西北大学

研究生毕业论文摘要汇编

（1981届）

理工科版

西北大学科研处

目　　录

物　理　系

化　学　系

地　理　系

地　质　系

运动磁单极子的规范势

物理系理论物理专业　石康杰　指导教师　侯伯宇教授

自从Dirac 提出磁单极子概念，尤其是作为杨——Mills场无源解的吴——杨磁单极势〔5〕提出之后，关于磁单极子的规范势曾经有过很多讨论。〔1〕〔2〕〔3〕〔4〕

本文给出作任意运动的一个磁单极子的SU（2）规范势的具体形式，进一步得到与它等价的U（1）势，在粒子静止时，它的规范势与吴——杨势等价。

为叙述方便，我们规定：

1. 希腊字母指标μ，ν等从0到3，$X_0 \equiv ct$ 拉丁字母i j k 从1到3

重复指标表示求和

2. 对任何三维矢量$\vec{a}$　$\hat{a} \equiv \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

3. 对三维旋转矩阵g的无穷小算子dgg^{-1}，我们规定一个矢量

$$\overrightarrow{[dgg^{-1}]},$$

$(dgg^{-1})_{ij} = -\epsilon_{ijk}\overrightarrow{[dgg^{-1}]}_k$，对任意矢量$\vec{\phi}$：

$(dgg^{-1})\vec{\phi} = \overrightarrow{[dgg^{-1}]} \times \vec{\phi}$总能成立。

对$g^{-1}dg$也作类似规定。

4. 粒子的运动用

$\vec{y}=\vec{y}(\tau)$ 表示，$\vec{v}\equiv\frac{d\vec{y}}{d\tau}\equiv c\vec{\beta}$

如果 $\vec{x}=\vec{y}(\tau)+\hat{R}c(t-\tau)$，$|\hat{R}|=1$

我们称时空点$\left[\vec{y}(\tau),\tau\right]$是（$\vec{x}$，t）的源点。定义

$\vec{R}=\vec{x}-\vec{y}=c(t-\tau)\quad\hat{R}=R\hat{R}$,

具有同一个源点$\vec{y}(\tau)$ 和同一个方向$\hat{R}$的不同时空点，我们称它们处于同一根“光线”上。

四维闵空的SU（2）协变导数为：

$$D\mu\vec{\phi}\equiv\partial\mu\vec{\phi}+\vec{A}\mu\times\vec{\phi}$$

如果它的规范势 $\vec{A}\mu=\partial\mu\vec{n}\times\vec{n}$

式中 $\vec{n}=\vec{n}(X\mu)$

$\vec{n}\cdot\vec{n}=1$

则 称它是由$\vec{n}$诱导的规范势，这种规范场总可以通过规范变换变为

阿贝尔势 $\vec{A}'\mu=\vec{K}a\mu$ （其中$\vec{K}$是常矢量），从而得 到等价的U（1）势$a\mu$，这称为SU（2）势的“约化”。〔6〕

约化之后得到等价的U（1）规范势和场强。以下简称诱导 势的场强。

$$F\mu\nu=-\partial\mu\vec{n}\times\partial\nu\vec{n}\cdot\vec{n}$$

$$Ei\ (\text{电场强度})=Fio=-\partial i\vec{n}\times\partial_0\vec{n}\cdot\vec{n}$$

$$Bi\ (\text{磁场强度})=\frac{1}{2}\in ijkFjk$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$= \frac{-1}{2} \in ijk\,(\partial j\vec{n} \times \partial_k \vec{n} \cdot \vec{n}),$$

$$Fij = \in ijkBk$$

易证，诱导势场强具有下列性质：

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (令x_0 = ct) \qquad ①$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad ②$$

如果在某个方向$\hat{1}$上$\vec{n}$不变，即$\hat{1}i\partial_\tau \vec{n} = 0$，则 $\hat{1} \times \vec{B} = 0$

如果 $\vec{B} \neq 0$， 则$\vec{B} /\!/ \hat{1}$ ③

此外，如果某个矢量$\vec{u}$使$Ui\partial i\vec{n} + \partial_0 \vec{n} = 0$，则$\vec{E} = \vec{B} \times \vec{u}$ ④

