqslant ||\phi - \psi||\mathrm{e}^{K(t-\sigma)},\quad \sigma\leqslant s\leqslant\sigma + A.$$

证毕.

注释 1.2.1 若 f 满足全局 Lipschitz 条件, 即在 (**Lip**) 中的 K 可以不依赖于 a,b,M, 那么定理 1.2.1 中解 $x(t) = x(t,\phi)$ 在 $[\sigma - r,\infty)$ 上存在唯一, 式 (1.2.2) 在 $t\in[\sigma - r,\infty)$ 上成立.

定理 1.2.1 给出了方程 (1.1.3) 定义在 $[\sigma - r,\sigma + A]$ 上的局部解的存在性, 在应用中通常需要定义在 $[\sigma - r, +\infty)$ 上的整体解的存在性.

首先, 由定理 1.2.1 的证明可以得到下面结论.

引理 1.2.3 设 $x: I\to\mathbb{R}^n$ 和 $y: J\to\mathbb{R}^n$ 是方程 (1.1.2) 满足定理 1.2.1 条件的两个解, 其中 I,J 是形如 $[\sigma - r,\sigma + \alpha]$ 或 $[\sigma - r,\sigma + \alpha)$ 的区间, $0<\alpha\leqslant\infty$. 那么

$$x(t) = y(t),\quad t\in I\cap J.$$

对于引理中的 x 和 y, 如果 $I\subset J$, 则称 y 是 x 的延展, 记为 $x\subset y$. 设 S 是 (1.1.2) 的形如 $x: I\to \mathrm{R}^n$ 的解族, 其中 $I = [\sigma - r,\sigma + \alpha]$ 或 $I = [\sigma - r,\sigma + \alpha)$, $\alpha\in(0,\infty)$, 那么 $\subset$ 是 S 上的一种偏序关系. 根据引理 1.2.3, 任取 $x,y\in S$, 必有 $x\subset y$ 或者 $y\subset x$.

如果对于解 $x: I\to\mathbb{R}^n$, 不存在更大的存在区间, 则称该解是不可延展的. 由 Zorn's 引理, 初值问题 (1.1.2) 存在唯一的不可延展解. 令 $J = \cup_{x\in S}D(x)$, 其中 $D(x)$ 为解 x 的定义区间. 显然, 存在 $\alpha\in(0,\infty)$, 使得 $J = [\sigma - r,\sigma + \alpha]$ 或 $J = [\sigma - r,\sigma + \alpha)$. 但如果 $J = [\sigma - r,\sigma + \alpha]$, 利用定理 1.2.1 可以得到解的更大存在区间, 与解的不可延展性矛盾. 所以, $J = [\sigma - r,\sigma + \alpha)$.

于是, 若 $\bar{x}: J\to\mathbb{R}^n$ 是方程 (1.1.2) 的不可延展解, 则 $\forall t\in J$, $\forall x\in S$, 如果 x 在 t 点有定义, 则有

$$\bar{x}(t) = x(t).$$

进一步, 如果 $\alpha<\infty$, 那么当 t 从左侧趋向于 $\sigma + \alpha$ 时, 该不可延展解一定"爆破".

定理 1.2.2(解的延展定理)　假设 f 是连续的, 且满足 Lipschitz 条件 (**Lip**), $r>0$, 且假设 $x:[\sigma-r,\sigma+\alpha)\to\mathbb{R}^n$ 是方程 (1.1.2) 的唯一的不可延展解, $0<\alpha\leqslant\infty$. 若 $\alpha<\infty$, 那么

$$\lim_{t\to(\sigma+\alpha)-}\|x_t\|=\infty.$$

证明　否则, $\exists M>0$, 和单调递增序列 $\{t_m\}_m$: $t_m<\alpha, t_m\to\alpha$, 有 $\|x_{\sigma+t_m}\|\leqslant M$, 这意味着对每一个 m,

$$|x(t)|\leqslant M, t\in I_m=[\sigma+t_m-r,\sigma+t_m].$$

因为 $t_m<\alpha, t_m\to\alpha$, 所以对于给定的 $r, \exists K$, 使得当 $m,m'\geqslant K$, 有 $t'_m-t_m<r$, 这样 I_m 和 I'_m 重叠, 于是 $\cup_{m\geqslant K}I_m=[t_K+\sigma-r,\sigma+\alpha)$.