以上都是诱导势的场强自然满足的关系。

对一个作任意运动的点电荷e的辐射电磁场强，作对偶变换，可以得到作任意运动的磁单极子的辐射电磁场，它是满足麦克斯韦方程组的。

$$\vec{B}' = \frac{1-\beta^2}{R^2(1-\vec{\beta}\cdot\hat{R})^3}(\hat{R}-\vec{\beta}) \qquad 4$$

$$+ \frac{1}{R(1-\vec{\beta}\cdot\hat{R})^3}\left\{\hat{R} \times \left[(\hat{R}-\vec{\beta}) \times \left(\frac{d}{cd\tau}\vec{\beta}\right)\right]\right\}$$

$$\vec{E}' = \vec{B}' \times \hat{R} \qquad ⑤$$

$$\nabla \times \vec{E}' = -\frac{1}{C}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}' \qquad ⑥$$

$$\nabla \cdot \vec{B}' = 0 \qquad ⑦$$

在粒子所在位置以外都成立。

可以证明，对于这个电磁场，t时刻的任意一根磁力线通过当时粒子所在位置$\vec{y}(t)$。

我们现在构造一个$\vec{n}(X\mu)$，使它满足如下要求。(我们用$\vec{B}$，$\vec{E}$表示由它诱导出来的规范场强，与磁单极子的场强$\vec{B}'$，$\vec{E}'$相区别。)

(一)在某个时刻t_0，在$\vec{Y}(t_0)$附近很小的邻域内，有$\vec{B}' = \vec{B}$

(二)在t_0时刻，使磁单极子的每根磁力线上$\vec{n}$相同。则由③$\vec{B}' // \vec{B}$处处成立（除$\vec{y}(t_0)$以外）又由于②和⑦：$\nabla \cdot \vec{B} = O$，$\nabla \cdot \vec{B}' = O$，因此对任意通过点$\vec{y}(t_0)$的磁力线上$\vec{B} = \vec{B}'$，另外由于一切磁力线都通过当时的粒子位置$\vec{y}(t_0)$，

∴ $\vec{B}' = \vec{B}$在t_0时刻处处成立。

（三）在不同的时刻，我们使处于同一根“光线”上的时空点的$\vec{n}$相同，则：

$$\vec{n}(\vec{X}, t) = \vec{n}(\vec{X} + C\hat{R}\,dt, t + dt)$$

$$O = d\vec{n} = \frac{\partial \vec{n}}{\partial t}dt + \frac{\partial \vec{n}}{\partial X_i}(C\hat{R}_i)\,dt$$

$$\therefore \quad \hat{R}_i\,\partial_i\vec{n} + \partial_0\vec{n} = O$$

而由④得

$\vec{E}=\vec{B}\times\hat{R}$ 在任意时空点成立。 ⑧

由① ⑧

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}=-C\nabla\times\vec{E}=-C\nabla\times(\vec{B}\times\vec{R})$$

又由⑥和⑤ $\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t}=-C\nabla\times\vec{E}'=-C\nabla\times(\vec{B}'\times\hat{R})$

而在初始时刻t_0，又有 $\vec{B}=\vec{B}'$，对一切时空点成立。这样，我们由t_0时刻 $\vec{B}=\vec{B}'$ 可以推知当时$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}=\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t}$，因而在$t_0\pm dt$时刻

$\vec{B}=\vec{B}'$ 处处成立，继续下去，可以推知任意时刻$t<t_0$，$\vec{B}=\vec{B}'$成立。又由于⑤ ⑧ $\vec{E}=\vec{E}'$ 在$t<t_0$的任何时空点成立。（规定$t<t_0$是因为要使每个时空点能找到t_0时刻在同一根"光线"上对应的点）。

为了进一步得到具体结果，我们讨论如何构造一个$\vec{n}(X\mu)$使它分别达到上述三点要求。

我们先对每个时空点定义两个矢量$\vec{s}$和$\vec{q}$：

设时空点（$\vec{X}$，t）的源点为（$\vec{y}$，τ）

$$\vec{x}-\vec{y}=C\hat{R}(t-\tau)$$

对每个时空点$X\mu$，都可以找到相应的$\hat{R}$以及$\vec{\beta}(\tau)$

定义 $$\vec{S}\equiv\hat{R}-\vec{\beta}$$

$$\vec{q}\equiv\vec{S}+\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1}{\beta^2}\right)(\vec{S}\cdot\vec{\beta})\vec{\beta}$$

$$=\hat{R}+\left[\frac{\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1}{\beta^2}(\hat{R}\cdot\vec{\beta})-\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right]\vec{\beta}$$

因此在t_0时刻，在当时粒子所在位置的无穷小邻域内，只要令

$$\vec{n}\left(\vec{x}\sim\vec{y}(t_0),t_0\right)=-\hat{R}=-\hat{q},$$

就可以使在这个邻域中$F\mu\nu=F'\mu\nu$

$\because\quad \vec{x}=\vec{y}(\tau)+\hat{R}C(t-\tau)$ 当$dt=0$（同一时刻）

$$d\vec{x}=cd\tau\left[\vec{\beta}-\hat{R}+R\frac{d\hat{R}}{cd\tau}\right]$$

而在（$\vec{X}$，t）点的磁单极子的磁场强度

$$\vec{B}'=-\frac{1-\beta^2}{R^2(1-\vec{\beta}\cdot\hat{R})^3}\left\{\vec{\beta}-\hat{R}-R\frac{\left[\hat{R}\times\left(\vec{S}\times\frac{d\vec{\beta}}{cd\tau}\right)\right]}{1-\beta^2}\right\}$$

只要$\frac{d\hat{R}}{cd\tau}=\frac{-1}{1-\beta^2}\left\{\hat{R}\times\left(\vec{S}\times\frac{d\vec{\beta}}{cd\tau}\right)\right\}$

就有$d\vec{x}\mathbin{/\!/}\vec{B}'$　　由于$\frac{d\hat{R}}{cd\tau}\cdot\hat{R}=0$，　而且$\vec{B}'\cdot\hat{R}\neq0$

这个解是唯一的。

所以，在同一时刻沿着磁力线前进时

$$d\hat{R} = \frac{-1}{1-\beta^2}\left[\hat{R}\times(\vec{S}\times d\vec{\beta})\right] \qquad ⑨$$

从而可以推得在同一时刻沿磁力线移动时

$$d\hat{q} = (d\vec{\beta}\times\vec{\beta}f)\times\hat{q} \qquad \text{其中 } f \equiv \frac{\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1}{\beta^2}$$

若以τ为参量，就是

$$\hat{q}(\tau+d\tau) = \hat{q}(\tau) + (d\vec{\beta}\times\vec{\beta}f)\times\hat{q}(\tau)$$

我们定义微转动$g(\tau+d\tau,\ \tau)$使得对任意矢量$\vec{\phi}$

$$g\vec{\phi} = \vec{\phi} + (d\vec{\beta}\times\vec{\beta}f)\times\vec{\phi}$$

$$\therefore \quad \hat{q}(\tau+d\tau) = g(\tau+d\tau,\tau)\hat{q}(\tau)$$

因此，在同一根磁力线上

$$\hat{q}(\tau_2) = g(\tau_2,\ \tau_2-d\tau)\,g(\tau_2-d\tau,\ \tau_2-2d\tau)\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots g(\tau_1+d\tau,\ \tau_1)\,\hat{q}(\tau_1) = g(\tau_2,\ \tau_1)\,\hat{q}(\tau_1)$$

当τ_1改变时

$$g^{-1}dg\,\vec{\phi} = -(d\vec{\beta}\times\vec{\beta}f)\times\vec{\phi}$$

也就是，按本文开始约定的记号

$$-d\vec{\beta}\times\vec{\beta}f = \overrightarrow{[g^{-1}dg]} \qquad ⑩$$

从这里可以看出$g(\tau_2、\tau_1)$仅与粒子在$\tau_1\longrightarrow\tau_2$这段时间内的运动$\vec{y}=\vec{y}(\tau)$有关，而与在什么时刻$t_0$、沿哪一条磁力 线都 没有

关系。

由于要求在同一根磁力线（磁单极子的磁力线）上，$\vec{n}$要不变（在t_0时刻）

$\therefore\ \vec{n}(X, t_0) = -g(\tau_0, \tau)\,\hat{g}(\vec{x}, t_0)$ 能满足（一）（二）条件

（三） 在其他时刻，对于同一根"光线"上的两点$(\vec{x}_1、t')$和$(\vec{x}, t_0)$，$\vec{n}$应该相同。

易证 $\hat{q}(\vec{x'}, t') = \hat{q}(\vec{x}_1, t_0)$，而$\tau(x', t') = \tau(x, t_0)$

$$\therefore\ \vec{n}(\vec{x}_1{}', t') = -g(\tau_0, \tau\vec{x'}t')\,\hat{q}(\vec{x}_1{}', t') \qquad ⑪$$