所以 $\exists N>0$, 使得

$$|x(t)|\leqslant N, t\in[\sigma-r,\sigma+\alpha),$$

即

$$\|x_t\|\leqslant N, t\in[\sigma,\sigma+\alpha).$$

由引理 1.2.1, $\exists P>0$, 使得

$$|x'(t)|=|f(t,x_t)|\leqslant P, t\in[\sigma,\sigma+\alpha),$$

所以, 对于任意的 $t,t'\in[\sigma,\sigma+\alpha), t<t'$, 都有

$$|x(t)-x(t')|=|\int_t^{t'}x'(s)\mathrm{d}s|\leqslant P|t-t'|.$$

故, $x:[\sigma,\sigma+\alpha)\to\mathbb{R}^n$ 是一致连续的, 所以 $\lim\limits_{t\to(\sigma+\alpha)-}x(t)$ 存在. 定义 $x(\sigma+\alpha)=\lim\limits_{t\to(\sigma+\alpha)-}x(t)$, 则 x 在 $[\sigma-r,\sigma+\alpha]$ 上连续.

因为 $x(t)$ 满足积分方程 (1.1.3)

$$x(t)=\phi(0)+\int_\sigma^t f(s,x_s)\mathrm{d}s,\quad t\in[\sigma,\sigma+\alpha), \tag{1.2.4}$$

又由于 $x(t)$ 可以连续地延拓到 $[\sigma-r,\sigma+\alpha]$ 上, 对 (1.2.4) 两边取极限 $\lim\limits_{t\to\sigma+\alpha}$, 知 (1.2.4) 对于 $t\in[\sigma,\sigma+\alpha]$ 成立, 这意味着 $x:[\sigma-r,\sigma+\alpha]\to\mathbb{R}^n$ 是 (1.1.2) 的解, 与 $x:[\sigma-r,\sigma+\alpha)\to\mathbb{R}^n$ 是不可延展解矛盾. 所以定理结论正确.

注释 1.2.2(连续依赖性定理)　假设 f 是连续的, 且满足 Lipschitz 条件 (**Lip**). 则方程 (1.1.2) 的解 $x(t)=x(t,\sigma,\phi,f)$ 连续地依赖于 σ,ϕ 和 f. 该定理的精确叙述参见参考文献 [6] 第 2 章定理 2.2.

以上介绍了时滞微分方程的一些基本概念和基本理论, 在叙述和论证方法上均与常微分方程有许多类似之处, 但与常微分方程也有很多本质的区别. 例如, 在时滞微分方程中解的定义是 "单向" 的, 即要求解在 σ 的右方满足微分方程, 而决定一个解的初值条件是空间 $\mathbb{R}\times C$ 中的一个点 (σ,ϕ), 这里 ϕ 是一个函数. 因此, 在研究解的正向延展时, 与常微分方程完全类似, 但在研究解的反向延展时, 却遇到很大的困难.

定义 1.2.2 设 $\alpha>0$, 称 $x(t):[\sigma-r-\alpha,\sigma]\to\mathbb{R}^n$ 为初值问题 (1.1.2) 的反向延展解, 如果 x 是连续的, $x_\sigma=\phi$, 且 x 满足

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t),t\in[\sigma-\alpha,\sigma].$$

当初始值 σ 取定, 沿 $t\geqslant\sigma$ 的正向求解是一种积分延拓, 而沿 $t\leqslant\sigma$ 求解则是微分延拓. 由于初始函数 $\varphi\in C$, 若 φ 连续而不可微, 则一定不能反向延拓. 所以反向延展的一个必要条件是初始函数 ϕ 必须在 $[-\alpha,0]$ $(\alpha\leqslant r)$ 上连续可微, 或在 $[-r,0](\alpha>r)$ 上连续可微, 另外还要满足所谓的 "相容性条件"

$$\dot{\phi}(0)=f(t,\phi),$$

这里 $\dot{\phi}(0)$ 表示在 0 点的左导数.

为了描述反向延展定理, 需要 "原子" 的概念.

定义 1.2.3 设 $\Omega\subseteq\mathbb{R}\times C$ 为开集, $f(t,\varphi):\Omega\to\mathbb{R}^n$ 是连续泛函, 且对 φ 具有连续的 Fréchet 导数 $f_\varphi(t,\varphi)$, 于是对于 $\forall(t,\varphi)\in\Omega,\theta\in[-r,0]$, 存在 $n\times n$ 有界变差函数矩阵 $\mu(t,\varphi,\theta)$, 使得

$$f_\varphi(t,\varphi)\psi=\int_{-r}^{0}[\mathrm{d}_\theta\mu(t,\varphi,\theta)]\psi(\theta),\quad \psi\in C.$$

对于 $(t_0,\varphi_0)\in\Omega$ 及 $\theta_0\in[-r,0]$, 若 $\det[\mu(t_0,\varphi_0,\theta_0^+)-\mu(t_0,\varphi_0,\theta_0^-)]\neq0$, 则称 f 在 (t_0,φ_0) 于 θ_0 处是原子的; 若 f 在任意 $(t,\varphi)\in H\subseteq\Omega$ 于 θ_0 处是原子的, 则称 f 在 H 上于 θ_0 处是原子的.

例如, 非线性泛函 $f(t,\varphi)=a(t)\varphi^2(0)+\dfrac{1}{2}b(t)\varphi^2(-r)$, 对 φ 的 Fréchet 导数为

$$f_\varphi(t,\varphi)\psi=2a(t)\varphi(0)\psi(0)+b(t)\varphi(-r)\psi(-r),\forall\psi\in C,$$

可以取

$$\mu(t,\varphi,\theta)=\begin{cases}2a(t)\varphi(0), & \theta=0,\\ 0, & \theta\in(-r,0),\\ -b(t)\varphi(-r), & \theta=-r,\end{cases}$$

所以, f 于 0 处是原子的, 相当于要求在所考虑的集合上 $a(t)\varphi(0)\neq0$; f 于 $-r$ 处是原子的, 相当于要求在所考虑的集合上 $b(t)\varphi(-r)\neq0$; 由于当 $\theta_0\in(-r,0)$ 时,

$$\det[\mu(t_0,\varphi_0,\theta_0^+)-\mu(t_0,\varphi_0,\theta_0^-)]\equiv0,$$

所以, f 对于任意 (t,φ) 于 $\theta_0\in(-r,0)$ 处都不会是原子的.

定理 1.2.3(反向延展定理) 设 $\Omega\subseteq\mathbb{R}\times C$ 为开集, $f\in C(\Omega,\mathbb{R}^n)$ 在 Ω 上于 $-r$ 处是原子的. 对于 $(\sigma,\phi)\in\Omega$, 若 $\dot\phi(0)=f(t,\phi)$, 且存在 $\alpha:0<\alpha\leqslant r$, 使得 $\dot\phi(\theta)$ 在 $[-\alpha,0]$ 上连续, 则存在 $\bar\alpha>0$, 使得初值问题 (1.1.2) 的反向延展解在 $[\sigma-r-\bar\alpha,\sigma]$ 上存在、唯一.

定理 1.2.4 的证明参见参考文献 [6] 的第 2 章定理 5.1.

满足反向延展定理的初始函数 ϕ 是 C 空间中很特殊的一类. 所以, 对于一般的 $\phi\in C$, 初值问题 (1.1.2) 是不存在反向延展解的.

但是, 应该注意到, 如果 $x:[\sigma-r,\sigma+A)\to\mathbb{R}^n$ 是 (1.1.2) 的 (向前) 解, 若 $\sigma_1\in(\sigma,\sigma+A)$, 则 x 可以看作是初值条件为 (σ_1,x_{σ_1}) 的反向延展解. 按照这一想法, 自治系统的很多解都可以延展到 $t\in\mathbb{R}$ 上.

注释 1.2.3 前面所讨论的方程, 都是假设其右端的函数 $f(t,x)$ 是连续的. 但在某些重要应用中所遇到的微分方程, 其右端函数往往是不连续的. 这就要求我们对于这种不连续系统给解以新的定义, 并在此基础上研究解的多种属性. 这类具有间断右端的微分方程的研究已成为微分方程近代研究中的一个重要课题. 比如, 对于 f 满足所谓的 Caratheodory 条件的方程, 参考文献 [6] 建立了在 Carathéodory 意义下的解的存在与唯一性定理等基本理论.

1.3 线性自治系统谱分解理论

线性自治系统的谱分解理论是运用中心流形理论研究分支问题的基础.

一般的线性系统具有形式

$$\dot x(t)=L(t,x_t)+h(t),\tag{1.3.1}$$

其中 $L(t,\phi):\mathbb{R}\times C\to\mathbb{R}^n$ 关于 ϕ 是线性的. 下面假设

$$L(t,\phi)=\int_{-r}^{0}[\mathrm{d}_\theta\eta(t,\theta)]\,\phi(\theta),$$

其中 $\eta(t,\theta)$ 是关于 $(t,\theta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 可测的 $n\times n$ 矩阵函数, 它对于每一个 t 关于 θ 在 $[-r,0]$ 上是有界变差的, 其规范的取法需要满足

$$\begin{aligned}&\eta(t,\theta)=0, && \theta\geqslant 0,\\ &\eta(t,\theta)=\eta(t,-r), && \theta\leqslant -r,\end{aligned}$$

且关于 θ 在 $(-r,0)$ 上左连续. 而且假设存在 $m(t)\in L_1^{\mathrm{loc}}((-\infty,\infty),\mathbb{R})$, 使得

$$|L(t,\phi)|\leqslant m(t)||\phi||,t\in(-\infty,+\infty),\quad \phi\in C.$$