到此，我们导出了$\vec{n}(\vec{x}', t')$的表达式。

令 $\vec{A}\mu = \partial\mu\vec{n} \times \vec{n}$，就得到所要的规范势。

$$\vec{A}\mu = \partial\left[\partial\mu\ \hat{q} \times \hat{q} + (g^{-1}\partial\mu g\hat{q}) \times \hat{q}\right]$$

作一个规范变换，可以得到规范等价的势$\vec{B}\mu$

$$\vec{A}\mu = g\left(\vec{B}\mu - \overrightarrow{[g^{-1}\partial\mu g]}\right)$$

由⑩ $\vec{B}\mu = \partial\mu\hat{q} \times \hat{q} + \hat{q}\left\{-\partial\mu\vec{\beta} \times \vec{\beta}f、\hat{q}\right\}$

其中 $\partial\mu\vec{\beta} = \dfrac{d\vec{\beta}}{d\tau} \cdot \dfrac{\partial\tau}{\partial\chi\mu}$ 值得注意的是，它与t_0时刻的选取无关。

因此我们可以在条件（一）中令t_0时刻粒子静止。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

还可进一步把它约化为阿贝尔势 〔6〕

设在某个坐标架下

$$\hat{q} = \vec{e}_1\sin\theta\cos\phi + \vec{e}_2\sin\theta\sin\phi + \vec{e}_3\cos\theta$$

可得

$$B'\mu = C\mu = \begin{cases} (1-\cos\theta)\ \dfrac{\partial\phi}{\partial \times\mu} + \partial\mu\vec{\beta}\times\vec{\beta}f\cdot\hat{q} \\ \quad (\text{在}\theta=\pi\text{有奇异})\text{或:} \\ (-1-\cos\theta)\dfrac{\partial\phi}{\partial X\mu} + \partial\mu\vec{\beta}\times\vec{\beta}f\cdot q \end{cases}$$

（在θ＝0有奇异）

这样，我们就得到分区表示的正磁单极子的U（1）规范势，当然，用它可以得到多个磁单极子以及还有电荷及有自由电磁场的U（1）规范势。

参 考 文 献

〔1〕、The Physics Review VoL 7 4 No 6（1948）
817页 Dirac

〔2〕Physial Review D VoL13 1976 2881
VoL14 1976 2033
KaKu

〔3〕兰州大学学报 侯伯宇
加速磁荷的SU（2）规范势

〔4〕王永康 张高有 侯伯宇
SU（2）规范场的一系列无源解

〔5〕杨振宁“磁单极、纤维丛和规范场”
规范场专题讨论会评述报告汇编1978、5、广州

〔6〕侯伯宇、段一士、葛墨林 中国科学 1979、1

SU（2）无源规范场经典解的拓扑性质

物理系理论物理专业 王育邠 指导教师 侯伯宇教授

一、Ponfrjagin示性数q在奇异规范变换下的性质。

在四维欧空，规范场结构的拓扑荷即P——数用q表示[1]：

$$q = -\frac{1}{32\pi^2}\int \in_{\mu\upsilon\rho\sigma} Tr\left(F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}\right) d^4x$$

$$= -\frac{1}{8\pi^2}\iint \in_{\mu\upsilon\rho\sigma} Tr\left(A_\upsilon A_\rho A_\sigma + \frac{2}{3}A_\upsilon A_\rho A_\sigma\right)(d\sigma)_\mu$$

$$= \frac{1}{8\pi^2}\iint (d\sigma)_\mu S_\mu$$

$$S_\mu = -\in_{\mu\upsilon\rho\sigma} Tr\left(A_\upsilon A_\rho A_\sigma + \tfrac{2}{3}A_\upsilon A_\rho A_\sigma\right)$$

我们证明q在映象数不等于零的局域SU（2）变换下是要变化的，其改变量等于规范变换的映象数。证明要点如下：

设：g（x）∈SU（2）群，在它的作用下

$$S_\mu(x) \to S_\mu'(x) = -\in_{\mu\upsilon\rho\sigma} Tr\left[\tfrac{1}{2}(A_\upsilon+\lambda_\upsilon)F_{\rho\sigma} - \tfrac{1}{3}(A_\upsilon+\lambda_\upsilon)(A_\rho+\lambda_\rho)(A_\sigma+\lambda_\sigma)\right]$$

其中$\lambda_\mu \equiv \partial_\mu g^{-1}\cdot g$，流通量的变化量为$\triangle S_\mu$，

$$\triangle S_\mu \equiv S_\mu' - S_\mu$$

$$= -\in_{\mu\upsilon\rho\sigma} Tr\left[\tfrac{1}{2}\lambda_\upsilon F_{\rho\sigma} - A_\upsilon\lambda_\rho\lambda_\sigma - \lambda_\upsilon A_\rho A_\sigma - \tfrac{1}{3}\lambda_\upsilon\lambda_\rho\lambda_\sigma\right]$$

$$= -\in_{\mu\upsilon\rho\sigma} Tr\left[\partial_\rho(\lambda_\upsilon A_\sigma) - \tfrac{1}{3}\lambda_\upsilon\lambda_\rho\lambda_\sigma\right]$$

丢掉对闭合曲面积分贡献为零的全微商得：

$$\triangle S_\mu = \tfrac{1}{3}\in_{\mu\nu\rho\sigma} Tr\left(\lambda_\upsilon\lambda_\rho\lambda_\sigma\right)$$

$$= \frac{1}{3} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} Tr\,(g\partial_\nu g^{-1} \cdot g\partial_\rho g^{-1} \cdot g\partial_\sigma g^{-1})$$

$$\therefore \Delta q = \frac{1}{24\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} Tr \iint g\partial_\nu g^{-1} \cdot g\partial_\rho g^{-1} \cdot g\partial_\sigma g^{-1} d^3x$$

$$= \frac{1}{24\pi^2} \cdot 6 \cdot 2 \cdot \text{单位}S^3\text{面积} \cdot n$$

因子“6”来自于对v、ρ、σ的求和，因子“2”是由于SU（2）的群流形是二倍于单位S^3的球面。n正是映象g（x）：$S^3 \to S^3$的映象数，前一个S^3是四维欧空中半径为无穷大的球，后一个S^3是群空间的三维单位球面。三维单位球面积等于$2\pi^2$，

$$\therefore \quad \Delta q = n$$

所以映象数等于n的g（x）使得q改变n，即在奇异变换g（x）下P—数不是守恒的。重新定义一物理量Q，Q和q的区别仅在于Q的积分区域不包括场及变换的奇点。Q就是规范守恒量。因为如用流通量表示Q，可以得到：

$$Q = \sum_{\text{对所有奇点}} q_i \qquad i\text{代表奇点序号}$$

而原来定义的P　　数仅等于Q中的q_∞一项。在Q中它的改变与qi的改变相抵消。

对于规范场的任何一个状态，都存在一系列奇异规范变换下等价的状态，这些状态具有不同的q，相同的Q。最简单的情况是真空，不同q的真空态叠加形成θ真空，造成能极的分裂。这些状态的区别在物理上是否存在可观察效应，尚待探讨。规范场SU（2）的其它解如瞬子、半子场也都有类似的性质。

要强调说明的一点是半子和反半子解，它们有不同的q，分别为$\pm\frac{1}{2}$，和相同的Q，所以虽然q可以区别它们却不是守恒量，守恒量Q又不足以表征它们的区别。我们认为，就其物理本质而言，半子和反半子是同一的。

二、Euler示性数X

满足无源场方程的规范势可以看作是纤维丛上的连络[2]。因

此四维欧空上的SO（4）场的无源解是该空间主丛上的连络，决定了一个四维流形的微分结构，也就确定了这一流形的Euler示性数[3] X。对于规范场这一示性数我们定义为：

$$X=\frac{1}{32\pi^2}\int\frac{1}{4}\epsilon_{ijkl}\epsilon_{\mu\upsilon\rho\sigma}F_{\mu\upsilon}^{ij}F_{\rho\sigma}^{kl}d^4x$$

经过复杂的计算，可以证明X可以写成流通量：

$$X=\frac{1}{32\pi^2}\sum_i\iint_i\epsilon_{ijkl}\epsilon_{\mu\upsilon\rho\sigma}\Big(A_{\upsilon}^{ij}\partial_\rho A_{\sigma}^{kl}$$

$$-\frac{2}{3}A_{\upsilon}^{ij}A_{\rho}^{kn}A_{\sigma}^{ln}\Big)\Big(d\sigma\Big)_\mu$$

X的体积分遍及场的正则区域，因此流通量的积分曲面是若干个包围奇点的无穷小球面及一个半径无穷大的球面之和。

$$\therefore\quad X=X_\infty+\sum_i X_i$$

具体对场的解计算X。因单半子在r＝0处有一奇点[4]，所以

$$X_{半}=X_\infty+X_0$$

将它的约化势函数[5.6] $A_\mu=n^a\partial_\mu n^b-n^b\partial_\mu n^a$ 代入

$$X_\infty=\frac{1}{32\pi^2}\cdot\frac{8}{3}\iint_{单位S^3}\epsilon_{ijkl}n^i dn^j dn^k dn^l$$

$$=\frac{1}{32\pi^2}\cdot\frac{8}{3}\iint_{单位S^3}n^i(dS)^i\cdot 6$$

$$=\frac{1}{2\pi^2}\cdot 单位S^3球面积$$

$$=1$$

经过类似的计算得：$X_0 = -1$

$\therefore \quad X_{半} = 0$

这一结果由场强的积分表示也可以直接看出。

正反瞬子的势函数[7] $A\mu = -2i\frac{X^\nu}{r^2+\lambda^2}\bar{\Sigma}\mu\upsilon$ 构成了

SO（4）势。其中$\Sigma_{\mu\upsilon} = \begin{pmatrix} \sigma\mu\upsilon & o \\ o & \bar{\sigma}\mu\upsilon \end{pmatrix}$是SO（4）旋量表示的生

成元。瞬子势在有限距离处处正则。在无限远处趋于纯规范场。所以

$$X_{瞬} = X_\infty ;$$

$$X\infty = \frac{1}{3\times 16\pi^2}\iint_{s^3\infty}(d\sigma)_\mu \in ijkl \in \mu\upsilon\rho\sigma A v^{ij} A\rho^{ki} A\sigma il$$

把瞬子势改写为矢量表示[6]：

$$A_\mu = -2\frac{x^\upsilon}{r^2+\lambda^2}T\mu\upsilon = -2\frac{x^\upsilon}{r^2+\lambda^2}(\delta\mu a\delta\upsilon b - \delta\mu b\delta\upsilon a)$$

令$r\rightarrow\infty$代入X_∞，计算得：

$X_\infty = 2 \qquad \therefore \quad X_{瞬} = 2$

这一结果也可以根据半子的结果直接得到，算是一个验证。

四维球面具有Euler数等于2。所以正、反瞬子场的流形与四维球面有相同的拓扑性质。

与P—数相似，E—数X_∞在改变矢量场奇点性质的规范变换下不是守恒的。这是因为

P—数密度：　$\frac{1}{4}\in_{\mu\upsilon\rho\sigma}\mathrm{Tr}\,(F_{\mu\upsilon}F_{\rho\sigma})$

E—数密度：　$\frac{1}{4}\in_{ijkl}\in_{\mu\upsilon\rho\sigma}F^{ij}_{\mu\upsilon}F^{kl}_{\rho\sigma}$

都是规范不变量。但是，它们的流S_μ和π_μ包含着不协变的势，所以在规范变换下流通量不守恒。我们注意到π_μ在一类特殊的规范变换下是不变的。X还可以改写成

$$X_i=\frac{1}{32\pi^2}\iint_i \in_{ijkl}\in_{\mu\upsilon\rho\sigma}\Big(A_\upsilon^{ij}\partial_\rho A_\sigma^{kl}-\frac{4}{3}A_\upsilon^{ij}A_\rho^{kj}A_\sigma^{lj}\Big)\Big(d\sigma\Big)_\mu$$

$$\equiv\frac{1}{32\pi^2}\iint_i \pi_\mu\,(d\sigma)_\mu$$

$$\pi_\mu=\in_{ijkl}\in_{\mu\upsilon\rho\sigma}\Big(A^{ij}\partial_\rho A_\sigma^{kl}-\frac{4}{3}A_\upsilon^{ij}A_\rho^{kj}A_\sigma^{lj}\Big)$$

$$=\in_{ijkl}\in_{\mu\upsilon\rho\sigma}\Big(A^{ij}\partial_\rho A_\sigma^{kl}-\frac{4}{3}A_\upsilon^{ij}A_\rho^{ik}A_\sigma^{il}\Big)$$

$$=4\in_{jkl}\in_{\mu\upsilon\rho\sigma}\Big(A^{ij}\partial_\rho A_\sigma^{kl}-\frac{4}{3}A_\upsilon^{ij}A_\rho^{ik}A_\sigma^{il}\Big)$$

由π_μ表达式看出i可代表流形上矢量场某一方向，我们证明了如果规范变换不变矢量场的方向，那么势在这一变换下是协变的，那么π_μ就在此变换下保持不变。可见Eμler示性数与流形上矢量场的性质密切相关，这一点与微分几何中Eμler数的定义相符合。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com